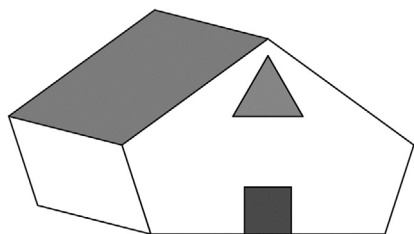


JEDNAKOKUTNI MNOGOKUTI¹

Damjan Muhar, Bjelovar



Slika 1. Kućica

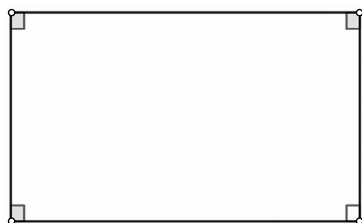
U svojoj okolini neprestano uočavamo razne geometrijske likove, a među njima i razne mnogokute. Oni mogu biti različitih veličina, oblika i svojstava. Promotrite *Sliku 1.* i odredite od kojih se sve mnogokuta sastoji prikazana kućica. Jesu li vam poznati svi mnogokuti sa slike? Koje pravilnosti uočavate kod njih? Primjećujete li neke likove koji odstupaju od potpune pravilnosti?



Općenito

Pravilnim mnogokutima nazivamo one mnogokute kojima su sve stranice jednake duljine i svi kutovi međusobno sukladni. Jeste li se zapitali kakvi bi to bili mnogokuti za koje bi vrijedio samo jedan od navedenih uvjeta? Pokušajte nacrtati jedan mnogokut kojemu su stranice jednake duljine, ali mu nisu svi kutovi sukladni.

U nastavku ovoga teksta bavit ćemo se mnogokutima kojima su svi unutarnji kutovi sukladni, ali njihove stranice ne moraju nužno biti jednake duljine. Jednakokutni mnogokut, kako mu i samo ime kaže, mnogokut je čiji su svi kutovi sukladni. Primijetimo da pravilni mnogokuti pripadaju jednakokutnim mnogokutima.



Slika 2. Pravokutnik

Podsjetimo se, pravokutnik je četverokut koji ima četiri prava kuta. Već sama definicija pravokutnika govori nam da on pripada jednakokutnim mnogokutima.

Jednakokutni mnogokuti, kao i pravilni, mogu imati proizvoljan broj stranica. Budući da je zbroj veličina unutarnjih kutova u n -terokutu jednak $(n - 2) \cdot 180^\circ$, lako je zaključiti da veličina svakog pojedinog unutarnjeg kuta u jednakokutnom n -terokutu mora biti jednaka $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Konstrukcija

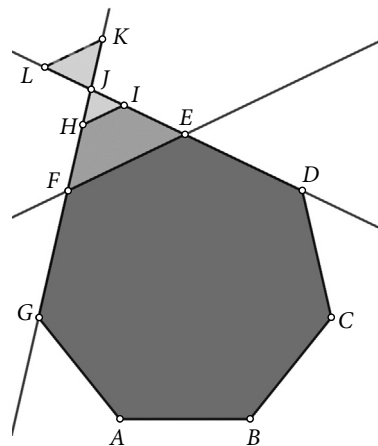
Jednakokutne mnogokute (koji nisu pravilni) možemo dobiti tako da najprije konstruiramo odgovarajući pravilni mnogokut (s jednakim brojem stranica kao mnogokut koji želimo konstruirati), a zatim pravce kojima pripadaju

¹Članak je napisan kao studentski rad u kolegiju Metodika nastave matematike 3 na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, mentorice prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija i Sanja Stilinović, prof.



stranice pravilnog mnogokuta. Svaku stranicu možemo pomicati u smjeru okomitom na tu stranicu, odnosno konstruiramo paralelu s tom stranicom. Njena sjecišta s odgovarajućim parom pravaca bit će vrhovi željenog mnogokuta. Pomicanjem jedne stranice mnogokuta na opisan način mijenja se njena duljina i duljina dviju susjednih stranica. Međutim, ako stranicu pomaknemo tako da njena duljina postane nula, tj. tako da paralela prolazi sjecištem pravaca kojima pripadaju susjedne stranice, onda dobivamo degenerirani slučaj (mnogokut s jednom stranicom manje od početnog koji nije jednakokutan).

Daljnijim pomicanjem prema van dolazi do zamjene unutarnjih i vanjskih kutova (Slika 3.), isto kao i pomicanjem prema unutra ako su sjecišta paralele i odgovarajućeg para pravaca s druge strane susjednih vrhova.



Slika 3. Ilustracija konstrukcije

Jednakokutni šesterokuti

Detaljnije ćemo proučiti jednakokutne šesterokute. Na Slici 4. prikazan je jedan simetrični jednokokutni šesterokut s označenim duljinama stranica. Izračunat ćemo njegovu površinu. Ball (2002.) navodi da jedan od načina računanja površine započinje konstruiranjem jednakokraničnih trokuta nad određenim stranicama šesterokuta kao na Slici 5. Na taj način nadopunjavamo šesterokut do jednakokraničnog trokuta. Površinu zadanog jednakokutnog šesterokuta P dobit ćemo tako da od površine velikog jednakokraničnog trokuta P_V oduzmemo površine triju malih jednakokraničnih trokuta P_1 , P_2 i P_3 .

$$P = P_V - P_1 - P_2 - P_3$$

Budući da su svi navedeni trokuti jednakokranični, slijedi da je

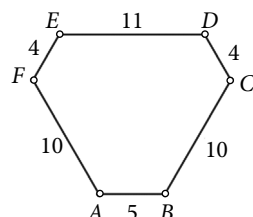
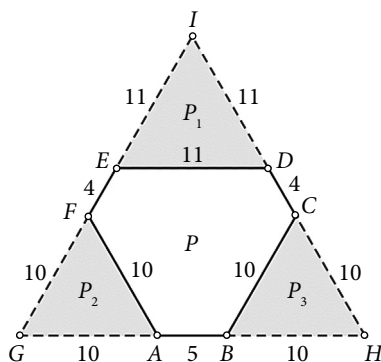
$$P_1 = \frac{11^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{121 \sqrt{3}}{4}, \quad P_2 = P_3 = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25 \sqrt{3},$$

$$P_V = \frac{25^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{625 \sqrt{3}}{4}.$$

Stoga za traženu površinu vrijedi:

$$P = \frac{625 \sqrt{3}}{4} - \frac{121 \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot 25 \sqrt{3}, \text{ tj.}$$

$$P = 76 \sqrt{3}.$$

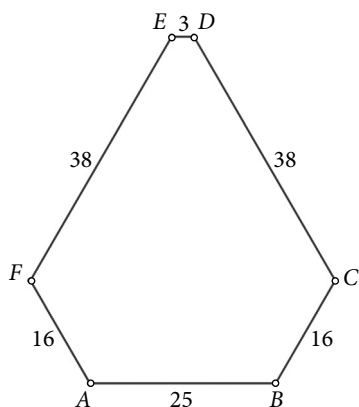

 Slika 4.
Jednakokutni
šesterokut

 Slika 5. Konstrukcija
jednakokraničnih trokuta


Osvrt

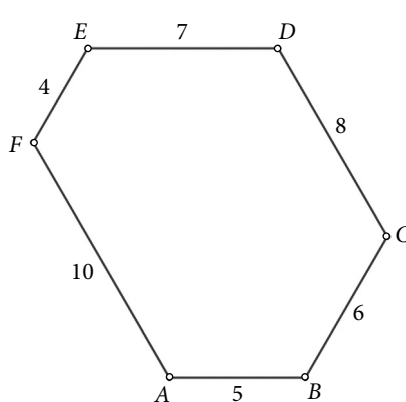
Jednakokutni mnogokuti mogu biti jednakokranični (tada su pravilni), raznostranični ili mogu imati samo neke stranice jednake duljine. Neki od najjednostavnijih primjera su jednakokranični trokut i pravokutnik. Jedan od načina konstruiranja jednakokutnih mnogokuta je korištenjem odgovarajućih pravilnih mnogokuta. Posebno su zanimljivi jednakokutni šesterokuti jer njihovu površinu možemo računati pomoću nadopunjavanja do jednakokraničnog trokuta.

Još jedna zanimljivost vezana za jednakokutne šesterokute krije se u duljinama njihovih stranica.

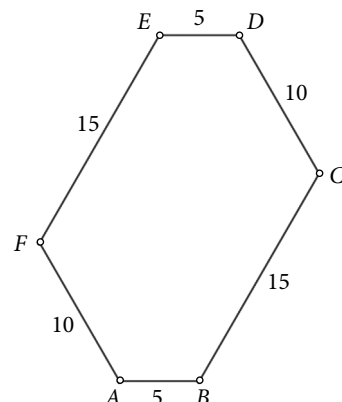
1. Pokušajte otkriti pravilnost vezanu za duljine stranica jednakokutnih šesterokuta promatrajući šesterokute prikazane na sljedeće tri slike. Što vrijedi za duljine stranica u sva tri slučaja?



Slika 6. Jednakokutni šesterokut



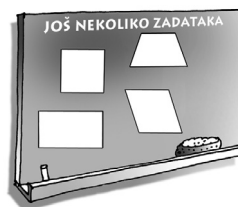
Slika 7. Jednakokutni šesterokut



Slika 8. Jednakokutni šesterokut

Zanimljivosti

- Ako je tetivni mnogokut jednakokutan, onda mu duljine stranica alterniraju (izmjenjuju se dvije duljine stranica). (De Villiers, 2011.)
- Zbroj udaljenosti bilo koje točke do pravaca kojemu pripadaju stranice jednakokutnog mnogokuta je konstantan. („Cut The Knot”, bez dat.)
- Trokut je jedini geometrijski lik za koji vrijedi: ako je jednakokraničan, onda je i jednakokutan, i obrnuto; ako je jednakokutan, onda je i jednakokraničan.



Još nekoliko zadataka

2. Izračunajte površinu šesterokuta sa Slike 7.

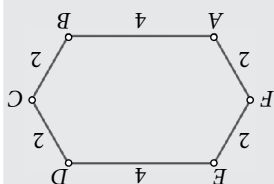


3. Konstruirajte jedan jednakokutni mnogokut kojemu je površina jednaka $10\sqrt{3}$, a ne pripada pravilnim mnogokutima.
4. Dokažite da se konstruiranjem triju jednakostraničnih trokuta kao na Slici 4. uistinu dobije jednakostraničan trokut s vrhovima G , H , i I .

Literatura

1. Ball, D. (2002.). Equiangular polygons. *The Mathematical Gazette*, 86(507), 396-407.
2. Cut The Knot (bez dat.) A Property of Equiangular Polygons. <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/EquiangularPoly.shtml> (17. 10. 2022.)
3. De Villiers, M. (2011.). Equi-angled cyclic and equilateral circumscribed polygons. *The Mathematical Gazette*, 95(532), 102-106.

1. Razlika dužina nasuprotnih stranica je konstantna.
2. Tražena površina dobije se tako da od površine jednakostraničnog trokuta stranice dužine 21 oduzmemo površine jednakostraničnih trokuta stranica dužina 7, 10, i 6 jedinica dužine. Površina je $64\sqrt{3}$ kvadratnih jedinica.
3. Primjer rješenja: zadanu površinu ima šesterekut dobiven iz pravilnog šesterekuta sa stranicom dužine dvije jedinice produživanjem dviju nasuprotnih stranica za 2 jedinice dužine.
- Površina pravilnog šesterekuta stranice dužine 2 je $6\sqrt{3}$. Produživanjem dviju nasuprotnih stranica toga šesterekuta za 2 povećavamo njegovu površinu za površinu pravokutnika sa stranicama dužina 2 i $2\sqrt{3}$, tj. za $4\sqrt{3}$ pa je ukupna površina tog lika jednaka $10\sqrt{3}$.
4. Mjera svakog pojednog unutarnjeg kuta šesterekuta iznosi 120° , a unutarnji kutovi jednakostraničnog trokuta iznose 60° . Stoga točke I , D , C i G pripadaju istom pravcu. Na isti način zaključujemo da točke I , E F i H pripadaju istom pravcu. Dužine svih triju dobivenih te točke H , A , B i G pripadaju istom pravcu. Dužine svih triju dobivenih stranica su 25 jedinica dužine i mjera svih triju kutova je 60° (jer su to ujedno kutovi malih jednakostraničnih trokuta).



Rješenja zadataka:

