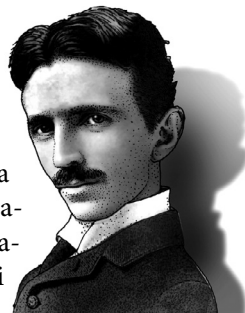
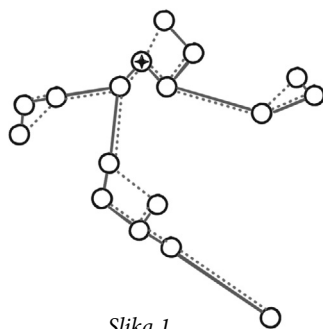


Davnog 7. siječnja 1943. godine preminuo je Nikola Tesla. Zasižno ga poznajemo kao jednog od najvećih inovatora svih vremena, ali i kao osobu zaslužnu za razvoj elektroenergetike. Nakon što je svijetu pokazao kako napraviti generatore i proizvesti električnu struju, priči o električnoj struji tu nije bio kraj. Nju je trebalo provesti žicama i kabelima do gradova, a potom i do naših domova. Tim problemom bavio se češki matematičar Otakar Borůvka koji bio zadužen za elektrifikaciju Moravske (danasnji jugoistok Češke). Točnije, zanimalo ga je kako povezati sve gradove i naselja u jednu mrežu, sa što manje utrošenog kablja. Problem je generalizirao na *teoriju grafova*, a svoje rješenje objavio je 1926. godine pod imenom *O jistém problému minimálním* (hrv. *O jednom minimalnom problemu*). Danas se taj problem naziva *Minimalno razapinjuće stablo* (eng. *Minimal spanning tree - MST*). Problem je tijekom prošlog stoljeća više puta ispočetka rješavan na različite načine, a objasniti ćemo rješenje koje je ponudio Joseph Kruskal, američki matematičar i računalni teoretičar.



Uvodni primjer

Na slici desno možemo vidjeti dva plana prijenosne mreže na primjeru Hrvatske. Ovdje nailazimo na neke uvjete kako naša mreža mora izgledati. Svaka dva grada moraju biti „povezana”, to jest našom mrežom moramo moći „doći” od svakog do svakog drugog grada. Također, mreža označena punom crtom bila bi bolja od mreže označene isprekidanom crtom jer je ukupna duljina punih veza između gradova manja od ukupne duljine isprekidanih veza, što bi onda u stvarnome svijetu rezultiralo s manje utrošenog kablja. Otakar Borůvka primijetio je kako karte i međusobne udaljenosti gradova može lakše predložiti *grafovima* kojima se bavi grana matematike koja se zove *teorija grafova*, i time generalizirati problem.



Slika 1.

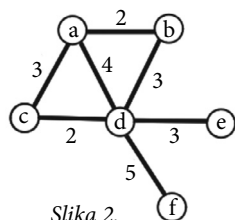
Teorija grafova

Teorija grafova grana je matematike koja se bavi proučavanjem grafova.

Graf je matematička struktura koja se sastoji od skupa čvorova (eng. „node”) i skupa bridova (eng. „edge”) koji povezuju te čvorove. Grafovi se koriste za modeliranje i analizu različitih problema.

Čvorovi su osnovni element grafa, koji predstavlja entitet ili objekt u mreži. Označava se obično slovima ili brojevima (npr. v_1 , v_2 , v_3 , itd.), na Slici 2. to su „kružići” označeni slovima a, b, c itd.





Slika 2.

Bridovi su poveznice između dvaju čvorova, koji mogu biti težinski (ima pridruženu vrijednost, to jest „težinu”) ili netežinski (ako nema „težinu”). Brid koji povezuje čvorove v_x i v_y označavat ćemo sa $v_x v_y$. Na Slici 2. to su ravne crte koje povezuju kružice, odnosno čvorove. Brid imenujemo kao par čvorova koji povezuje, npr. (a, b) ili (f, d).

Tako i grafovi mogu biti (prema vrsti bridova) **težinski** (ima težinske bridove) i **netežinski** (nema težinske bridove). U daljnjem tekstu razmatrat ćemo težinske grafove. Na Slici 2. graf je težinski, a težine bridova označene su brojevima. Brid (c, d) ima težinu 2. Koju težinu ima brid (d, e)?

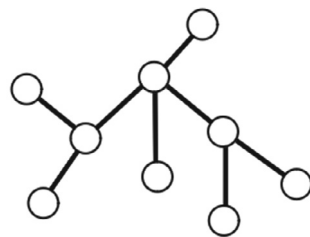
Put u grafu između čvorova v_1 i v_n konačan je slijed bridova $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ u kojem su svaka dva brida susjedna i svi su vrhovi različiti, osim ponekad prvi i zadnji (tj. v_1 i v_n).

Promotrite graf na Slici 2. Koliko putova ima između čvorova a i d? A koliko između čvorova a i e?

Ako put počinje te također i završava u istome čvoru (odnosno ako je $v_1 = v_n$), tada taj put nazivamo **ciklus**. Graf sa Slike 2. sadrži 3 ciklusa (ako ne uzimamo u obzir smjer obilaska). To su ciklusi {a, b, d}, {a, c, d} i {a, b, d, c}. Primijetite kako nema potrebe ponavljati prvi čvor na zadnjem mjestu jer se podrazumijeva da su posljednji i prvi čvor povezani bridom.

Kažemo da je graf **povezan** ako postoji put između bilo koja dva čvora u grafu.

Graf bez ciklusa nazivamo „šuma”. Kada je šuma povezana, nazivamo je **stablom**. Primijetite da je šuma zapravo samo skup više stabala. Na slici 3. možemo vidjeti grafički prikaz jednoga stabla s 9 čvorova i 8 bridova. Iz uvjeta povezanosti stabla i svojstva da nema cikluse slijedi da svako stablo s n čvorova ima $n - 1$ bridova.



Slika 3.

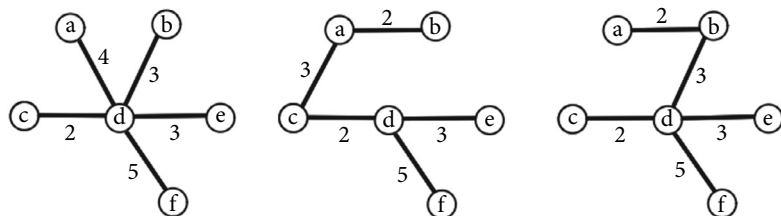
Ako stablo ima 5 čvorova, koliko će imati bridova? Nacrtajte neko stablo s 5 čvorova.

Minimalno razapinjuće stablo

Razapinjuće stablo nekog povezanog grafa je stablo koje sadržava sve vrhove početnoga grafa povezane? nekim podskupom bridova toga grafa.

Minimalno razapinjuće stablo (eng. *Minimum spanning tree*) nekog grafa je razapinjuće stablo takvo da je ukupna težina bridova u njemu minimalna.





Slika 4.

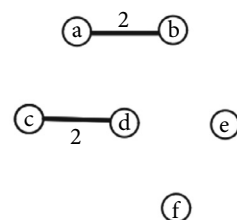
Na Slici 4. vidimo tri primjera razapinjućih stabala grafa sa Slike 2., od kojih su desna dva minimalna (suma njihovih bridova iznosi 15, dok za lijevo stablo iznosi 17).

Ako se prisjetimo uvodnog primjera, možemo primijetiti kako su naše dvije prijenosne mreže upravo razapinjuća stabla jer sadržavaju sve vrhove (gradove) i povezani su težinskim bridovima (udaljenosti između gradova). Ono što nas zanima jest kako efikasno pronaći ne bilo koje razapinjuće stablo, već ono minimalno. Jedno od rješenja predstavio je Joseph Kruskal pa to rješenje danas nazivamo *Kruskalov algoritam*.

Kruskalov algoritam

Kruskal je predložio sljedeće rješenje za pronalaženje minimalnog razapinjućeg stabla u povezanom grafu (ako graf ne bi bio povezan, razapinjuće stablo ne bi postojalo). Prvo poredamo (sortiramo) sve bridove, od najmanjih prema najvećima. Zatim ponavljamo sljedeći postupak: prolazimo redom po bridovima kako smo ih sortirali i pokušamo dodati brid u dosadašnju mrežu (odnosno šumu). Brid ćemo dodati ako on spaja dvije različite komponente, odnosno ako dodavanjem njega nećemo stvoriti ciklus.

Provedimo taj postupak na grafu sa Slike 2. Prvo prolazimo bridovima (a, b) i (c, d) te ih dodajemo jer spajaju različite komponente (same čvorove). Na Slici 5. možemo vidjeti kako izgleda trenutačni graf (šuma). Zatim slijedi brid (a, c) težine 3 koji dodajemo jer spaja dvije komponente koje se sastoje od čvorova a, b, c i d. Sljedeći brid (d, e) također dodajemo. No brid (b, d) ne dodajemo jer bi on stvorio ciklus. On je također težine 3. Primijetimo da poredak kojim prolazimo bridove iste težine algoritmu nije važan, odnosno doći će do istoga rješenja. Sljedeći brid jest (a, d) težine 4. Njega ne dodajemo jer ne spaja dvije različite komponente, već stvara ciklus. Posljednji brid (d, f) dodajemo jer spaja čvor f s ostatkom grafa.



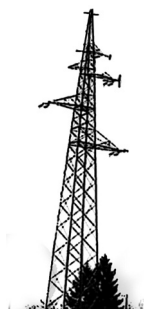
Slika 5.

Algoritam se možda i čini naočigled intuitivno ispravan, no valja ga dokazati.

Dokaz ispravnosti Kruskalovog algoritma

Dokaz se sastoji od dva dijela. Prvo treba dokazati da novi graf koji je nastao uistinu jest razapinjuće stablo, a u drugom dijelu treba dokazati kako je ono minimalno.



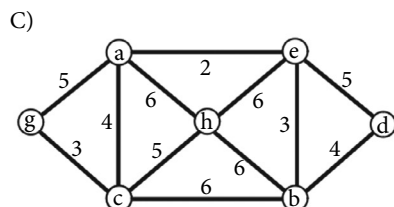
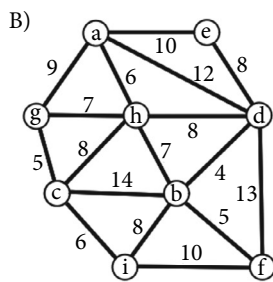
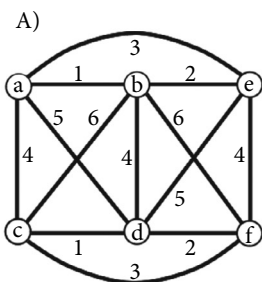


Algoritam nikada neće stvoriti ciklus. Budući da iz uvjeta zadatka znamo kako je početni graf povezan, takav će onda biti i stvoreni graf. Zamislimo da graf koji dobijemo nije povezan. To bi značilo da smo naišli na neki brid koji bi spojio dvije različite komponente, ali da smo ga onda odbacili, što je u kontradikciji s našim postupkom. Dakle graf nema ciklusa i povezan je – po definiciji to je stablo.

Drugi dio dokazujemo indukcijom. Tvrdimo da u svakom trenutku našeg algoritma postoji minimalno razapinjuće stablo koje sadrži skup naših odabranih bridova i ne sadrži bridove koje smo mi odbacili. Ta je tvrdnja svakako točna na početku kada nismo dodali niti odbacili nijedan brid jer bilo koje minimalno razapinjuće stablo zadovoljava našu tvrdnju. Zamislimo da se nalazimo u trenutku t (dodali/odbacili smo $t - 1$ bridova) te označimo našu trenutačnu (nedovršenu) šumu sa S i krajnje minimalno razapinjuće stablo koje sadrži dodane bridove i ne sadrži odbačene bridove T . U trenutku t promatramo brid b i imamo dva slučaja (slučaj u kojem mi nećemo dodati brid, odnosno kada bi njegovo dodavanje stvorilo ciklus u grafu S ne trebamo razmatrati jer se ni taj brid sigurno neće nalaziti u T). Prvi je slučaj kada se brid b uistinu i nalazi u T . Tada je naš algoritam ispravan (dodat ćemo ga jer povezuje dvije komponente). Drugi je slučaj kada se brid b ne nalazi u T , a mi ga želimo dodati u naš graf S , odnosno dodavanjem b u T nastao bi ciklus. Sada promotrimo najveći brid u tom ciklusu. Nije moguće da je taj maksimum manji od našeg brida b jer bismo taj brid onda već dodali prije trenutka t , što znači da je najveći brid u tom ciklusu nužno veći ili jednak bridu b . Primijetimo, kada bismo dodali brid b u T i izbrisali taj najveći brid, ciklusa više ne bi bilo, a i suma svih bridova bila bi manja ili jednaka prijašnjoj, to jest dobili smo ili bolje rješenje (što ne može biti jer smo pretpostavili da je T neko minimalno razapinjuće stablo) ili se suma bridova T nije promijenila, odnosno ostali smo pri istoj vrijednosti rješenja. Zaključujemo da i dalje postoji minimalno razapinjuće stablo koje sadrži S i brid b , točnije naš algoritam uspješno je prešao s trenutka t na trenutak $t + 1$ pa će i nakon što prodemo po svim bridovima naš graf S biti minimalno razapinjuće stablo.

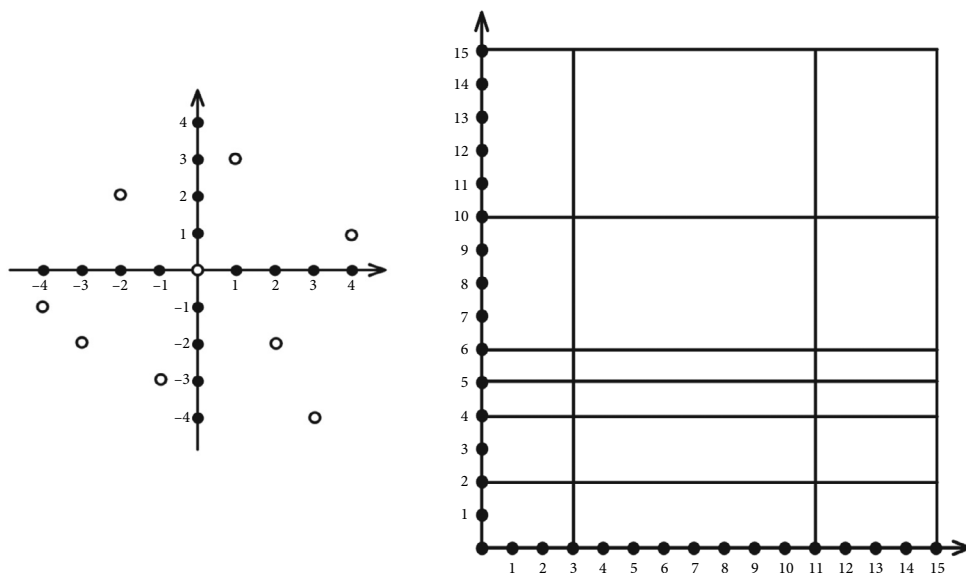
Zadatci

1. Pronađite minimalno razapinjuće stablo u danim grafovima:



2. Mali Goran i Tomislav našli su jednu od svojih starih „točkalica” (slika dolje lijevo). Kako su sad već veliki i vole trenirati mozak, nacrtali su koordinatnu mrežu i sada ih zanima samo jedno: kolika je najmanja ukupna duljina ravnih linija koje moramo nacrtati kako bi sve točkice bile povezane u jednu cjelinu?

Napomena: jedna od točaka „točkalice” je točka s koordinatama $(0, 0)$.



3. Farmer Fabijan najviše od svega voli svoje ovce. Međutim, ovce su ponekad nestašne i pobjegnu van Fabijanova zemljišta. Da tome doskoči, Fabijan je podijelio svoje zemljište na pravokutnike pomoću horizontalnih i vertikalnih linija te je na tim linijama izgradio ogradu (slika gore desno). Za potrebe ovog zadatka zamislimo da je Fabijanovo zemljište smješteno u koordinatni sustav. Tek nakon što je izgradio ogradu, Fabijan se sjetio da želi da su mu sva područja na zemljištu, omeđena pravokutnicima, „povezana”. Kako Fabijan živi daleko od civilizacije te pri ruci ima samo primitivan alat, on može jedino srušiti ili ogradu na cijeloj duljini jedne od stranica pravokutnika ili ogradu na toj stranici uopće ne srušiti. Pomozite Fabijanu i recite mu koliku najmanju duljinu ograde mora srušiti kako bi mu nakon rušenja cijelo zemljište bilo povezano!



Rješenje zadatka provjerite na stranici 215.

