

ČETIRI DOKAZA JEDNE JEDNAKOSTI IZ GEOMETRIJE TROKUTA

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Matkačima su poznate mnoge činjenice u vezi s geometrijom trokuta. Prikazat ćemo nekoliko dokaza jedne jednakosti koja se odnose na trokut čiji su unutarnji kutovi u omjeru 1 : 2 : 4. Dakle, ako za veličine kutova trokuta ABC vrijedi $|\angle CAB| = \alpha$, $|\angle ABC| = 2\alpha$, $|\angle ACB| = 4\alpha$, uz uobičajene oznake duljina stranica ($|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$) vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (*)$$

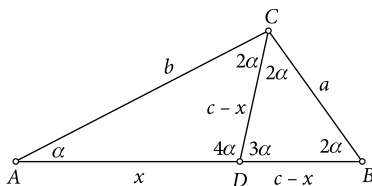
Prvi dokaz. Neka je točka D presjek simetrale kuta $\angle ACB$ sa stranicom $\overline{AB}$ (Slika 1.). Ako duljinu dužine $\overline{AD}$ obilježimo sa x , onda je $|BD| = c - x = |CD|$ (zbog $|\angle DBC| = |\angle BCD|$ trokut BCD je jednakokrakan). Kako je $\angle CDB$ vanjski kut trokuta ADC , a vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju unutarnjih njemu nesusjednih kutova. Zato vrijedi: $|\angle CDB| = |\angle CAD| + |\angle ACD| = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Tada je $|\angle ADC| = 180^\circ - |\angle CDB| = 7\alpha - 3\alpha = 4\alpha$. S obzirom na činjenicu da trokuti ABC i ACD imaju jednake kutove, slični su (pravilo K - K). Zbog toga je

$$|AB| : |AC| = |AC| : |AD| = |BC| : |CD|, \text{ tj. } c : b = b : x = a : (c - x).$$

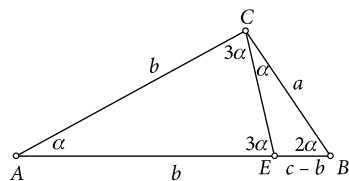
Iz jednakosti $c : b = b : x$ dobivamo $x = \frac{b^2}{c}$, a iz $b : x = a : (c - x)$ slijedi $x = \frac{bc}{a+b}$. Zato je $\frac{b^2}{c} = \frac{bc}{a+b}$, odnosno

$$c^2 - b^2 = ab. \quad (1)$$

Sada na stranici $\overline{AB}$ odredimo točku E tako da je $|AE| = |AC| = b$, pa je $|EB| = c - b$, (Slika 2.).



Slika 1.



Slika 2.

Budući da je $|AE| = |AC|$, zaključujemo da je trokut AEC jednakokrakan s osnovicom $\overline{EC}$ i vrijedi $|\angle AEC| = |\angle ACE| = (180^\circ - \alpha) : 2 = (7\alpha - \alpha) : 2 = 3\alpha$. Tada je $|\angle BCE| = |\angle ACB| - |\angle ACE| = 4\alpha - 3\alpha = \alpha$ i $|\angle BEC| = 7\alpha - 3\alpha = 4\alpha$. Trokuti ABC i CBE su slični jer imaju jednake kutove, pa je $|BC| : |AB| = |BE| : |CB|$, tj. $a : c = (c - b) : a$. Zato je



$$c^2 - a^2 = bc. \quad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) slijedi $(c^2 - b^2) - (c^2 - a^2) = ab - bc$, tj.

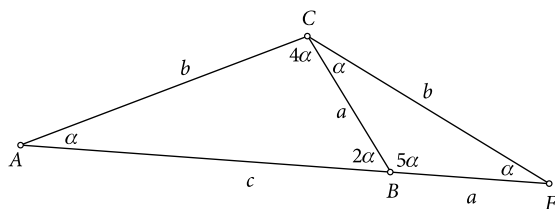
$$b^2 - a^2 = bc - ab. \quad (3)$$

Na pravcu AB odaberimo točku F (B je između A i F) tako da je $|BF| = |BC| = a$ (Slika 3.). Trokut BFC je jednakokračan (jer je $|BF| = |BC|$) pa je $|\angle BFC| = |\angle BCF| = |\angle ABC| : 2 = \alpha$ i $|\angle CBF| = 7\alpha - 2\alpha = 5\alpha$. Budući da je $|\angle BFC| = \alpha = |\angle BAC|$, trokut AFC također je jednakokračan. To, pak, znači da je $|FC| = |AC| = b$. Ti jednakokračni trokuti, AFC i FBC , međusobno su slični (Zašto?) Zbog toga vrijedi $|AC| : |AF| = |FB| : |FC|$, tj. $b : (c + a) = a : b$. Odatle je

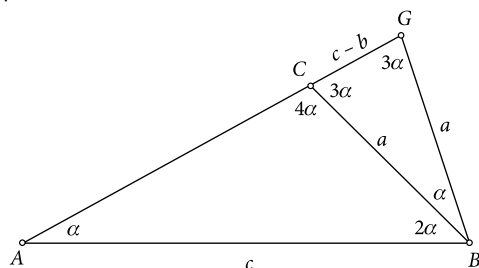
$$b^2 - a^2 = ac. \quad (4)$$

Iz jednakosti (3) i (4) dobivamo $bc - ab = ac$, a odatle, nakon dijeljenja s abc , slijedi $\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$. Odatle proizlazi tražena jednakost (*).

Drugi dokaz. Produljimo stranicu $\overline{AC}$ do točke G (točka C je između točaka A i G) tako da bude $|AG| = |AB| = c$ pa je $|CG| = c - b$ (Slika 4.).



Slika 3.



Slika 4.

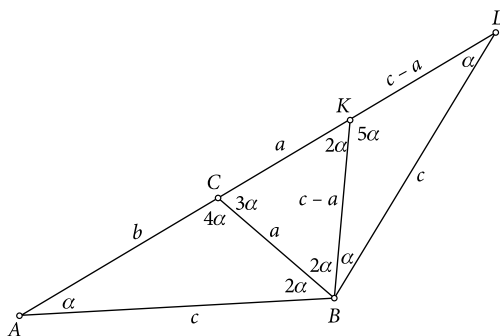
Budući da je trokut ABG jednakokračan (jer je $|AG| = |AB|$), za veličine njegovih unutarnjih kutova vrijedi $|\angle ABG| = |\angle AGB| = (180^\circ - |\angle BAG|) : 2 = (7\alpha - \alpha) : 2 = 3\alpha$.

Tada je $|\angle CBG| = |\angle ABG| - |\angle ABC| = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$ i $|\angle BCG| = 7\alpha - 4\alpha = 3\alpha$, pa je i trokut BCG jednakokračan. Jednakokračni trokuti ABG i BCG imaju jednake veličine kutova, što znači da su slični. Tada je $|BG| : |AB| = |CG| : |BC|$, tj. $a : c = (c - b) : a$, a odatle je

$$c^2 - a^2 = bc. \quad (5)$$



Sada produljimo stranicu $\overline{AC}$ do točke K (točka C je između točaka A i K), tako da je $|CK| = |BC| = a$ a potom odredimo točku L tako da ona predstavlja presjek kružnice $k(B, |AB|)$ i pravca AC (Slika 5.).



Slika 5.

Tada je trokut ABL jednakokračan ($|BL| = |AB|$), pa je $|\angle BKL| = |\angle BAC| = \alpha$. Budući da je $|\angle BLK| = 7\alpha - 2\alpha = 5\alpha$, u trokutu BLK je $|\angle KBL| = 7\alpha - (\alpha + 5\alpha) = \alpha$. To, pak, znači da su trokuti BLC i KBL jednakokračni ($|BL| = |CL| = c$ i $|BK| = |KL| = |CL| - |CK| = c - a$). Trokuti ABC i AKB imaju jednake kutove, te su slični. Radi toga je $|BC| : |AB| = |KB| : |AK|$, tj. $a : c = (c - a) : (b + a)$

$$c^2 - a^2 = ab + ac. \quad (6)$$

Iz jednakosti (5) i (6) dobivamo $bc = ab + ac$, a odatle, nakon dijeljenja s abc , slijedi željena jednakost (*).

Treći dokaz. Odredimo točku K kao u drugom dokazu (Slika 5.). Na temelju sličnosti trokuta ABC i AKB vrijedi $|BC| : |AC| = |KB| : |AB|$, tj. $a : b = (c - a) : c$. Odatle slijedi da je $ac = bc - ab$, odnosno $bc = ac + ab$ odakle, nakon dijeljenja s abc , dobivamo traženu jednakost $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Četvrti dokaz. Točke K i L odredimo kao u drugom rješenju (Slika 5.). Jednake kutove imaju trokuti ABL i BKL pa su ti trokuti slični. Iz te sličnosti slijedi $|AL| : |AB| = |BL| : |BK|$, tj. $(b + c) : c = c : (c - a)$. Odatle je $bc - ba + c^2 - ca = c^2$, tj. $bc = ac + ab$. Preostali dio bit će kao u trećem dokazu.

