

Što je u podlozi ovog računa?

Gauss je tvrdio: *dva su broja kongruentna (jednaka po modulu) ako svaki pri dijeljenju s nekim zadanim brojem k daje jednak ostatak.*

Kažemo da su ti brojevi jednaki po modulu k , a sam broj k naziva se *modulom*. Primjerice, brojevi 16 i 23 pri dijeljenju brojem 7 daju ostatak 2 pa su oni kongruentni. Pišemo

$$23 \equiv 16 \pmod{7}.$$



2. Primjeri

Budući da je znamenka 9 najveća u dekadskom sustavu, zbroj znamenaka nekog broja uvijek „sravnimo” po modulu 9.

Primjer 1. Dan je broj 4 157. Pri dijeljenju brojem 9 on daje ostatak 8. Zbroj znamenaka broja 4157 jednak je 17. I broj 17 pri dijeljenju brojem 9 daje ostatak 8. Taj ostatak, broj 8, nazivamo *korijenom broja* 4 157.

Pojam *korijena* broja stari su Matemagičari koristili u kontroliranju računanja pomoću dijeljenja brojem 9 u vremenima kad nisu postojala električna računala. Ova se metoda danas koristi u provjeri točnosti upisa nekog numeričkog podatka jer se izvornom podatku pridružuje korijen broja. Ako smo pogriješili na nekom mjestu prijepisa, računalo automatskom provjerom utvrđuje je li broj sukladan pravom korijenu broja.

Vratimo se našem početnom problemu. Permutacija znamenaka telefonskog broja ne mijenja njegov korijen. „Rastavimo” promatrane telefonske brojeve na dio djeljiv brojem 9 i *korijen*, tj. ostatak pri dijeljenju brojem 9.

(dio većeg broja djeljiv brojem 9) + korijen broja 4 567 123 = 4 567 122 + 1

(dio manjeg broja djeljiv brojem 9) + korijen broja 1 234 567 = 1 234 566 + 1

Oduzimanjem tih telefonskih brojeva (veći broj minus manji) dobivamo:

$$(\text{broj djeljiv brojem 9}) \quad 4\,567\,123 - 1\,234\,567 = 3\,332\,556 + 0$$

Korijen broja omogućuje brzo i jednostavno rješavanje zadataka čije se rješavanje na drugi način pokazuje neobično teškim.

Primjer 2. Nađimo najmanji broj čiji se zapis sastoji samo od jedinica i nula, i djeljiv je brojem 225.

Rješenje: Korijen broja 225 jednak je 9 pa traženi broj također mora imati korijen jednak 9. Najmanji broj zapisan samo pomoću jedinica s korijenom 9



je broj 111 111 111. Dopišemo li nule, mi povećavamo broj, ali ne mijenjamo njegov korijen. Budući da je broj 225 djeljiv brojem 25, onda i traženi broj treba biti djeljiv brojem 25. Svi brojevi koji su djeljivi brojem 25 završavaju na 00, 25, 50 ili 75.

Prema uvjetu zadatka da se broj mora sastojati od nula i jedinica, najmanji je traženi broj takav da mu na kraju zapisa dopišemo dvije nule, tj. traženi je broj 11 111 111 100.

3. Još jedna pozadina dijeljenja brojem 9

Razmotrimo što je u pozadini ovog računanja i dijeljenja brojem 9.

Primjer 3. Zadan je broj 4 135. Možemo ga zapisati kao $4135 = 4 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$, ali i kao $4135 = 4 \cdot 999 + 1 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 0 + 4 + 1 + 3 + 5$ (smanjimo svaku dekadsku jedinicu za 1).

Općenito, četveroznamenaste brojeve (a slično i za ostale) možemo pisati u obliku

$$\overline{abcd} = a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 + d \cdot 0 + a + b + c + d.$$

Prva 4 pribrojnika djeljiva su brojem 9 pa ostatak $a + b + c + d$ pri dijeljenju brojem 9 daje *korijen* broja.

U ovom primjeru zbroj $4 + 1 + 3 + 5 = 13$ podijelimo brojem 9 i odredimo ostatak pri tom dijeljenju. Budući da 13 pri dijeljenju brojem 9 daje ostatak 4, dobivamo da je *korijen* broja 4 135 jednak 4.

Korijen broja možemo koristiti i za argumentiranje činjenice (bez obzira na veličinu broja) je li taj broj ili nije puni kvadrat ili kub nekog manjeg broja.

Zašto je to točno?

Kvadrati prirodnih brojeva mogu završavati znamenkom 0, 1, 4, 5, 6 ili 9, a svi kvadrati brojeva imaju *korijen* broja jednak 1, 4, 7 ili 9.

Kubovi mogu završavati bilo kojom znamenkom, a njihov brojevni *korijen* može biti samo 1, 8 ili 9.

Zadatak: Na nekoliko primjera provjerite gornje tvrdnje o *korijenima* brojeva kvadrata i kubova brojeva.

4. O savršenim brojevima i korijenima brojeva

Savršen broj je cijeli broj jednak zbroju svojih djelitelja, uključujući jedinicu, ali ne i samoga sebe.

PODIJELITE
S BROJEM
DEVETI...



Stari su Grci poznavali prva četiri savršena broja: 6, 28, 496 i 8128. Grčki matematičar **Arhita** dokazao je da je svakomu prostom broju oblika $2m-1$ pridružen parni savršeni broj $2m-1(2m-1)$. Npr. prostom broju $2^5 - 1 = 31$ pridružen je savršeni broj $24(25-1) = 496$. Tek je **L. Euler** dokazao da je svaki parni savršeni broj Arhitina oblika. Smatra se da nema neparnih savršenih brojeva, iako to još nitko nije uspio dokazati. Do danas su elektroničkim računalima ispitani brojevi do 10^{300} , ali nije pronađen niti jedan neparni savršeni broj.

Prva četiri savršena broja s prikazom pribrojnika su:

$$26 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$$

Zanimljivo je da parni savršeni brojevi završavaju znamenkom 6 ili je dvoznamenkasti završetak broj 28. Ako izuzmemo najmanji savršeni broj 6, za sve ostale savršene brojeve brojevni *korijen* jednak je 1.



Zadatak: Nađite još nekoliko savršenih brojeva i provjerite istinitost gornjih tvrdnji o završnim znamenkama i brojevnom *korijenu*.

Zadatci:

1. Nađite najmanje brojeve koji u zapisu imaju samo jedinice i nule, a koji su djeljivi brojem:

a) 625, b) 144 i c) 342.

2. Nađite *korijene* brojeva: a) 12 345, b) 87 639, c) 32 777.

3. Osim broja 6, svi savršeni brojevi mogu se prikazati kao zbroj prvih $2^{\frac{(p-1)}{2}}$ kubova neparnih brojeva. Primjerice,

$$28 = 1^3 + 3^3,$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3,$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3,$$

$$33\,550\,336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 + \dots + 127^3.$$

Provjerite istinitost ove tvrdnje na nekoliko većih savršenih brojeva i odredite brojevne *korijene* tih savršenih brojeva.

