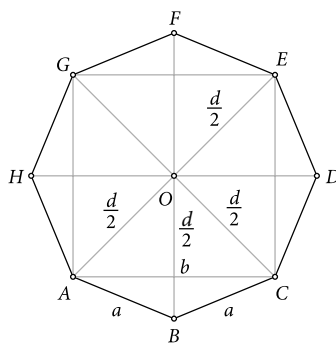


JEDNAKOSTI U PRAVILNOM OSMEROKUTU

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Neka je dan pravilni osmerokut $ABCDEFGH$ (Slika 1.). Uvedimo oznake: $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = c$ i $|AE| = d$. S P označimo površinu, a s 2α središnji kut nad stranicom toga mnogokuta. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

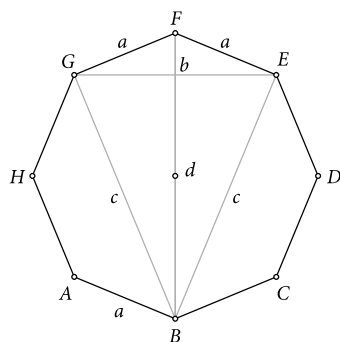
- (1) $P = bd$
- (2) $bd = 2ac$
- (3) $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1$
- (4) $\frac{d}{b} - \frac{a}{c} = 1$
- (5) $\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 2$



Slika 1.

Dokažimo navedene jednakosti.

Dokaz jednakosti (1): Pravilni osmerokut $ABCDEFGH$ (Slika 1.) sastavljen je od četiriju skladnih deltoida: $ABCO$, $CDEO$, $EFGO$ i $GHAO$ (točka O je središte tog mnogokuta). Njihove su dijagonale duljine b i $\frac{d}{2}$ pa je površina P pravilnog osmerokuta jednaka $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(b \cdot \frac{d}{2}\right)$ tj. $P = bd$.



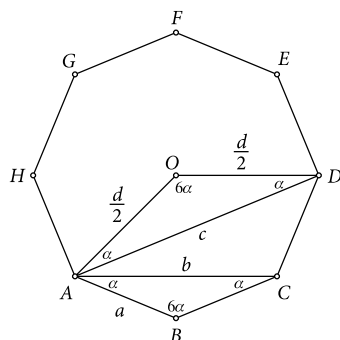
Slika 2.

Dokaz jednakosti (2): Prvi način. Promotrimo deltoid $BEFG$ (Slika 2.).

Njegovu površinu možemo izraziti na dva načina. Kako se taj deltoid sastoji od dvaju skladnih pravokutnih trokuta čije su stranice duljine a i c , imamo: $P(EBGF) = 2P(BEF) = 2 \cdot \frac{ac}{2} = ac$. Budući da je površina deltoida jednaka polovici umnoška duljina njegovih dijagonala, možemo pisati $P(BEFG) = \frac{1}{2}bd$. To pak znači da je $ac = \frac{1}{2}bd$ ili $bd = 2ac$.



Drugi način. Promotrimo Sliku 3.



Slika 3.

Trokuti ABC i AOD imaju jednake kutove

$$(|\angle CAB| = |\angle ACB| = |\angle OAD| = |\angle ODA| = \alpha, |\angle ABC| = |\angle AOD| = 6\alpha),$$

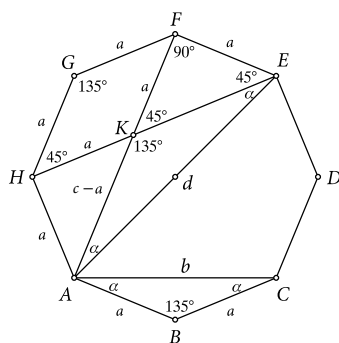
što znači da su ti trokuti slični. Tada je $|AB| : |AC| = |AO| : |AD|$, odnosno

$$a : b = \frac{d}{2} : c. \text{ Odatle je } ac = \frac{bd}{2}, \text{ tj. } 2ac = bd.$$

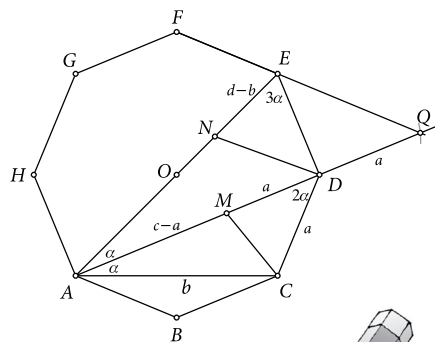
Dokaz jednakosti (3): Neka je točka presjeka dijagonala $\overline{AF}$ i $\overline{EH}$ obilježena s K (Slika 4.).

Četverokuti AFGH i EFGH jednakokračni su trapezi čiji je presjek romb KFGH sa stranicom duljine a. To pak znači da je $|AK| = |EK| = c - a$. Trokut EFK je pravokutan i jednakokračan ($|EF| = |FK| = a$ i $|\angle EFK| = |\angle EFA| = 90^\circ$ kao kut nad promjerom $\overline{AE}$ pa je $|\angle EKF| = |\angle KEF| = 45^\circ$) i $|\angle AKE| = 180^\circ - |\angle EKF| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Trokut AEK je jednakokračan ($|AK| = |EK| = c - a$), pa je $|\angle KAE| = |\angle KEA| = \alpha$ (kutovi nad stranicama pravilnog osmerokuta). Trokut ABC je također jednakokračan ($|AB| = |BC| = a$). Trokuti ABC i AKE imaju jednake kutove, što znači da su slični. Zbog toga je $|AC| : |AB| = |AE| : |AK|$, ili $b : a = d : (c - a)$ tj. $b(c - a) = ad$. Odatle je $bc - ad = ab$. Poslije dijeljenja lijeve i desne strane ove jednakosti s ab dobivamo željenu jednakost, tj. $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1$.

Dokaz jednakosti (4): Na dijagonalama $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$ danog mnogokuta odredimo točke M i N tako da bude $|DM| = a$ i $|AN| = b$, što znači da je $|AM| = c - a$ i $|EN| = d - b$. (Slika 5.).



Slika 4.



Slika 5.



Trokut CDM je jednakokračan ($|CD| = |DM| = a$), s kutom $|\angle CDM| = 2\alpha = 45^\circ$. Tada vrijedi $|\angle CMD| = |\angle DCM| = (180^\circ - 45^\circ) : 2 = (8\alpha - 2\alpha) : 2 = 3\alpha$, pa je $|\angle AMC| = 8\alpha - 3\alpha = 5\alpha$ i $|\angle AND| = 180^\circ - |\angle DNE| = 8\alpha - 3\alpha = 5\alpha$.

U trokutu DEN je $|\angle DEN| = 3\alpha$ (obodni kut nad $\frac{3}{8}$ kružnice opisane oko pravilnog osmerokuta). Tada je $|\angle DNE| = 8\alpha - (2\alpha + 3\alpha) = 3\alpha$, što znači da je trokut DEN jednakokračan i $|DN| = |DE| = a$. Sada je $|\angle AND| = 180^\circ - |\angle DNE| = 8\alpha - 3\alpha = 5\alpha$ i $|\angle AMC| = 180^\circ - |\angle DMC| = 8\alpha - 3\alpha = 5\alpha$.

Trokuti CDM i EDN sukladni su (pravilo SKS), pa je $|CM| = |EN| = d - b$. Trokuti ACD i AMC imaju jednake kutove ($|\angle CAD| = |\angle CAM| = \alpha$, $|\angle EAQ| = |\angle CAD| = \alpha$), pa su slični. Iz te sličnosti slijedi da je $|AD| : |AC| = |CD| : |CM|$, ili $c : b = a : (d - b)$, tj. $c(d - b) = ab$. Odatle je $cd - ab = bc$, pa je $\frac{d}{b} - \frac{a}{c} = 1$, tj. jednakost (4) vrijedi.

Dokaz jednakosti (5): Prvi način. Odredimo točke M i N kao u rješenju 4). Produljimo pravac AD do točke Q tako da je $|DQ| = a$ (Slika 5.). Tada je $|AQ| = |AD| + |DQ| = c + a$. U jednakokračnom trokutu DQE ($|DQ| = |DE| = a$) je $|\angle EDQ| = 180^\circ - (|\angle ADN| + |\angle EDN|) = 8\alpha - (2\alpha + 2\alpha) = 4\alpha$, pa je $|\angle DEQ| = |\angle DQE| = (8\alpha - 4\alpha) : 2 = 2\alpha$. Trokuti AQE i ACM slični su jer imaju jednake kutove ($|\angle EAQ| = |\angle CAD| = \alpha$, $|\angle AEQ| = |\angle AED| + |\angle DEQ| = 3\alpha + 2\alpha = 5\alpha = |\angle AMC|$). Tada je $|AQ| : |AE| = |AC| : |AM|$, ili $(c + a) : d = b : (c - a)$, tj. $c^2 - a^2 = bd$. Kako je $bd = 2ac$ (jednakost (2)), imamo $c^2 - a^2 = 2ac$.

Odatle, poslije dijeljenja s ac , konačno dobivamo $\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 2$.

Drugi način. Pogledajmo Sliku 4. Budući da je trokut EFK jednakokračan i pravokutan, možemo na njega primijeniti Pitagorin poučak: $|EF|^2 + |FK|^2 = |KE|^2$, ili $a^2 + a^2 = (c - a)^2$, tj. $a^2 = c^2 - 2ac$. Odatle slijedi tražena jednakost (5).

Zadatak za vježbu

Dokaži da u pravilnom osmerokutu $ABCDEFGH$ (Slika 1.) vrijedi jednakost

$$\frac{c}{a} - \frac{2b}{d} = 1.$$

