



Juniorska balkanska matematička olimpijada (JBMO) međunarodno je natjecanje iz matematike u organizaciji MASSE-a (*Mathematical Society of South Eastern Europe*). Trenutno je to najjače natjecanje na kojemu mogu sudjelovati hrvatski osnovnoškolci. Ove je godine 28. JBMO održan od 25. do 30. lipnja u Antaliji, u Turskoj. Godine 2017. JBMO postaje otvoren za sve države (ne samo za članice MASSEE-a), tako da je na njegovu 28. izdanju sudjelovalo 11 država članica i 12 gostujućih ekipa, među kojima je bila i ekipa Republike Hrvatske. U konkurenciji od 135 učenika i učenica naši su natjecatelji ostvarili najbolji rezultat od 2018. godine, tj. od kada Hrvatska sudjeluje na ovom natjecanju. Uz autora ovog teksta, Ena Novak i Filip Šušakčević osvojili su srebrne medalje, dok su Matej Križanić i Ivan Katalenić osvojili brončane. U ekipi je također bio i Max Barbarić.



Iskustvo

Već u zračnoj luci osjetili smo dinamičan ritam grada, a pri izlasku iz nje iznenadile su nas visoke ljetne temperature. No, pravo upoznavanje s ljepotama turske obale započelo je na cestama koje su nas svakodnevno vodile kroz prekrasan krajolik: s jedne strane hoteli i golf-tereni, s druge polja i maslinici, a u daljini planine. Bili smo smješteni u hotelu *Pine Beach Resort*, među borovim šumama uz more, gdje su dani počinjali mirisom soli u zraku, a završavali druženjem na plaži. Svakodnevno smo išli u *Aqua* i *Fun park* u okolici hotela. Nakon natjecanja, naša prva destinacija bila je akvarij u Antaliji, jedan od najvećih akvarija na svijetu. Šetali smo najduljim akvarijskim tunelom na svijetu, dugim čak 131 metar, a iznad nas plivali su morski psi, raže i druge morske životinje. Nakon toga posjetili smo *Bilim Merkezi Science Center* u Antaliji, izvan kojeg se nalaze eksponati osmanske arhitekture, a unutra izložba na kojoj smo prošli kroz repliku unutrašnjosti ISS-a, izložbu planeta Sunčeva sustava, prikaze kako biti energetski učinkovit i još mnogo toga. Jedan od vrhunaca boravka bilo je razgledavanje jahtom iz *Kemer* marine, s koje smo vidjeli prekrasne pejzaže Sredozemnog mora i morske obale dok smo se na jahti zabavljali uz pjesmu i ples. Prije povratka kući program je bio zaokružen svečanošću na *Akdeniz Universityju* gdje je, među studentima i profesorima, održana završna ceremonija.

Natjecanje

Natjecanje je trajalo 4 i pol sata, a sastojalo od 4 zadatka poredanih po težini, po jedan iz područja algebre, kombinatorike, geometrije i teorije brojeva. Svaki zadatak nosio je po 10 bodova, a bodovalo se rješenje i postupak.



U nastavku ćemo riješiti zadatak iz geometrije koji je bio 2. zadatak na natjecanju. Prije nego što *napadnete* zadatak, pogledajte uvod, a dalje slijedi tekst i rješenje zadatka.

Uvod

Onako kako su majstoru potrebni alati prije nego krene na posao, nama je matematičarima, da bismo riješili neki zadatak, potrebno znanje nekih teorema, pojmova i iskustvo u rješavanju. Prije rješavanja zadatka proći ćemo kroz „alate” koji su korisni u rješavanju ne samo ovog, nego i puno drugih zadataka iz geometrije. Pogledajte sljedeće teoreme i pojmove. Svakako pokušajte riješiti zadatke koji dolaze uz njih kako biste se zagrijali za zadatak na kraju.

Tetivni četverokut

Promotrite bilo koje dvije točke u ravнини. Sigurno ste znali da one određuju pravac. Što ako imate tri točke? Te tri točke određuju trokut, a svakom se trokutu može opisati kružnica (*pokušajte to i dokazati*). Promotrite sada bilo koje četiri točke u ravнини. Postoji li uvijek kružnica koja sadrži sve četiri točke? Pronađite primjer kada ne postoji! Ipak, nas zanima samo poseban skup nekih četiriju točaka koje određuju četverokut. Ako svi njegovi vrhovi pripadaju kružnici, kažemo da je taj četverokut **tetivan** (*prisjetite se što su tetive kružnice*). Općenito, za bilo kojih n točaka, ako pripadaju istoj kružnici, kažemo da su **konciklične**. Naravno, mogli bismo ovako nastaviti za bilo kojih n točaka u ravнини, no zasad su nam dovoljne četiri točke. Ovo su jako korisni teoremi o tetivnim četverokutima (*pokušajte ih dokazati, pazite na ekvivalenciju*):

Teorem 1. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je

$$|\angle ADC| + |\angle ABC| = 180^\circ$$

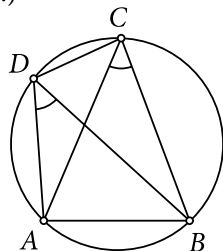
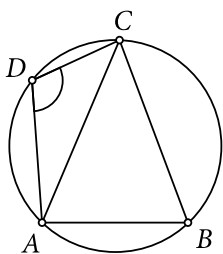
(vrijedi bilo koja analogna varijanta).

(*Upute:* Promotrite središnje kutove pripadajućim obodnim kutovima, a za drugi smjer razmotrite sljedeća dva slučaja: točka D je unutar kružnice, odnosno točka D je izvan kružnice određene točkama A, B i C .)

Teorem 2. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $|\angle ACB| = |\angle ABD|$ (vrijedi bilo koja analogna varijanta).

(*Upute:* Prisjetite se da su obodni kutovi nad istom tetivom jednaki, a drugi smjer, osim ako se ne osjećate jako hrabro, zasad preskočite.)

Kada naučite (ili ponovite) ove teoreme, slijede zadatci kako biste „utvrdili gradivo”:



Zadatak 1. Neka je točka I središte kružnice upisane trokutu $\triangle ABC$ te neka su D i E nožišta okomica iz točke I redom na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

Dokaz: Budući da je točka D nožište okomice iz točke I na stranicu $\overline{BC}$, slijedi da je $|\angle IDC| = 90^\circ$, a budući da je točka E nožište okomice iz točke I na stranicu $\overline{AC}$, slijedi da je $|\angle IEC| = 90^\circ$. Promotrimo četverokut $IECD$. Primijetimo da su kutovi $\angle IDC$ i $\angle IEC$ u tom četverokutu suprotni i da je $|\angle IDC| + |\angle IEC| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Tada prema *teoremu 1*. zaključujemo da je četverokut $IECD$ tetivan.

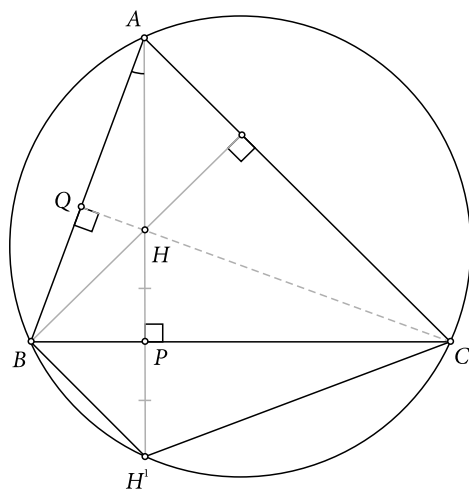
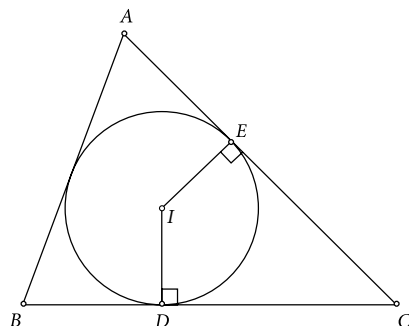
Točke D i E su također dirališta kružnice upisane trokutu $\triangle ABC$ redom sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

Zadatak 2. Neka je H ortocentar trokuta ABC . Dokažite da osnosimetrična na sliku točke H s obzirom na stranicu $\overline{BC}$ pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.

Dokaz: Označimo s H' osnosimetričnu sliku točke H s obzirom na stranicu $\overline{BC}$. Neka je $P = \overline{HH'} \cap \overline{BC}$ i Q nožište okomice iz točke C na stranicu $\overline{AB}$. Promotrimo trokute $\triangle HPC$ i $\triangle H'PC$. Ti trokuti imaju zajedničku stranicu $\overline{PC}$, a s obzirom na to da je H' osnosimetrična slika točke H s obzirom na stranicu $\overline{BC}$, slijedi $|HP| = |PH'|$. Također je $\overline{HH'} \perp \overline{BC}$ pa slijedi $|\angle HPC| = |\angle H'PC|$.

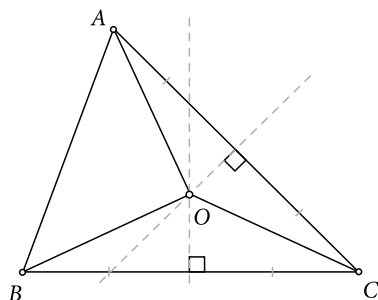
Prema *SKS poučku o sukladnosti* vrijedi $\triangle HPC \cong \triangle H'PC$ pa je $|\angle H'CP| = |\angle HCP|$. Nadalje, vrijedi $|\angle PCH| = |\angle BCQ| = 90^\circ - |\angle QBC| = 90^\circ - |\angle ABC|$. Analogno je $|\angle BAP| = 90^\circ - |\angle ABP| = 90^\circ - |\angle ABC|$. Na kraju, možemo povezati jednakoosti: $|\angle BCH'| = |\angle PCH| = 90^\circ - |\angle ABC| = |\angle BAP| = |\angle BAH'|$.

Dakle, prema *teoremu 2*. četverokut $ABH'C$ je tetivan, a kako je kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ jedinstveno određena točkama A, B i C , slijedi da H' pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.



Fantomiranje

Često nam je u geometriji neke tvrdnje teško dokazati izravno, a u takvim zadacima ova metoda jako je korisna. To je metoda u kojoj uvodite neku novu točku, kružnicu, pravac... Bitno je da za element koji uvodite vrijedi postavljeni uvjet zadatka koji želite dokazati. Nakon toga dokažete da je taj element, najčešće točka, isti kao onaj prethodno definiran u zadatku. *Fantomiranje* ima svoje prednosti i nedostatke, postoje zadatci u kojima jako pomaže, a postoje i oni u kojima ne pomaže. Najbitnije je da ste svjesni onoga što radite i svojih argumenata. Naime, ukoliko iskoristite neki krivi argument, cijeli vaš dokaz nakon toga je kriv. Pokušajte riješiti sljedeće zadatke pomoću *fantomiranja*.

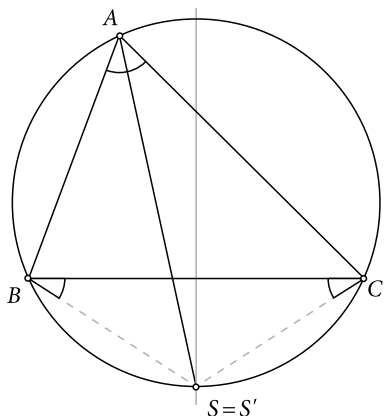


Zadatak 1. Dokažite da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje: Označit ćemo vrhove trokuta s A , B i C . Neka se simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ sijeku u točki O . Dokazat ćemo da O pripada simetrali stranice $\overline{AB}$. Kako O pripada i simetrali stranice $\overline{BC}$, prema poučku o simetrali dužine vrijedi $|OB| = |OC|$. Analogno, vrijedi $|OC| = |OA|$. Povezujući jednakosti imamo $|OB| = |OC| = |OA|$, tj. $|OB| = |OA|$.

Dakle, prema obratu poučka o simetrali dužine, točka O pripada simetrali stranice $\overline{AB}$.

Zadatak 2. Dan je trokut $\triangle ABC$. Neka se simetrala stranice $\overline{BC}$ i simetrala kuta $\angle BAC$ sijeku u točki S . Dokažite da točka S pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.



Rješenje: Definirajmo točku S' kao presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$. Kako točka S' pripada simetrali kuta $\angle BAC$, slijedi $|\angle BAS'| = |\angle CAS'|$. Nadalje, zbog obodnih kutova nad tetivama $\overline{BS'}$ i $\overline{CS'}$, vrijedi redom $|\angle BCS'| = |\angle BAS'|$ i $|\angle CBS'| = |\angle CAS'|$.

Povezujući jednakosti dobivamo

$|\angle BCS'| = |\angle BAS'| = |\angle CAS'| = |\angle CBS'|$, tj. $|\angle BCS'| = |\angle CBS'|$.

Dakle, trokut $\triangle BCS'$ je jednakokrakan, odnosno $|BS'| = |CS'|$, pa prema obratu poučka o simetrali dužine, točka S' pripada simetrali stranice $\overline{BC}$.

U zadatku je zadano da je točka S presjek simetrale stranice $\overline{BC}$ i simetrale kuta $\angle BAC$, a upravo smo pokazali da S' pripada i simetrali stranice $\overline{BC}$ i simetrali kuta $\angle BAC$. Kako je presjek dvaju pravaca jedinstven, slijedi $S \equiv S'$, dakle točka S pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.



Zadatak¹ - JBMO 2024. P2

Neka je $\triangle ABC$ trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Tom trokutu pripisana kružnica nasuprot vrha A dira pravce AB , AC i BC redom u točkama D , E i F , te je točka J njezino središte. Neka je točka P dana na dužini BC . Kružnice opisane trokutima $\triangle BDP$ i $\triangle CEP$ sijeku se drugi put u točki Q . Točka R je nožište okomice točkom A na pravac FJ . Dokažite da su točke P , Q i R kolinearne.

(Pripisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ nasuprot vrha A je kružnica koja dodiruje stranicu BC i produžetke stranica AB i AC .)

Rješenje: Za početak ćemo napraviti nekoliko ključnih opažanja. S obzirom na to da su pravci AD i AE tangente na pripisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ i dodiruju je redom u točkama D i E , slijedi da je $|\angle ADJ| = |\angle AEJ| = 90^\circ$. Dakle, prema obratu Talesova poučka, točke A , D , J i E pripadaju kružnici s promjerom AJ .

Kako je četverokut $BDQP$ tetivan, slijedi

$$|\angle DOP| = 180^\circ - |\angle DBP| = |\angle ABC|.$$

S druge strane, $|\angle JBD| = |\angle JFB| = 90^\circ$, tj. četverokut $BDJF$ je tetivan pa vrijedi $|\angle DJF| = 180^\circ - |\angle DBF| = |\angle ABC|$.

Iz toga dobivamo da je $|\angle DQP| = |\angle DJF|$. Također, kako je četverokut $CEQP$ tetivan, slijedi $|\angle PQE| = 180^\circ - |\angle PCE| = |\angle ACB|$.

Nadalje je $|\angle JFC| = |\angle JEC| = 90^\circ$, tj. četverokut $CEJF$ je tetivan, pa je $|\angle FJE| = 180^\circ - |\angle FCE| = |\angle ACB|$.

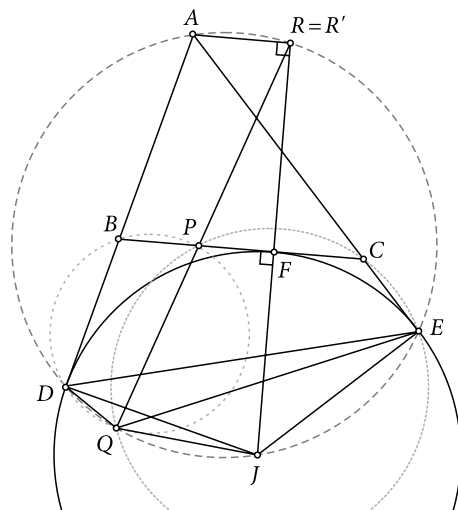
Iz toga dobivamo da je $|\angle PQE| = |\angle FJE|$.

Označimo točku $R' = JF \cap PQ$. Tada je

$$|\angle DQR'| = |\angle DQP| = |\angle DJF| = |\angle DJR'|.$$

Iz toga slijedi da točka D pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle R'JQ$. Potpuno analogno imamo $|\angle EQR'| = |\angle PQE| = |\angle FJE| = |\angle EJR'|$. Dakle, i točka E pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle R'JQ$.

Dakle, točke R' , E , J , Q i D su konciklične. Posebno, točka R' pripada i kružnici opisanoj trokutu $\triangle DEJ$. Na početku smo dokazali da je promjer te kružnice dužina AJ . Primijetimo da je $\angle AR'J$ obodni kut nad promjerom, pa prema Talesovu poučku vrijedi $|\angle AR'J| = 90^\circ$. Dakle točka R' je nožište okomice iz točke A na pravac JF , a s obzirom na to da postoji samo jedno nožište okomice iz točke A na pravac JF , iz uvjeta zadatka zaključujemo da je $R' \equiv R$. Prisjetimo se kako smo definirali točku R' : $R' = JF \cap PQ$ pa je $R' \in PQ$ i $R \in PQ$ tj. točke P , Q i R su kolinearne.



¹Rješenje koje se nalazi ovdje, naravno, nije jedino. Puno je načina i pristupa koji rješavaju ovaj zadatak, no ovdje će vam biti prezentirano rješenje koje objedinjuje sve obrađeno u uvodu.

