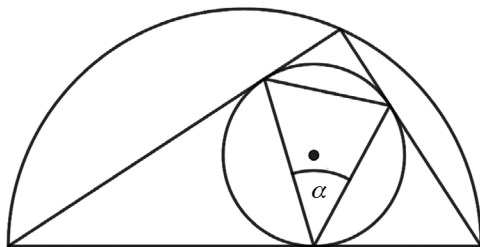


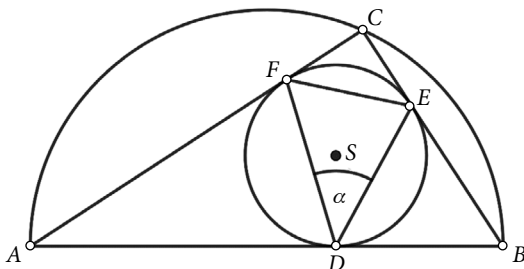
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobar, Zagreb

Primjer 1. Kolika je mjera kuta α ?

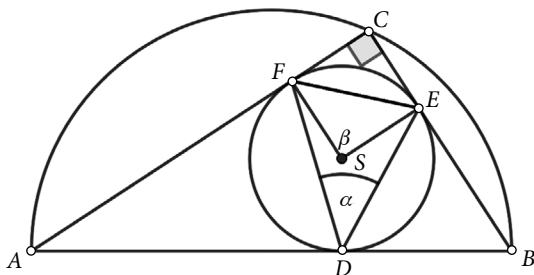


Rješenje: Označimo vrhove trokuta ABC , središte njemu upisane kružnice S i trokuta DEF čiji su vrhovi dirališta upisane kružnice i stranica trokuta ABC .



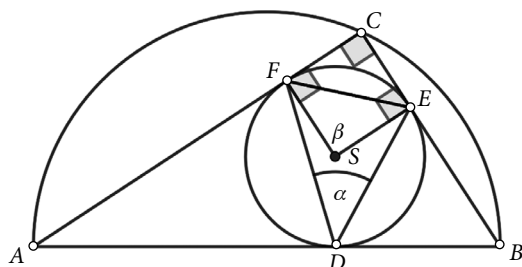
Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom kod vrha C jer je stranica $\overline{AB}$ ujedno i promjer polukružnice (Talesov poučak). Dakle, mjera kuta $\angle ACB$ je 90° .

Spojimo središte S upisane kružnice s točkama E i F te označimo s β mjeru kuta $\angle ESF$.



Kako upisana kružnica dira stranicu $\overline{BC}$ u točki E , dužina $\overline{SE}$ je okomita na $\overline{BC}$, tj. $\angle CES$ je pravi kut. Iz istog je razloga i $\angle SFC$ pravi kut jer je dužina $\overline{SF}$ okomita na stranicu $\overline{AC}$.

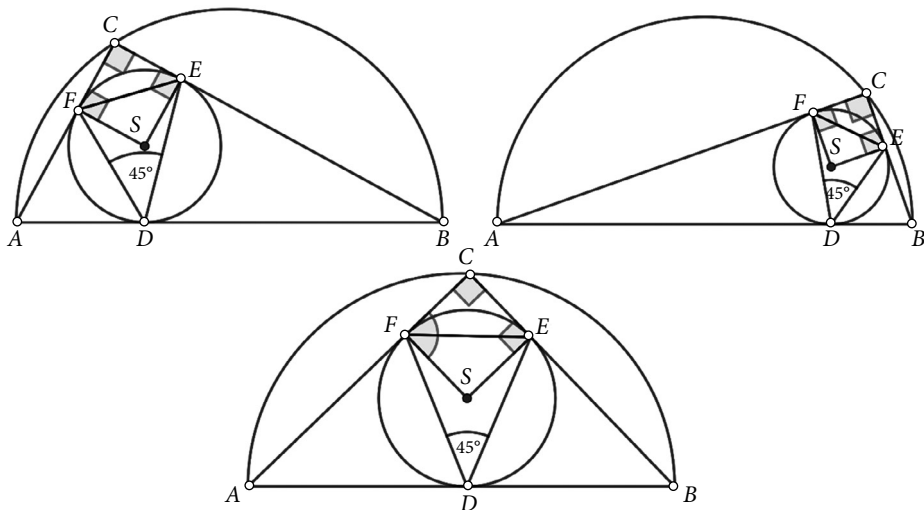




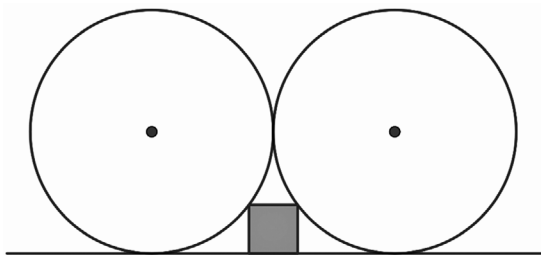
Dakle, četverokut $SECF$ ima tri prava kuta pa je nužno i četvrti $\angle ESF$ pravi kut, tj. $\beta = 90^\circ$.

Kut $\angle EDF$ je obodni kut nad lukom $\widehat{EF}$ koji pripada upisanoj kružnici trokuta ABC , a kut $\angle ESF$ središnji je kut nad istim lukom. Prema poučku o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $\beta = 2\alpha$, tj. $\alpha = 45^\circ$.

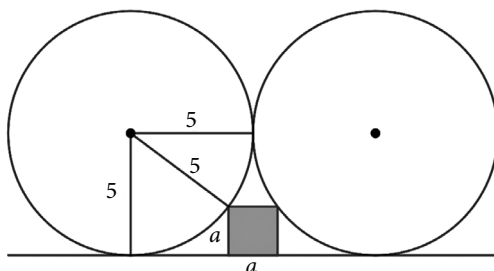
Valja primijetiti da je točka C po volji odabrana na polukružnici, što znači da će kut $\angle EDF$ imati istu mjeru 45° za bilo koji položaj točke C na polukružnici osim u njenim krajnjim točkama. Evo još nekoliko primjera.



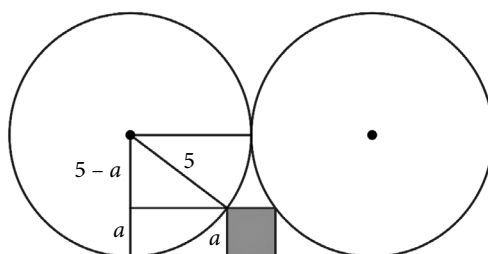
Primjer 2. Kolika je površina kvadrata ako su radijusi kružnica jednaki 5?



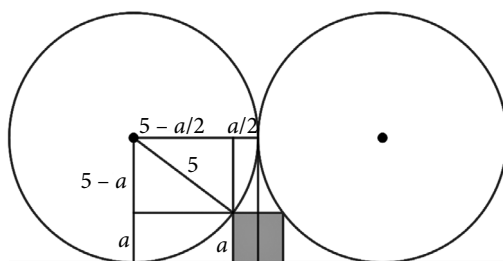
Rješenje: Istaknimo na jednoj kružnici tri polumjera, kako je prikazano na donjoj slici. Duljinu stranice kvadrata označimo s a .



Istaknimo horizontalni pravac (paralelan sa zajedničkom tangentom) koji sadrži gornju stranicu kvadrata. Taj pravac dijeli polumjer okomit na tangentu na dijelove čije su duljine $5 - a$ i a .

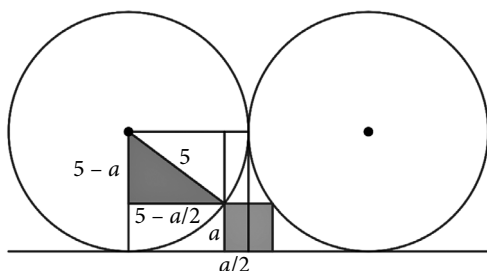


Istaknimo i vertikalni pravac (okomit na zajedničku tangentu) koji sadrži lijevu stranicu kvadrata. Taj pravac dijeli polumjer paralelan s tangentom na dijelove čije su duljine $5 - \frac{a}{2}$ i $\frac{a}{2}$.



Time se na slici dobivaju pravokutni trokuti čije katete imaju duljine $5 - a$ i $5 - \frac{a}{2}$, dok im je hipotenuza jednaka radijusu kružnice 5. Jedan od tih dvaju trokuta istaknut je na sljedećoj slici.





Primjenom Pitagorina poučka na ovaj pravokutni trokut dobivamo

$$(5-a)^2 + \left(5-\frac{a}{2}\right)^2 = 5^2, \text{ izvršimo kvadriranje;}$$

$$25-10a+a^2+25-5a+\frac{a^2}{4}=25, \text{ pojednostavnimo izraz na lijevoj strani jednakosti;}$$

$$\frac{5a^2}{4}-15a+25=0 \left| \cdot \frac{4}{5}, \text{ pomnožimo cijelu jednakost brojem } \frac{4}{5};$$

$$a^2-12a+20=0, \text{ rastavimo član } -12a \text{ tako da se izraz može grupirati i rastaviti na faktore;}$$

$$a^2-2a-10a+20=0,$$

$$a(a-2)-10(a-2)=0,$$

$$(a-10)(a-2)=0.$$

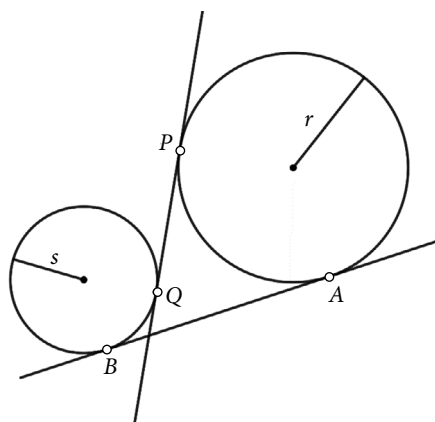
Izraz na lijevoj strani jednakosti može biti 0 samo ako je jedan od faktora $a-10$ ili $a-2$ jednak nuli.

Ako je $a-10=0$, to znači da je $a=10$. Međutim, to bi značilo da je kateta $5-a$ jednaka -5 , a kateta $5-\frac{a}{2}$ jednaka nuli, što je nemoguće.

Dakle, $a-2=0$, tj. $a=2$. U tom slučaju katete istaknutoga trokuta imaju duljine 3 i 4, a hipotenuzu 5, što je Pitagorin trokut.

Na kraju se može izračunati tražena površina kvadrata koja iznosi $P=a^2=4$.

Zadatak 1. Zadane su dvije kružnice radijusa r , odnosno s , te njihove dvije zajedničke tangente. Ako su udaljenosti dirališta $|AB|=16$ i $|PQ|=14$, koliko je $r \cdot s$?



Izvor:

1. <https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos>

