

Od čunjosječnica do dijagonalizacije simetričnog operatora

PETRA PETRINJAK¹ I TOMISLAV ŠIKIĆ²

1. Uvod

U matematičkom obrazovanju postoje vertikale koje se pripadnim međustanicama protežu od osnovnoškolske do visokoškolske razine. Takve su vertikale važne zbog sveobuhvatno zaokruženog konceptualnog znanja učenika koje je preduvjet dugoročnog pamćenja. Naravno, takva konceptualna znanja posebno su dragocjena u obrazovnom procesu mladih ljudi čija će profesija biti na neki način vezana uz matematiku. Spomenimo samo neke od tih vertikala (nazivi navedenih vertikala su neformalni).

Vertikala Trokut:

- Teoremi o sukladnosti trokuta
- Trigonometrija u trokutu
- Poučci o sinusu i kosinusu

Vertikala: Algebarske jednačbe

- Linearna jednačba
- Kvadratna jednačba
- Nepotpuna kubna jednačba
- Teorem o dijeljenju polinoma
- Osnovni teorem algebre

Vertikala: Fourierova analiza

- Vektorski račun na V^2 i V^3
- Vektorski prostor R^2 i R^3
- Ortonormirana baza konačnodimenzijskog unitarnog prostora
- Ortonormirana baza beskonačnodimenzijskog unitarnog prostora
- Razvoj periodične funkcije pomoću harmonika

¹Petra Petrinjak, Osnovna škola Šestine, Zagreb

²Tomislav Šikić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

Naravno, putujući kroz vertikalu svaka međustanica potiče razvoj matematičkih kompetencija i podiže razinu matematičke pismenosti učenika i studenata. No bez cjelovite zaokružene priče o spomenutim vertikalama teško da kao nastavnici možemo biti zadovoljni ishodom učenja koji se temelje isključivo na svladavanju pripadnih rutina. Također, važno je istaknuti da se mnoge vertikale međusobno presijecaju, a neke čak i isprepliću. Tako je na primjer kvadratna funkcija povezana s kvadratnom jednadžbom, ali i s parabolom odnosno s krivuljama drugog reda. Stoga će sljedeća vertikala, kolokvijalno nazvana *konike*, biti detaljnije obrađena o ovom članku. Na odabir te vertikale bitno je utjecala i činjenica da se proteže od viših razreda osnovne škole do visokoškolske razine. Tu vertikalu mogli bismo opisati sljedećim (među) stanicama, uz napomenu da je izostavljena „nulta” stanica koja se odnosi na osnovnoškolsku razinu kada se učenici u nastavi matematike i fizike susreću s pojmom kružnice i parabole.

Vertikala: Konike

- Konike kao presjek ravnine i stošca
- Ravninske krivulje drugog reda
- Jednadžbe ravninskih krivulja drugog reda
- Klasifikacija konika pomoću dijagonalizacije matrice kvadratne forme

Klasifikacija krivulja drugog reda na osnovi kanonskog oblika kvadratne forme trebala bi biti završna priča o ovoj vertikali. Naravno, ta vertikala ima daljnja granaanja (npr. plohe drugog reda), ali o tome neće biti riječi u ovome članku. No, važno je istaknuti da je ova vertikala odabrana jer je ona znatno okrnjena u našem obrazovnom sustavu, i to upravo na prvoj i zadnjoj stanici. Moglo bi se reći da je ta vertikala postala priča bez početka i sretnog završetka pa je time i zaplet (p)ostao nedorečen. Odviše nadobudno bilo bi očekivati da se otvori prostor u satnici i u kurikulumu za vraćanje te priče u svoje prirodne okvire, tim više što ni mnoge druge vertikale, ništa manje bitne, nisu prošle neokrznute. U ovom ćemo članku ponuditi neka od mogućih rješenja kako bismo barem djelomično nadomjestili prvu i zadnju međustanicu spomenute vertikale.

Nakon uvodnog poglavlja, drugo je poglavlje posvećeno početnoj (među)stanici u spomenutoj vertikali. Opisat ćemo konike kao čunosječnice, tj. kao presjeke ravnine i stošca. U tom poglavlju težište će biti na animacijama u *GeoGebri* koje će omogućiti zorni trodimenzionalni prikaz nastajanja kružnice, elipse, hiperbole i parabole te degeneriranih slučajeva.

Treće je poglavlje posvećeno završnoj međustanici. U tom poglavlju na način primjeren studentima tehničkih fakulteta, tj. prilagođen satnici matematičkih kolegija na preddiplomskim studijima spomenutih fakulteta, bit će prezentirana klasifikacija krivulja drugog reda. Naravno, pristup će biti simplificiran kako bi samo s osnovnim znanjima o linearnim operatorima i svojstvenim vrijednostima te svojstvenim

vektorima studenti mogli konceptualno shvatiti klasifikaciju krivulja drugog reda. Kolokvijalno rečeno, bit će prezentirana prečica do klasifikacije krivulja drugog reda bez uvođenja kvadratnih formi i pojma definitnosti. Štoviše, neće biti nužan niti teorem o ortogonalnoj dijagonalizaciji simetrične matrice.

Dodatno istaknimo da sve što će biti iskazano u drugom i trećem poglavlju nije vremenski zahtjevno i može se, barem tako vjerujemo, uklopiti u postojeće satnice, planove i programe nastave matematike.

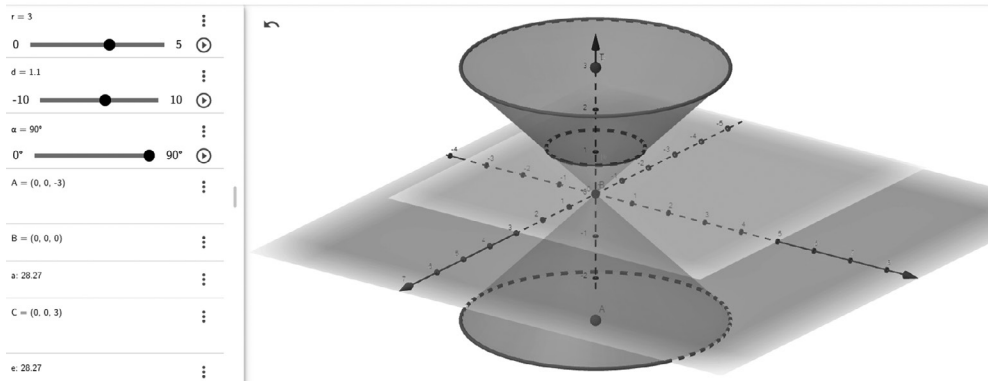
Na kraju napomenimo da se ovaj članak zasniva na diplomskom radu [PP] kojem je u pozadini [K], [PV] i [E] te se u navedenoj literaturi mogu pronaći detaljnije informacije o poveznici konika, krivulja drugog reda, kvadratnih polinoma dviju varijabli te simetričnih kvadratnih formi.

2. Konike kao presjek ravnine i stošca

Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola proučavane su još u staroj Grčkoj. Mehenmo, učenik Platonove akademije, prvi je opisao konike u 4. stoljeću prije Krista. Euklid je također proučavao konike, ali su njegova djela izgubljena. Apolonije iz Perge, najveći grčki matematičar 3. stoljeća prije Krista, u svom djelu „Konike” prikazuje elipsu, hiperbolu i parabolu kao presjeke kružnog stošca. U njih spadaju kružnica, elipsa, hiperbola i parabola, ali i njihove degeneracije: dva realna ukrštena pravca, jedan realni dvostruki pravac i jedna točka koja je zapravo vrh stošca. Više o takozvanom sintetičkom pristupu krivuljama drugog reda kao ravninskih krivulja može se naći npr. u [MKB]. Također, u tom je članku po jedno poglavlje posvećeno konikama definiranim kao čunjosječnicama te Boškovićevu pristupu.

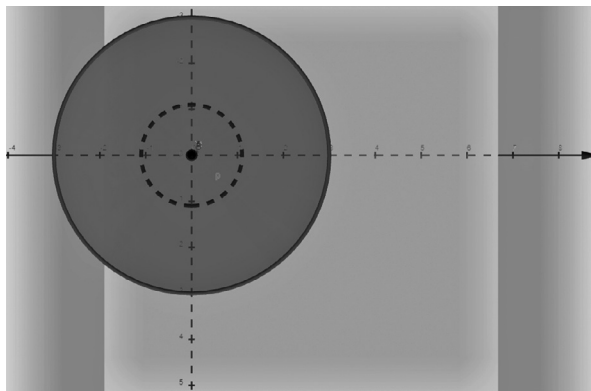
Kao što je uvodno navedeno, ovo poglavlje bit će posvećeno animacijama u *GeoGebri* koje će omogućiti zorni trodimenzionalni prikaz nastajanja kružnice, elipse, hiperbole i parabole te degeneriranih slučajeva. Sve slike koje ćemo prezentirati zapravo su snimke zaslona koje su nastale primjenom spomenutog softverskog paketa *GeoGebra*.

Dvostruki stožac zadat ćemo na sljedeći način. Neka su zadana dva pravca o i s u prostoru koji se sijeku pod kutom φ , gdje $\varphi \in \langle 0, 90^\circ \rangle$ u točki S . Koristit ćemo stupnjeve umjesto radijana jer vjerujemo da je ovakva konstrukcija koja se može vizualizirati prihvatljiva i učenicima viših razreda osnovne škole. Rotiranjem pravca s oko osi o nastaje beskonačna kružna stožasta ploha. Stožastu plohu kraće ćemo zvati dvostruki stožac, a pravac s izvodnica stošca. Na osnovi vizualizacije međuodnosa između dvostrukog stošca i ravnine definirat ćemo sve konike. Na Slici 1. vidimo presjek ravnine koja je okomita na os o dvostrukog stošca i ne prolazi vrhom stošca S . Općenito, kada ravnina ne prolazi vrhom stošca nastaju takozvane *prave (neraspadnute) konike*. Također napomenimo da se na svakoj od slika mogu uočiti tri klizača, a što koji od njih predstavlja i kako utječu na stvaranje krivulja bit će opisano kasnije u ovom poglavlju.



Slika 1. Kružnica kao presjek dvostrukog stošca i ravnine

No ono što je važno istaknuti u ovom trenu jest da *GeoGebra* omogućava sfernu rotaciju slike tako da se gornja slika jednostavnim pokretima miša lako transformira u Sliku 2.



Slika 2.

iz koje je očigledno da je presjek upravo kružnica koji se na Slici 2. vidi iscrtkanom linijom.

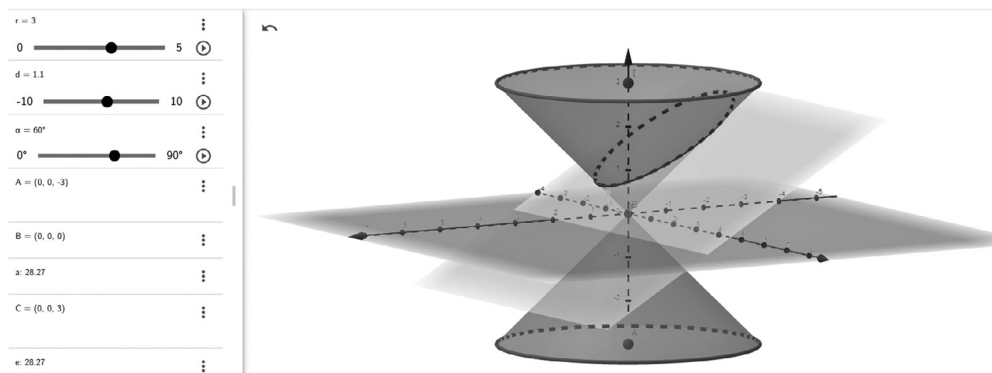
U nastavku teksta nećemo se voditi matematičkom strogošću i koristiti niz Dandelinovih teorema (vidi [PV],[MKBJ]) kako bismo opisali poveznicu između presjeka ravnine i stošca s konikama. Na osnovi kuta $\alpha \in [0, 90^\circ]$ i činjenice sadrži li ravnina ili ne sadrži točku presjeka S , opisat ćemo sve konike. Dakle možemo zapisati: ravnina koja ne prolazi vrhom stošca S siječe taj stožac

1. po kružnici ako je $\alpha = 90^\circ$;
2. po elipsi ako je $\alpha \in \langle \varphi, 90^\circ \rangle$

3. po paraboli ako je $\alpha = \varphi$.
4. po hiperboli ako je $\alpha \in [0, \varphi)$.

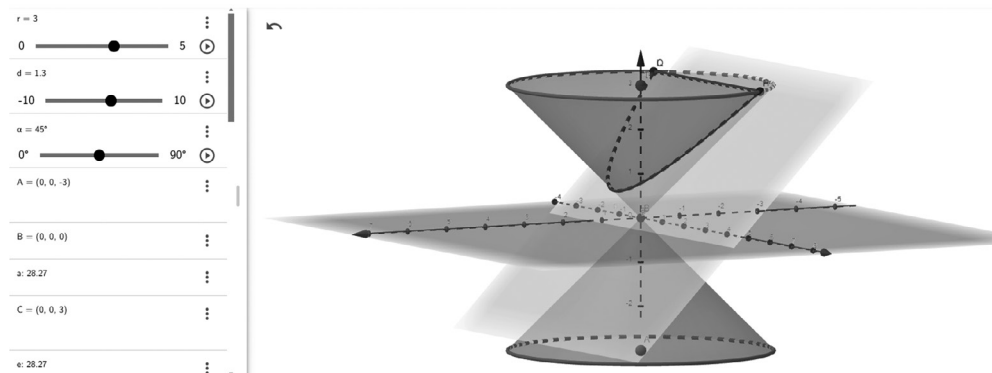
U sljedeće tri slike pokazat ćemo kako se pomoću animacije u *GeoGebri* može vizualizirati presjek ravnine i dvostrukog stošca, te time nastajanje elipse, parabole i hiperbole.

Na Slici 3. kut $\alpha = 60^\circ$, dok je kut $\varphi = 45^\circ$, što je prema gore navedenom slučaj 2, znači da je nastala krivulja elipsa.



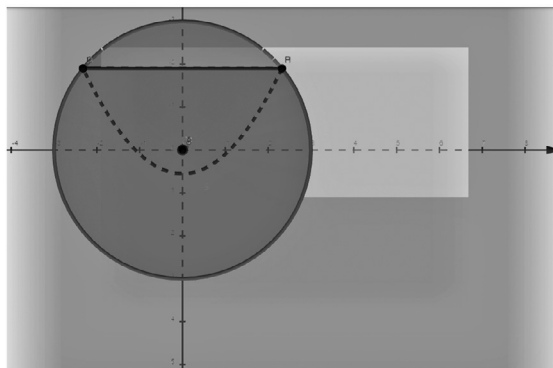
Slika 3. Elipsa kao presjek dvostrukog stošca i ravnine

Na Slici 4. dan je slučaj kad je $\alpha = \varphi = 45^\circ$, tj. kada je ravnina paralelna s jednom njegovom izvodnicom, kao presjek dobivamo parabolu.



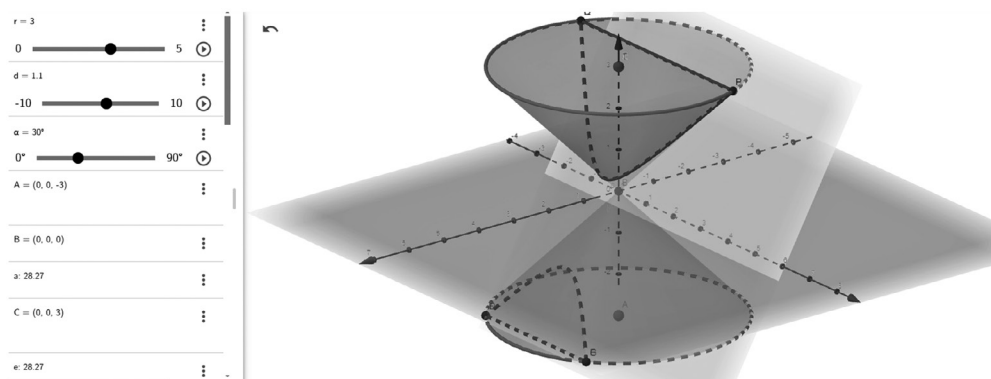
Slika 4. Parabola kao presjek dvostrukog stošca i ravnine

Ako zarotiramo gornju sliku tako da je vidljiv tlocrt, uočavamo parabolu (Slika 5.)



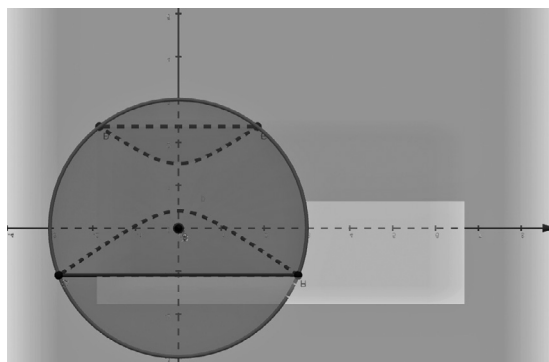
Slika 5.

Na kraju promotrimo slučaj kada je kut $\alpha = 30^\circ$, dok je kut $\varphi = 45^\circ$. Na Slici 6. vidimo kako za navedene parametre presjekom dvostrukog stošca i ravnine nastaje hiperbola.



Slika 6. Hiperbola kao presjek dvostrukog stošca i ravnine

Ponovno, kao i u slučaju kružnice i parabole, u tlocrtu možemo vidjeti dijelove hiperbole (Slika 7.).



Slika 7.

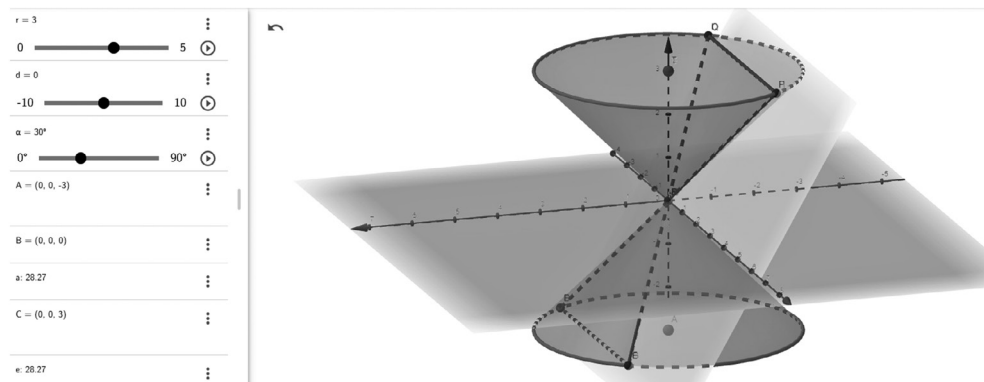
Klizači koje smo mogli vidjeti na slikama omogućuju manipulaciju polumjerom stošca, pomicanje ravnine i određivanje kuta između ravnine i osi stošca. Pomicanje klizača r omogućuje promjenu radijusa stošca, odnosno njegovo širenje duž njegove visine. Ako povučemo klizač prema manjim vrijednostima, stožac će postati uži ili, obratno, pomicanjem klizača prema većim vrijednostima stožac postaje širi. Širenjem stošca može doći do promjena u obliku presjeka ploha.

Klizač d omogućava odmicanje ravnine od ishodišta u smjeru z -osi, mijenjajući njezinu poziciju u 3D sustavu. Pomicanje ravnine u horizontalnim smjerovima kroz osi x ili y može promijeniti oblik presjeka.

Klizač α određuje kut pod kojim ravnina siječe os stožac o i utječe na oblik presjeka jer promjena kuta mijenja način na koji ravnina siječe stožac.

Korištenjem klizača mogu se detaljno istražiti sve moguće vrste presjeka te promijeniti karakteristike tih presjeka. Svaka od ovih manipulacija omogućuje da vizualiziramo geometriju presjeka u 3D prostoru te uočimo uvjete koji vode do različitih tipova krivulja drugog reda. Štoviše, za svaki je klizač omogućena animacija tako da se pojedini klizač pomiče od minimalne prema maksimalnoj vrijednosti intervala koji je zadan. Naravno, simultano s promjenom vrijednosti parametra mijenja se i cijela slika.

Na kraju ovog poglavlja prikazat ćemo samo jedan od mogućih degeneriranih oblika koji nastaju kada ravnina prolazi vrhom stošca S . Kao što je rečeno na početku ovog poglavlja, prolaskom ravnine kroz vrh stošca presjek mogu biti, između ostalog, i dva ukrštena pravca. Odaberimo li klizačima sljedeće vrijednosti parametara $\alpha = 30^\circ$ i $d = 0$, dobivamo Sliku 8.



Slika 8. Dva ukrštena pravca

Posebno je interesantno pokrenuti animaciju klizača d u gore navedenom primjeru. Promatrajući što se događa sa slikom kada vrijednost parametra d teži k 0, može se uočiti kako hiperbola teži prema asimptotama i u trenutku $d = 0$ zapravo hiperbola degenerira u dva ukrštena pravca.

3. Klasifikacija krivulja drugog reda

U uvodu je napomenuto da je na sveučilišnim preddiplomskim studijima koji u svojim programima na prvoj godini imaju kolegij Linearna algebra (ili su ti sadržaji dio kolegija Matematika 1 i Matematika 2) ne stižu završiti poglavlje posvećeno kanonskom obliku kvadratne forme te time i zadnju međustanicu u vertikali Konike (vidi npr. [K], [Č], [E]). Štoviše, često se dogodi da se kolegij završi samo poglavljem posvećenom dijagonalizaciji matričnog prikaza linearnog operatora pomoću baze sastavljene od svojstvenih vektora. Stoga studenti budu uskraćeni za krucijalni dio teorema da se svaka simetrična matrica može dijagonalizirati pomoću pripadne svojstvene ortonormirane baze. Time dodatno ostane neiskorišteno važno svojstvo ortogonalnih matrica, a obično se spominje ranije u kolegiju, da je inverz ortogonalne matrice njoj transponirana. Stoga ćemo u ovom poglavlju predočiti kako se bez uvođenja kvadratnih formi i pojma definitnosti može klasificirati krivulje drugog reda. Takav ogoljeni pristup zapravo postaje poticaj studentima da upišu neki kasniji kolegij posvećen linearnim operatorima nad unitarnim prostorom gdje će čuti više o kvadratnim formama, ortonormiranim bazama te o konačnodimenzijskim vektorskim prostorima općenito. Prije nego predočimo, možemo slobodno reći, prećicu do klasifikacije krivulja drugog reda, navest ćemo koje gradivo je u tom trenu poznato studentima:

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
- Matrica A je ortogonalna ako $A^{-1} = A^T$;
- Binet-Cauchyjevi teoremi $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;
- Matrica prijelaza T iz nove u staru bazu;
- Postupak određivanja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora;
- Postupak dijagonalizacije matrice ako postoje svojstveni vektori koji čine bazu.

U narednom dijelu teksta promatrat ćemo kvadratne polinome, tj. polinome drugog stupnja dviju varijabli

$$p(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c, \quad (1)$$

gdje su $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2$ i c realni brojevi i gdje je barem jedan od koeficijenata a_{11}, a_{12}, a_{22} različit od nule. Iz praktičnih je razloga koeficijent uz monom xy dvostruk.

Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrica drugog reda, $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ vektor-redak i c skalar.

Gore navedeni polinom (1) možemo zapisati u matričnom zapisu

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c. \quad (2)$$

Jednadžbom

$$p(x, y) = 0. \quad (3)$$

zadana je proizvoljna krivulja drugog reda. U srednjoškolskom obrazovanju sve jednadžbe drugog reda bile su zapisane ili u središnjem ili u transliranom obliku. To znači da su svi kvadratni polinomi u dvije varijable bili oblika

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$$

što znači da nisu imali monom xy . U narednom dijelu teksta promatrat ćemo kvadratne polinome i s monomom xy .

Primijetimo da je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ simetrična matrica drugog reda. O kojoj je

krivulji riječ doznat ćemo na osnovi navedene simetrične matrice A , tj. iz njezinog dijagonaliziranog oblika. Važno je istaknuti da za daljnje praćenje ovog postupka nije nužna spoznaja da se svaka simetrična matrica može ortogonalno dijagonalizirati. Dapače, sva tri navedena primjera zadataka o krivuljama drugog reda mogu poslužiti kao uvodni zadatci određivanja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Spomenuti primjeri temelje se na primjerima iz [E] i [AE], ali uz gore navedeni drukčiji način rješavanja gdje su kvadratni polinomi dviju varijabli dani s matričnim zapisom (2). Studenti su se u svom srednjoškolskom obrazovanju sreli s funkcijom $y = \frac{1}{x}$ i vjerojatno su čuli da je graf te funkcije istostrana hiperbola zarotirana za kut $\frac{\pi}{4}$. Budući da je implicitni oblik navedena jednadžba hiperbole, sljedeći

$$xy = 1$$

prvi primjer odnosi se na kvadratni polinom $p(x, y) = 2xy - 1$.

Primjer 1. Zapišite polinom drugog stupnja

$$p(x, y) = 2xy - 1 \quad (4)$$

u obliku matričnog zapisa te odredite o kojoj se krivulji drugog reda radi.

Odgovarajuća matrica je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, te matrični zapis jednadžbe (4) glasi

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 \quad (5)$$

Karakteristična jednadžba matrice A glasi

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

te su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Svojstvene vektore nalazimo rješavajući sustave

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ortonormiranu bazu formiramo tako da svojstvene vektore normiramo, a matrica prijelaza T iz stare (kanonske) baze u novu (ortonormiranu) bazu glasi

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da matrica A ima dvije svojstvene vrijednosti, jasno je da su odgovarajući svojstveni vektori baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ te se matrica A može dijagonalizirati na sljedeći način:

$$T^T A T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D.$$

Oдавде pak slijedi $A = T D T^T$ pa početna matrična jednadžba (5) glasi

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} T D T^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \quad (6)$$

Koristeći matricu prijelaza T možemo zapisati

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

odnosno iz činjenice da je $T^{-1} = T^T$ slijedi

$$T^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Transponirajući gornju jednakost dobivamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T (T^T)^T = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Uvrstivši sad (7) i (8) u (6) dobivamo

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1 \quad (9)$$

tj. dobivamo sljedeću središnju jednadžbu hiperbole u novim koordinatama

$$x'^2 - y'^2 = 1. \quad (10)$$

Promotrimo još dva ogledna primjera, jedan za elipsu i jedan za parabolu. Važno je da postupak bude potpuno identičan. Napomenimo da je tekst *Primjera 2.* i *Primjera 3.* modificiran kako bi se studente dodatno potaknulo na razumijevanje poveznica između pojmova *konika*, *krivulja drugog reda*, *kvadratna jednadžba dviju varijabli*.

Primjer 2. Identificirajte skup točaka ravnine koji je zadan jednadžbom

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0 \quad (11)$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$

Jednadžbu (11) možemo zapisati u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0$$

gdje je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & -56 \end{bmatrix} \quad c = 80.$$

Karakteristična jednadžba matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ glasi

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0,$$

te su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 9$. U ovom trenu već je jasno da se radi o elipsi. No, da bismo dobili i odgovarajuću jednadžbu, trebamo odrediti matricu prelaza T . Svojstveni vektori su sljedeći:

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 9 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

a matrica prijelaza T iz stare baze u novu bazu glasi

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koristeći se formulama (6) do (8) dobivamo matični zapis u novoj bazi

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -32 & -56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 80 = 0,$$

odnosno jednadžbu

$$4x'^2 + 9y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(8x' - 144y') + 80 = 0.$$

Svođenjem na potpuni kvadrat rješavamo problem translacije pa gornja jednadžba poprima translirani oblik elipse

$$4\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

Primjer 2.3. Odredite središnju jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0. \quad (11)$$

Jednadžbu (11) možemo zapisati u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0.$$

Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ima dvije svojstvene vrijednosti, $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$.

Matrica prijelaza T iz stare baze u novu bazu glasi

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći se ponovno formulama (6) do (8), dobivamo matični zapis u novoj bazi

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 3 = 0,$$

Odnosno

$$4y'^2 - \sqrt{2}y' - 3\sqrt{2}x' - 3 = 0.$$

Zapisavši u transliranom obliku imamo

$$2\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 3\sqrt{2}\left(x' + \frac{13}{24}\sqrt{2}\right) = 0.$$

Konačno, pripadna središnja jednadžba parabole glasi

$$2(y'')^2 = 3\sqrt{2}x''.$$

Nakon tri gore navedena ogledna primjera za hiperbolu, elipsu i parabol, važno je napomenuti da smo tip konike mogli odrediti na osnovi svojstvenih vrijednosti

matrice A . U *Primjeru 1*. svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$ suprotnog su predznaka i središnji oblik pripadne hiperbole je

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1 \text{ tj. } x^2 - y^2 = 1.$$

U *Primjeru 2*. svojstvene vrijednosti bile su $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 9$, a središnji oblik elipse bio je

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

U zadnjem *Primjeru 3*. svojstvene vrijednosti bile su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$, stoga središnja jednadžba nema monom x^2 nego samo y^2 te je spomenuta središnja jednadžba jednaka

$$2y^2 = 3\sqrt{2}x.$$

Budući da za dijagonalnu matricu D vrijedi

$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

jasno je da za elipsu i kružnicu vrijedi $\det(D) > 0$, za hiperbolu $\det(D) < 0$, a za parabolu $\det(D) = 0$. Na osnovi Binet-Cauchyjevog teorema znamo da je

$$\det(A) = \det(T \cdot D \cdot T^T) = \det(T) \cdot \det(D) \cdot \det(T^T) = \det(D).$$

Na osnovi činjenice da je $\det(A) = \det(D)$, te uzevši u obzir i degenerirane slučajeve, možemo na sljedeći način opisati klasifikaciju krivulja drugog reda.

Neka je $K \subset \mathbb{R}^2$ skup definiran jednadžbom

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

i neka je $s \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ označena matrica $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Na kraju opišimo (naravno bez dokaza) klasifikaciju konika na sljedeći način:

1° Ako je $\det A > 0$, onda je K elipsa (kružnica) ili skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup.

2° Ako je $\det A < 0$, onda je K hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku.

3° Ako je $\det A = 0$, onda je K parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.

Bibliografija

1. [AE] Aglič Aljinović, A; Elezović, N. 2006. *Zbrika zadataka Linearna algebra*. Element. Zagreb
2. [E] Elezović, N. 2001. *Linearna algebra (Primijenjena matematika)*. Element. Zagreb.
3. [Č] Čaklović, L. 1992. *Zbirka zadataka iz Linearne algebre*. Školska knjiga. Zagreb.
4. [K] Kurepa, S. 1982. *Uvod u linearnu algebru*. Školska knjiga. Zagreb.
5. [MKBJ] Mirošević, I.; Koceić-Bilan, N.; Jurko, J. 2019. *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*. HMD-math.e. Zagreb.
6. [PP] Petrinjak, P. 2019. *Kvadratne forme i krivulje drugog reda*. Diplomski rad. PMF-MO.
7. [PV] Pavković, B.; Veljan, D. 1995. *Elementarna matematika 2*. Školska knjiga. Zagreb.