

Nikomahov teorem

JELENA BEKAVAC KRČADINAC¹ I VEDRAN KRČADINAC²

Ljubitelji numerologije razveselit će da je redni broj ove kalendarske godine jednak kvadratu zbroja prvih devet prirodnih brojeva. Štoviše, jednak je i zbroju njihovih kubova:

$$2025 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

Jednakost je specijalni slučaj identiteta poznatog kao Nikomahov teorem:

Teorem 1. $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorem je nazvan po starogrčkom matematičaru i filozofu Nikomahu iz Gerasa (oko 60.-120. godine) [6]. Nikomah je u djelu *Uvod u aritmetiku* primijetio da, ako napišemo redom neparne prirodne brojeve, prvi je broj 1^3 , zbroj iduća dva broja je 2^3 , zbroj iduća tri broja je 3^3 i tako dalje:

$$\underbrace{1}_{1^3}, \underbrace{3, 5}_{2^3}, \underbrace{7, 9, 11}_{3^3}, \underbrace{13, 15, 17, 19}_{4^3}, \dots \quad (1)$$

Nazovimo ovu opservaciju *Nikomahovom lemom*. Malo kasnije pokazat ćemo kako iz nje slijedi teorem 1. Najprije dokažimo druga dva poznata identiteta.

Lema 2. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva najlakše je dokazati Gausovim trikom. Označimo sumu na lijevoj strani S_n i zbrojimo odgovarajuće članove dvije takve sume zapisane u rastućem i u padajućem redoslijedu:

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\ + & S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Na desnoj strani imamo n pribrojnika $n+1$, pa je $2S_n = n(n+1)$, tj. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. $\square$

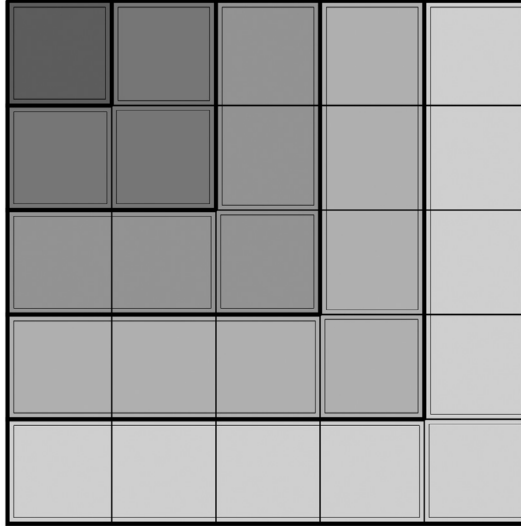
Lema 3. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Formulu za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva također možemo dokazati Gausovim trikom. Umjesto toga, na Slici 1. prikazan je vizualni dokaz.

¹Jelena Bekavac Krčadinac, OŠ Čučerje, Zagreb

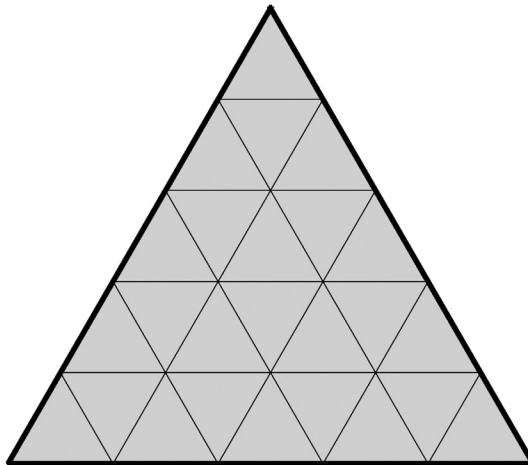
²Vedran Krčadinac, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

Slika se odnosi na slučaj $n = 5$, ali u njoj je sadržana ideja dokaza matematičkom indukcijom. Vidimo da kvadrat sa stranicom duljine n možemo proširiti do kvadrata sa stranicom duljine $n + 1$ dodavanjem dvaju pravokutnika dimenzija $1 \times n$ i $n \times 1$ te kvadrata 1×1 , tj. dodavanjem idućeg pribrojnika $2n + 1$. $\square$



Slika 1. Dokaz Leme 3 za $n = 5$.

Prema Nikomahovoj lemi (1), zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva jednak je zbroju prvih $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ neparnih prirodnih brojeva. Prema Lemi 3 to je upravo kvadrat toga broja, tj. $(1 + 2 + \dots + n)^2$. Time smo dokazali Teorem 1, no kako dokazati Nikomahovu lemu? Prezentirat ćemo vizualni dokaz.



Slika 2. Podjela jednakostraničnog trokuta za $n = 5$

Na Slici 2. prikazan je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $n = 5$ podijeljen na trokutiće s jediničnim stranicama. U najvišem retku jedan je trokutić, u retku ispod su tri trokutića, u idućem retku pet trokutića i tako dalje. Prema Lemi 3, ukupan broj trokutića je n^2 . Iz ove slike i formule za površinu jednakostraničnog trokuta $P = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$ dobivamo još jedan, geometrijski dokaz Leme 3!

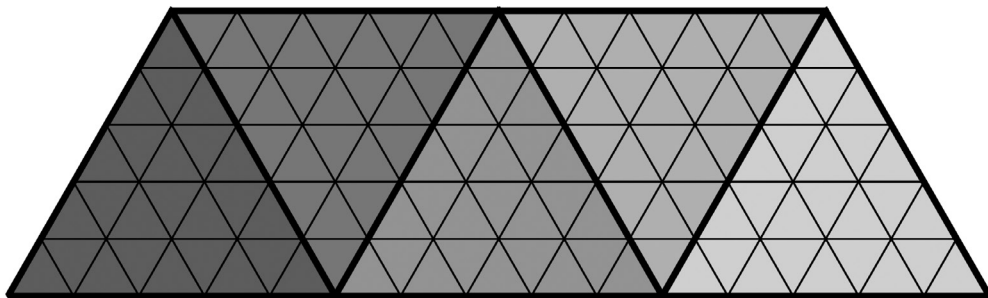
Za dokaz Nikomahove leme uzmimo n podijeljenih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine n i složimo ih kao na Slici 3. Ukupan broj jediničnih trokutića tada je $n \cdot n^2 = n^3$. S druge strane, prebrojimo koliko je trokutića u pojedinim retcima. Za neparni n imamo $\frac{n+1}{2}$ velikih trokuta okrenutih vrhom prema gore i $\frac{n-1}{2}$ velikih trokuta okrenutih stranicom prema gore. Stoga u najvišem retku imamo

$$\frac{n+1}{2} \cdot 1 + \frac{n-1}{2} \cdot (2n-1) = n^2 - n + 1$$

trokutića. Isti broj dobivamo kao prvi član n -te zgrade u (1). To je N -ti neparni broj za

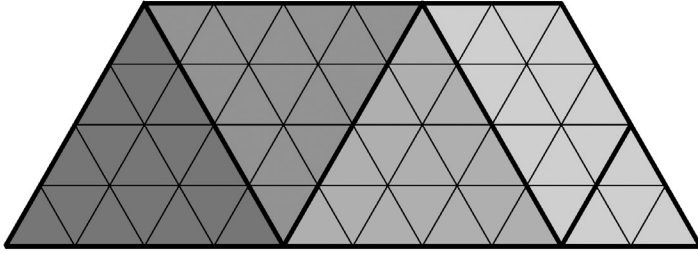
$$N = 1 + 2 + \dots + (n-1) + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$$

(koristimo Lemu 2). Uvrštavanjem toga izraza u $2N - 1$ i sređivanjem dobivamo također $n^2 - n + 1$. Svaki idući redak ima dva trokutića više, pa je ukupan broj trokutića na Slici 3. jednak zbroju svih brojeva iz n -te zgrade u (1). Tako dobivamo tvrdnju Nikomahove leme za neparni n .

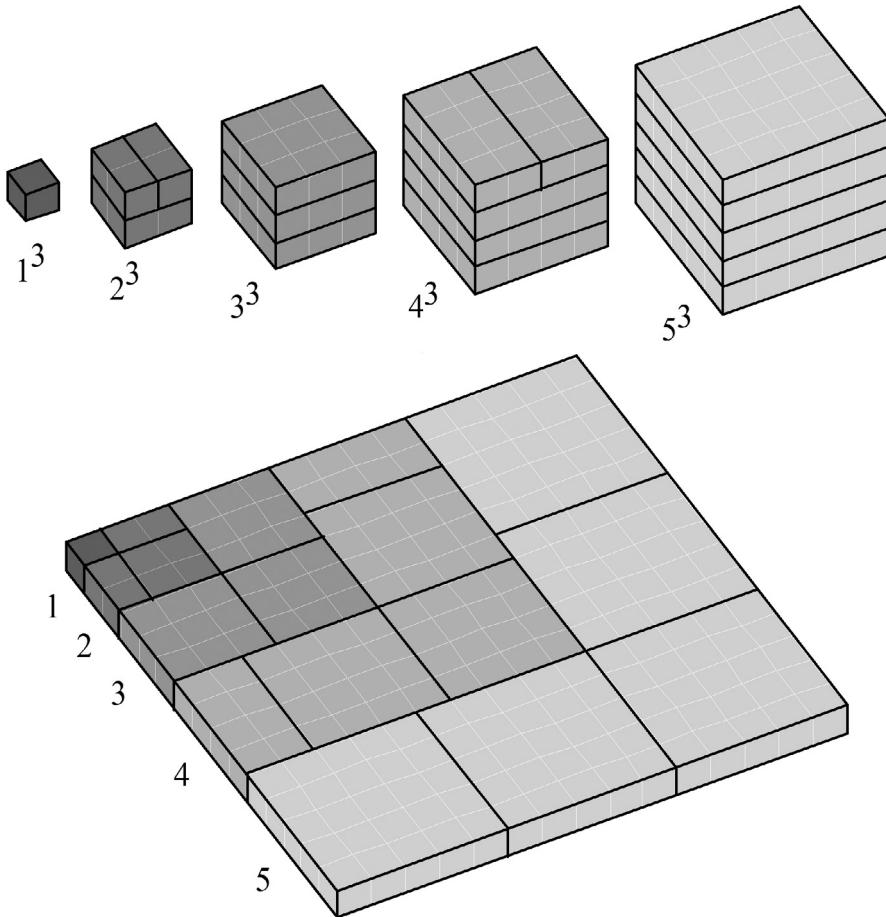


Slika 3. Dokaz Nikomahove leme za $n = 5$

Za parni n treba modificirati dokaz kao na Slici 4. Zadnji trokut okrenut je stranicom prema gore, pa ga transformiramo u paralelogram premještanjem gornjeg desnog kuta sa stranicom duljine $\frac{n}{2}$. Prebrojavanjem trokutića u pojedinim retcima dolazimo do istog zaključka.

Slika 4. Dokaz Nikomahove leme za $n = 4$

U članku na Wikipediji [7] dan je još jedan vizualni dokaz Nikomahova teorema, sličan dokazu Leme 3 (Slika 5.). Promotrimo kocke sa stranicama duljina $1, 2, \dots, n$ podijeljene na jedinične kockice. Ukupan broj kockica odgovara zbroju kubova na desnoj strani Teorema 1. Kocke možemo podijeliti na horizontalne slojeve i presložiti

Slika 5. Dokaz Teorema 1 za $n = 5$

ih u kvadrat sa stranicom duljine $1 + 2 + \dots + n$. Pritom za kocke s parnim stranicama jedan od slojeva dijelimo na pola. Animacije ovih dvaju dokaza pogledajte na YouTubeu [3]. U knjizi [4] na str. 84 - 89 nalaze se i drugi vizualni dokazi Nikomahova teorema.

Ideju vizualnog dokaza na Slici 5. možemo formalizirati kao dokaz matematičkom indukcijom. U članku [1] dana su dva kombinatorna dokaza Nikomahova teorema. Njihova je ideja interpretirati lijevu i desnu stranu kao broj elemenata konačnih skupova i uspostaviti bijekciju između tih skupova. Na primjer, desna strana u Lemi 2 binomni je koeficijent $\binom{n+1}{2}$. Njegov kvadrat možemo interpretirati kao broj uređenih četvorki (x_1, x_2, x_3, x_4) cijelih brojeva koji zadovoljavaju $0 \leq x_1 < x_2 \leq n$ i $0 \leq x_3 < x_4 \leq n$. Autori članka [1] sugeriraju i kombinatorni dokaz formule za sumu kvadrata prirodnih brojeva:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{4} \binom{2n+2}{3}.$$

Povijesno, potreba za računanjem zbroja p -tih potencija prirodnih brojeva $1^p + 2^p + \dots + n^p$ pojavljivala se pri određivanju površina i volumena nekih geometrijskih likova i tijela [5]. Opću formulu naslutio je Jakob Bernoulli:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} B_i n^{p+1-i}.$$

Ovdje su $(B_i)_{i=0}^\infty = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \dots)$ takozvani Bernoullijevi brojevi, koji se pojavljuju u matematičkoj analizi i u kombinatorici. Jedna od metoda za izvođenje ovakvih formula je diferencijski račun. To je diskretna verzija diferencijalnog i integralnog računa u kojoj sume računamo na analogni način kao integrale. Popularizirali su je Donald Knuth i koautori u cjelini 2.6 knjige *Concrete mathematics* [2].

Literatura:

[1] A. T. Benjamin, M. E. Orrison, *Two quick combinatorial proofs of $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$* ,

The College Mathematics Journal 33 (2002), No. 5, 406-408.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics, 2nd edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

- [3] Mathematical Visual Proofs, *A new year 2025 math fact*, siječanj 2025.
<https://www.youtube.com/watch?v=ZWLkIW4NsQ0>
- [4] R. B. Nelsen, *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, Mathematical Association of America, 1993.
- [5] D. J. Pengelley, *The bridge between the continuous and the discrete via original sources*, u *Study the masters: The Abel-Fauvel conference* (uredinici O. B. Bekken i R. Mosvold), National Center for Mathematics Education, University of Gothenburg, 2003.
- [6] Wikipedia, *Nicomachus*, siječanj 2025.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Nicomachus>
- [7] Wikipedia, *Squared triangular number*, siječanj 2025.
https://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number