

Modeliranje i rješavanje problema – popločavanje ravnine

SANJA JANEŠ¹

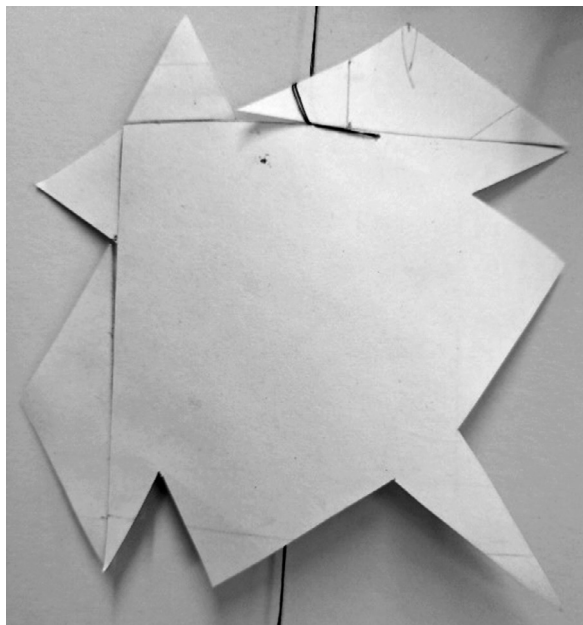
Modeliranje rješenja problema onaj je dio koji matematiku spaja sa svakodnevicom, a rješenje problemske situacije koja proizlazi iz toga procesa može učenicima „pokazati” zašto je važno, dobro, lijepo, ... znati matematičke koncepte. Onaj tko dobro poznaje matematiku, prepoznat će mogućnosti matematičkog modeliranja rješenja problema iz okruženja, postaviti problem te ga matematičkim alatima i matematičkim razmišljanjem riješiti. Kad se govori o svakodnevicu, zapravo se misli na okruženje osobe koja se bavi modeliranjem jer okruženje ne mora biti za svaku osobu isto, pa ni proizašle problemske situacije.

Problemska situacija koja će biti opisana nastala je za vrijeme pripreme za nastavu, smišljanja projektnog zadatka vezanog uz obilježavanje i modeliranje Valentinova. Pripremanje za nastavu najčešće je trenutak kada mi sami kao učitelji kreativno stvaramo problemske situacije. Radeći sa svojim učenicima i ostvarujući ishode kurikuluma kroz osmišljene aktivnosti najbolje možemo odrediti što je primjereno i koliko je primjenjivo.

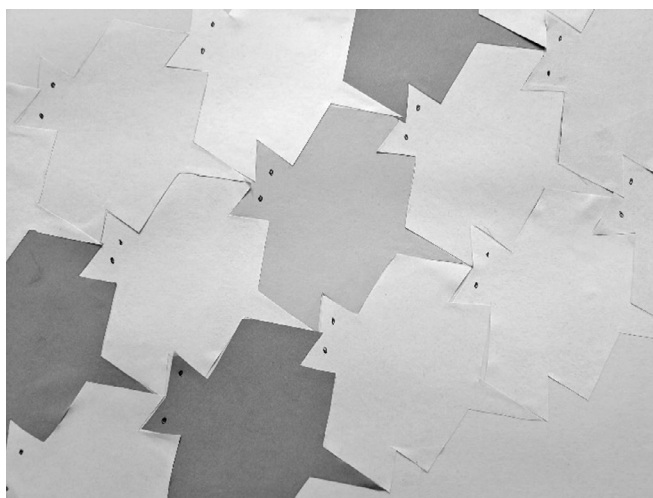
Aktivnost je zamišljena kao projektni zadatak kreiranja slike dobivene translacijom konstruiranog modela srca. Planirani je ishod popločena ravnina. Uobičajeno je kreirati i realizirati aktivnosti vezane uz popločavanje ravnine koje su vezane uz pravilne mnogokute, istovrsne (jednakostranični trokuti, kvadrati i pravilni šesterokuti) ili njihovom kombinacijom (na primjer pravilni četverokut i pravilni osmerokut, pravilni peterokut i pravilni šesterokut ...). Ovo je popločavanje drugačije jer je u pitanju nepravilni lik koji ima zaobljene rubove.

Digresija: U ovom slučaju ideja je proizašla iz prethodnih iskustava i modelirana je da bude prigodna. Također, ništa manje nije važno da su učenici već radili slične projektne zadatke koji im, iako nisu bili na tako visokoj razini, daju predodžbu o tome što se od njih očekuje. Kreacija na Slici 2. nastala je translacijom figure na Slici 1.

¹Sanja Janeš, OŠ „Petar Zrinski” Čabar



Slika 1. Motiv kreiran translacijom dijelova kvadrata za zadani vektor



Slika 2. Popločena ravnina nepravilnim nekonveksnim mnogokutima dobivena translacijom motiva sa Slike 1. za zadani vektor

Ako bi bili u pitanju učenici srednje škole, s njima bi se mogao provesti cjelokupni proces modeliranja, od ideje do realizacije, što je u ovom slučaju (jer riječ je o osnovnoškolskom uzrastu) djelomično, idejno, napravio učitelj, iako bi se i s osnovnoškolskim uzrastom mogla provesti rasprava o tome kakav bi model, koje pripremi učitelj, mogao njima biti najprihvatljiviji.

Projektni zadatak Translacija srca

Ishodi koji se ostvaruju kroz planiranu aktivnost nisu isključivo vezani uz translaciju za zadani vektor:

Ishodi aktivnosti su visoke razine procesa i znanja, što i karakterizira rješavanje problema, te se može vrednovati kao element vrednovanja *Rješavanje problema*:

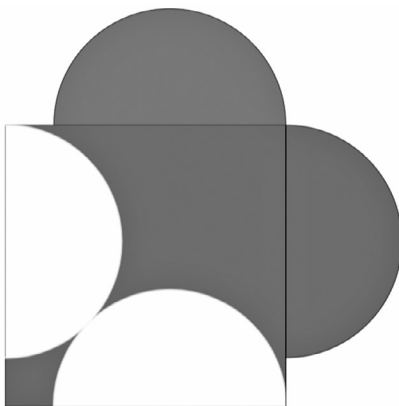
Učenik:

- analizira skicu motiva
- primjenjuje svojstva kvadrata
- primjenjuje Talesov poučak na pramenu pravaca
- primjenjuje Pitagorin poučak
- pojednostavljuje algebarski izraz
- kreira omjer određen odrednicama skice
- konstruira dužine u omjeru
- konstruira zadani motiv
- translata motiv za zadani vektor
- popločava ravninu nepravilnim oblikom

Način realizacije: digitalno (u nekom alatu dinamične geometrije) ili analogno (papir, olovka, šestar, ravnalo, škare, ljepilo, ...).

Vrijeme realizacije: Učitelj samostalno planira.

Problem: Kako konstruirati figuru na slici? Figura je upisana u kvadrat, a sukladne se polukružnice dodiruju. Kako tim motivom popločati ravninu?



Slika 3. Motiv za translaciju i popločavanje ravnine

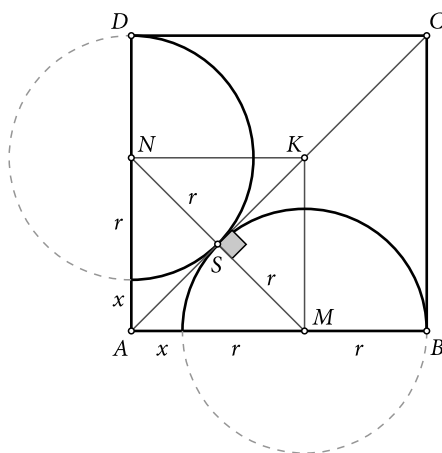
Tijek rada:

1. Izrada modela srca za popločavanje ravnine translacijom
 - 1.1. Algebarski izvod ovisnosti duljine stranice kvadrata o polumjeru kružnica koje se dodiruju.
 - 1.2. Konstrukcija stranice kvadrata $ABCD$ ovisne o parametrima (r, x) , gdje je x razlika duljine stranice kvadrata i promjera r , $x = a - 2r$.
 - 1.3. Translacija polukružnica za vektore $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DC}$.
2. Izrada translirane slike, popločavanje ravnine, digitalno i analogno.

Opis tijeka rada na projektu po koracima

1.1. Algebarski izvod ovisnosti duljine stranice kvadrata o polumjeru kružnica koje se dodiruju.

Na Slici 4. prikazana je skica za algebarski izvod koji opisujemo u nastavku.



Slika 4. Skica za algebarski izvod zakonitosti konstrukcije motiva

Trokut $\triangle AMN$ jednakokrčan je i pravokutan jer je $|AM| = |AN| = r + x$, gdje je r duljina polumjera polukružnice. Trokut $\triangle AMN$ je pola kvadrata $AMKN$ kojemu je dužina $\overline{MN}$ dijagonala. Trokuti $\triangle AMN$ i $\triangle ABC$ su slični jer su jednakokrčni i pravokutni.

Promotrimo dijagonale kvadrata $ABCD$ i $AMKN$. Kako je $\overline{AM} \subset \overline{AB}$, kvadrat $AMKN$ upisan je u kvadrat $ABCD$ i imaju zajednički vrh u A . Dijagonala $\overline{MN}$ kvadrata $AMKN$ okomita je na dijagonalu $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$. Dijagonala $\overline{AC}$ pripada za-

jedničkoj tangenti kružnica $k(M, r)$ i $k(N, r)$. Iz $\overline{MN} \cap \overline{AC} = k(M, r) \cap k(N, r) = S$ slijedi da je točka S diralište kružnica. Polumjeri su okomiti na tangentu u točki dirališta S te slijedi da je $|MN| = 2r$.

Dakle vrijedi:

$$\begin{aligned}(x + r)\sqrt{2} &= 2r \\ x\sqrt{2} + r\sqrt{2} &= 2r \\ x\sqrt{2} &= 2r - r\sqrt{2},\end{aligned}$$

odakle dijeljenjem s $\sqrt{2}$ dobivamo

$$x = \frac{2r}{\sqrt{2}} - r.$$

Racionalizacijom nazivnika dobivamo

$$x = r\sqrt{2} - r = r(\sqrt{2} - 1).$$

Dijeljenjem s r dobivamo

$$\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1},$$

što zapisujemo i u obliku

$$r : x = 1 : (\sqrt{2} - 1).$$

Nakon supstitucije $x = a - 2r$, dobivamo kako duljina stranice kvadrata ovisi o polumjeru kružnica koje se dodiruju.

$$r : (a - 2r) = 1 : (\sqrt{2} - 1).$$

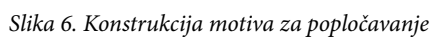
1.2. Konstrukcija stranice kvadrata ovisne o parametrima (r , x) primjenom Talesova poučka na pramenu pravaca.

Odabere se dužina $\overline{EZ}$, $|EZ| = 1$ kako bismo konstruirali duljinu dužine $\sqrt{2}$, te nakon toga $\sqrt{2} - 1$. Na polupravcu ET odaberemo duljinu polumjera $r = |EG|$. Primjenom Talesova poučka, povlačenjem paralele dobije se odsječak duljine $x = a - 2r$. Dobiveni su svi elementi potrebni za konstrukciju motiva (Slika 5.).



1.3. Translacije polukružnica za vektore $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DC}$

Prikaz translacija polukružnica za vektore $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DC}$ potrebnih za popločavanje prikazan je na Slici 6.

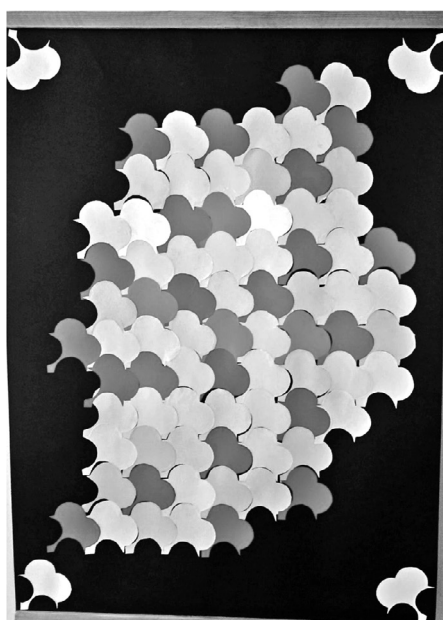


2. Izrada translahirane slike pomoću modela za iste vektore: $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DC}$

Na Slikama 7. i 8. prikazane su digitalne i analogne izvedbe popločavanja.



Slika 7. Dio ravnine popločan motivom za zadane vektore u digitalnoj izvedbi



Slika 8. Dio ravnine popločan motivom za zadane vektore u analognoj izvedbi

Umjesto zaključka

Mi matematičari sa zaljubljenošću pričamo o ljepoti matematike i čini nam se da je samo mi vidimo, bez obzira na to je li u pitanju algebra ili geometrija. Naš je zadatak da tu ljepotu prostremo pred naše učenike. U ovom zadatku jednako je važna i algebra i geometrija. Posebno bih istaknula konstrukcije koje su često potpuno zanemarene u poučavanju matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Možemo se žaliti da su učenicke sposobnosti, što se tiče fine motorike, slabe, no one se neće popraviti ako se izbjegava vježbanje te fine motorike, a konstrukcije su dio toga. Ja uvijek čuvam sve učenicke konstrukcije (i sve ostale uratke) od 5. do 8. razreda, a na kraju osnovnoškolskog obrazovanja napravimo izložbu radova kako bi učenici sami uvidjeli koliko su napredovali i naučili vlastitim radom i trudom, što je svakako najbolja motivacija za daljnje učenje matematike.