

Računanje s rimskim brojevima

ALEKSANDAR HATZIVELKOS¹

1. Uvod

Rimski se brojevi u nastavi matematike pojavljuju već u drugom razredu osnovne škole, kada djeca uče kako pisati i čitati rimske brojke do dvanaest.² Kasnije se rimski brojevi spominju nekoliko puta, najčešće vezano uz zapis godina, no niti u jednom trenutku tijekom obrazovanja rimskim brojevima nije posvećena sustavna pažnja, čak ni na razini osnovnih operacija. Kako rimski brojevi u povijesti matematike predstavljaju svojevrsnu kočnicu razvoju (vidi [9]), uvriježilo se mišljenje kako je i provođenje osnovnih aritmetičkih operacija s rimskim brojevima teško i komplicirano. No istina je posve suprotna: osnovne operacije poput zbrajanja i oduzimanja vrlo su jednostavne, štoviše, zahtijevaju manju razinu predznanja od istih operacija u indoarapskom brojevnom sustavu. Vjerojatno je i to jedan od razloga zbog kojeg je indoarapskim brojevima trebalo neobično dugo (gotovo pet stotina godina) da zamijene rimske brojeve (vidi [1]).

Ovim člankom željeli smo posvetiti pozornost algoritmima koje je moguće koristiti za računanje s rimskim brojevima, kako bismo barem jedinim dijelom nadoknadili izostanak tih tema u matematičkom obrazovnom sustavu u Hrvatskoj. Vjerujemo kako posebnu zanimljivost tome „zaboravljenom znanju” daje i činjenica da se baš neki od tih starih algoritama, poput algoritma za množenje, koriste i u suvremenom računarstvu.

2. Rimski brojevni sustav

Svi smo u dobroj mjeri upoznati s načinom zapisivanja rimskih brojki: on koristi oznake I (za jedan), V (za pet), X (za deset), L (za pedeset), C (za sto), D (za pet stotina) i M (za tisuću). Istaknimo da se u početku za pisanje brojki koristila samo inačica u kojoj se vrijednost broja dobiva isključivo zbrajanjem vrijednosti tih simbola, pa se recimo broj četiri pisao IIII, a ne IV, gdje se vrijednost (manjeg) lijevog simbola (jedan) oduzima od vrijednosti (većeg) desnog simbola (pet). Štoviše, upravo se ta aditivna varijanta (IIII) koristila u samom procesu računanja i kasnije kada je uvedena „pokrata” zapisa (IV), i to prvenstveno u aristokratskim, odnosno više obrazovanim krugovima. Stoga ćemo se aditivnog zapisa držati i u ovome tekstu.

¹Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica

²Prvo upoznavanje s rimskim brojevima samo do broja dvanaest provodi se zbog učestale upotrebe rimskih brojeva na satovima.

Pri tome postoje pravila zapisa, svojevrsna sintaksa: simboli I, X i C mogu se ponavljati najviše četiri puta, dok se simboli V, L i D ne smiju ponavljati, odnosno piše ih se samo jednom.

Takav je način zapisivanja brojeva značajno jednostavniji od indoarapskog, tj. zahtijeva daleko manje učenja i apstraktnog razmišljanja: simbol X uvijek predstavlja vrijednost deset, za razliku od znamenke (simbola) 1 koja može značiti jedan, deset, sto, tisuću, i tako dalje, ovisno o poziciji na kojoj se nalazi. Očigledno je da indoarapski zapis zahtijeva višu razinu apstrakcije, što je važan faktor ako je većina korisnika slabo ili nikako obrazovana.

2.1. Zbrajanje i oduzimanje u rimskom brojevnom sustavu

Zbrajanje se kod rimskih brojeva provodi konkatencijom, odnosno lijepljenjem. Na primjer, ako želimo zbrojiti brojeve XVI (16) i XXVIII (28), brojeve jednostavno:

- zapišemo zajedno (XVIXXVIII);
- znamenke poredamo od najveće prema najmanjoj (XXXVVIII);
- provedemo jednostavno zbrajanje osnovnih znamenaka (VV je jednako X, pa je rješenje broj XXXXVIII).³

Iako se zbrajanje provodi kroz konkatenciju, očigledno je potrebno poznavati dodatna pravila za zbrajanje znamenaka. No tih je pravila malo, svega šest (IIII = V, VV = X, XXXX = L, LL = C, CCCC = D i DD = M).

S druge strane, kod zbrajanja u indoarapskom brojevnom sustavu koristimo višu razinu apstrakcije (značenje pozicije na kojoj se nalazi znamenka, te prenošenje vrijednosti s jedne pozicije na drugu) pa moramo pamtit i značajno veći broj interakcija znamenaka, točnije njih $\binom{10}{2} = 45$.

Oduzimanje se kod rimskih brojeva provodi poništavanjem istih znamenaka u umanjeniku i umanjitelju. Primjerice, ako oduzimamo brojeve XXII (22) i VIII (8), postupak provodimo tako da:⁴

- uklonimo iste znamenke (XXII – VIII = XX – VI);
- znamenku umanjenika napišemo pomoću manjih znamenaka, npr. X kao VIIII (XX – VI = XVIIII – VI), te se vratimo na korak (a).

³U kasnijim razdobljima na kraju bi još zapisali pokrate XL (za XXXX) i IV (za IIII), no ta dodatna razina komplikacije zapisa nije originalno postojala u rimskom brojevnom sustavu. Napomenimo kako je jedan od razloga za uvođenje takve pokrate bila činjenica da su pojedini brojevi imali dugačke klasične zapise. Na primjer, broj 999 u klasičnom zapisu glasi DCCCCLXXXVIII, dok ga pomoću pokrate zapisujemo CMXCIX.

⁴Napomenimo kako Rimljani nisu koristili oznake + i – za zbrajanje i oduzimanje, već su te operacije opisivali riječima. No zbog jednostavnosti i lakše čitljivosti zapisa, u ovom ćemo tekstu koristiti današnje uobičajene oznake za matematičke operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Postupak ponavljamo dok ne uklonimo sve znamenke umanjitelja. Dakle:

$$XXII - VIII = XX - VI = XVIII - VI = XIII.$$

Vidimo da se postupak oduzimanja svodi na poznavanje osnovnih šest odnosa između znamenaka, te na vizualno poništavanje istih dijelova brojeva koje oduzimamo.

S druge strane, pri oduzimanju brojeva u indoarapskom zapisu, kao i kod zbrajanja, moramo koristiti veći broj informacija (odnosi između znamenaka koje se oduzimaju) i višu razinu apstrakcije (prenošenje vrijednosti na novu poziciju).

2.2. Množenje u rimskom brojevnom sustavu

Točan postupak množenja rimskih brojeva ni danas nije potpuno rasvijetljen. Osnovni razlog za to je izostanak povijesnih materijala iz rimskog perioda vezanih uz matematičke operacije (i matematiku općenito). Među povjesničarima postoji konsenzus o izostanku rimskog interesa za temeljne znanosti; ako nije postojala neposredna praktična primjena, interes je za temeljne znanosti poput matematike bio mali.

S druge strane, Rimljani su od svojih prethodnika (poput starogrčke ili egipatske civilizacije) preuzeli većinu praktičnih i primjenjivih znanja. Tako se vjeruje da su Rimljani način zapisivanja brojeva naslijedili od Etruščana, a taj je po strukturi (ne-pozicijski aditivni brojevni sustav sa simbolima koji označavaju određenu brojčanu vrijednost) sličan egipatskom i grčkom zapisu brojeva.

Kada je riječ o množenju rimskih brojeva, u literaturi se najčešće ističu tri načina: računanje prstima, abakusom i pomoću unaprijed pripremljenih tablica množenja. Radi o nepisanim i u literaturi relativno čestim metodama te ih stoga u ovom tekstu nećemo analizirati.

Osim toga, u literaturi su dostupni i razni algoritmi za množenje rimskih brojeva, od (starogrčkih) sustava temeljenih na distribucijskom svojstvu množenja brojeva u aditivnom zapisu, koji nalikuju modernom standardnom postupku množenja u pozicijskom sustavu ([9]), pa do algoritama množenja (i dijeljenja) specifično prilagođenih rimskim brojevima ([3]).

Algoritam za množenje (kasnije i dijeljenje) kojemu ćemo posvetiti pažnju temelji se na tehnici koja se razvila u starom Egiptu, odnosno radi se o blago modificiranom algoritmu koji se danas još naziva i *seljačko množenje* (eng. *peasant multiplication*) ([4,7,8]).

Iako ne postoje neposredni pisani tragovi, vrlo je vjerojatno da je tehnika bila poznata u starom Rimu. Primjerice, o egipatskom množenju C.S. Roero piše: „*Po-sve je sigurno da su Grci preuzeli dio elementarne aritmetike od Egipćana. Upotreba egipatskog množenja i računanja s jediničnim razlomcima opstala je dugo vremena, protežući se daleko u srednji vijek.*”⁵ ([6]). Također, zapise o upotrebi istog algoritma

⁵Preveo autor članka.

nalazimo i u literaturi koja govori o matematičaru Nicomachusu (60. – 120. god.) iz rimske provincije u Siriji ([5]).

U svakom slučaju, iako ne možemo ustvrditi da je opisani algoritam bio široko korišten u rimskom periodu, zasigurno je bio poznat i dostupan. Zbog njegove neuobičajenosti, jednostavnosti, ali i moderne upotrebe u računarstvu, vjerujemo da je korisno vidjeti kako funkcionira.

Algoritam *seljačkog množenja* zapravo nije vezan isključivo uz brojeve u rimskom zapisu, već ga je moguće provesti u bilo kojem brojevnom sustavu u kojemu znamo (po mogućnosti jednostavno):

- raspoznati parni od neparnog broja
- pomnožiti broj s dva
- cjelobrojno podijeliti broj s dva

Prije samog algoritma prokomentirajmo tri navedene pretpostavke u kontekstu rimskih brojeva.

Što se neparnih brojeva tiče, jedine neparne znamenke u rimskim su brojevima znamenke I i V. Stoga se neparan rimski broj prepoznavao po (ukupnom) neparnom broju tih znamenki. Tako je broj XVII neparan jer ima neparan broj (tri) znamenaka V i I, dok je broj XVIII paran jer ima paran broj (četiri) znamenaka V i I.

Rimske brojeve iznimno jednostavno množimo s dva: broj se dva puta zapiše, pa se provede korekcija poretka i pojednostavljivanje zapisa kao kod zbrajanja. Tako na primjer broj XVII (17) pomnožen s dva iznosi: XVII $\times$ XVII = XXVIII = XXXIII, dakle 34.

Kada govorimo o cjelobrojnom dijeljenju, govorimo o funkciji koju u modernoj matematici zapisujemo pomoću oznaka $\lfloor \rfloor$ (koje pak čitamo „najveće cijelo“), a radi se o rezultatu dijeljenja kod kojeg odbacujemo / zanemarujemo ostatak. Tako bismo cjelobrojno dijeljenje prirodnog broja n s dva u modernoj matematici zapisali kao $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pri čemu vrijedi $\lfloor \frac{8}{2} \rfloor = 4$, ali i $\lfloor \frac{9}{2} \rfloor = 4$. U oba je slučaja rezultat dijeljenja četiri, pri čemu u prvom slučaju nema ostatka, a u drugom je slučaju ostatak jednak jedan. Kako cjelobrojno dijeljenje zanemaruje ostatak, rezultat dijeljenja brojeva 8 i 9 s 2 je isti i iznosi 4.

Kod rimskih brojeva, cjelobrojno dijeljenje s dva provodimo tako da umjesto dvije iste znamenke zapišemo samo jednu. Ako pak ne postoje dvije iste znamenke, veću znamenku zapišemo pomoću manjih kako bismo dobili potrebne parove pojedinih znamenaka. Konačno, ako imamo ostatak 1 kod zamjene parova znamenki II, njega ignoriramo, tj. ne pišemo.

Tako na primjer, broj XXIII (24) nakon dijeljenja s dva prelazi u broj XII (12).

No ako s dva dijelimo broj XVIII (18), tada prvo znamenku X zapišemo kao VIII i potom provodimo zamjenu parova s po jednim simbolom:

$$XVIII = VIIIIVIII = VVVIIIIII,$$

što nakon dijeljenja s dva prelazi u VIII, odnosno 9. U ovome smo primjeru jedan par VV zamijenili s V, četiri para II zamijenili smo s četiri znamenke I, a posljednju smo znamenku I (ostatak) ignorirali.

Dakle, rimski brojevi zadovoljavaju tri osnovne pretpostavke potrebne za algoritam egipatskog množenja, pri čemu su postupci koje provodimo više vizualni (dupliranje znamenaka odnosno zamjena parova s jednim simbolom) nego li aritmetički (izuzev dekonstrukcije većih znamenaka u manje, odnosno konstrukcije većih znamenaka iz manjih). Samim izostankom aritmetike i višeg stupnja apstrakcije te svođenjem postupka na vizualne operacije, postupak je jednostavniji za needuciranog korisnika.

Posvetimo se sad algoritmu egipatskog množenja koji ćemo paralelno provesti na primjeru množenja brojeva XII (12) i XVII (17), što znači da trebamo dobiti rezultat CCIII (204).

Formirat ćemo dva stupca: prvome se na vrhu nalazi množitelj, a drugome množenik. U prvom ćemo stupcu broj u svakome koraku cjelobrojno dijeliti s dva, a u drugom ćemo stupcu broj u svakome koraku množiti s dva.⁶ Na sljedećoj slici prikazani su ti stupci za brojeve 12 i 17, paralelno u rimskom i dekadskom zapisu.

XII	XVII	12	17
VI	XXXIII	6	34
III	LXVIII	3	68
I	CXXXVI		136

Slika 1. Formiranje stupaca za egipatsko množenje

Potom u formiranim stupcima prekrižimo sve redove u kojima je u prvom stupcu paran broj. U našem slučaju moramo prekrižiti prvi i drugi red zato što su brojevi XII i VI parni (imaju paran broj znamenaka V i I).

XII	XVII	12	17
VI	XXXIII	6	34
III	LXVIII	3	68
I	CXXXVI	1	136

Slika 2. Određivanje sumanada u egipatskom množenju

⁶Zbog komutativnosti množenja, svedjedno je kojim redoslijedom množimo dva broja. Stoga je korisno za množitelja izabrati manji broj kako bi postupak množenja bio kraći.

Konačno, u drugom stupcu zbrojimo sve preostale neprekrižene brojeve. Taj je zbroj jednak umnošku koji tražimo. Uistinu:

$LXVIII + CXXXVI = LXVIII CXXXVI = CLXXXV VIII = CLXXXVIII = CCIII$, odnosno $68 + 136 = 204$. Rješenje će biti isto i ako zamijenimo redoslijed brojeva koje množimo:

XVII	XII	17	12
VII	XXII	8	24
III	XXXVII	4	48
H	LXXXVI	2	96
I	CLXXXII	1	192

Sada je:

$$XII + CLXXXII = XII CLXXXII = CLXXXVIII = CLIII = CCIII.$$

Pitanje je jesu li Europljani srednjega vijeka, Rimljani ili pak stari Egipćani, razumjeli ili znali objasniti zašto ta metoda funkcionira (kao kontekst za navedeno pitanje predlažem tekst Željka Ivankovića *„Je li matematika Zapada superiorna matematičari Istoka?“*, [2]). Iz današnje perspektive odgovor relativno jednostavno slijedi iz svojstva brojeva zapisanih u – binarnom brojevnom sustavu.

Kako bismo to objasnili, vratimo se prethodnom primjeru množenja. Drugi broj u umnošku (broj 17) zapravo nije presudan, pa ćemo ga označiti jednostavno s x . No prvi broj u umnošku zato ćemo zapisati u binarnome obliku:

$$(12)_{10} = (1100)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

Promotrimo što se točno događa kada broj 12 u binarnom zapisu množimo brojem x :

$$\begin{aligned} (1100)_2 \cdot x &= (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot x \\ &= 2^3 \cdot x + 2^2 \cdot x. \end{aligned}$$

Dakle, kako bismo dobili traženi umnožak, broj x tri smo puta pomnožili s dva i zbrojili ga s vrijednošću koju dobijemo kada x dva puta pomnožimo s dva. No to su iste vrijednosti koje zbrajamo i u postupku egipatskog množenja!

Naravno, to nije koincidencija. Redove koje zbrajamo izabrali smo kao redove s neparnim brojevima u seriji brojeva u prvome stupcu. Upravo će ti brojevi pri dijeljenju s dva dati ostatak 1, odnosno upravo su te pozicije u binarnom zapisu broja jednake 1 jer se radi o klasičnoj metodi prevođenja broja iz dekadskog u binarni zapis.

Kratko rečeno, algoritam egipatskog množenja paralelno provodi prevođenje prvog faktora u binarni zapis i množenje odgovarajućih potencija broja dva s drugim

faktorom. Ni stari Egipćani ni Rimljani to sigurno ne bi opisali na takav način jer binarni brojevni sustav prvi put susrećemo tek u 17. stoljeću u radovima Gottfrieda Wilhelma Leibniza. No, ostaje činjenica da su Egipćani, pa potom i Rimljani i Europljani srednjega vijeka koristili točan algoritam za određivanje umnoška koji nije ovisio o načinu zapisa brojeva, pa se jednako upotrebljavao u egipatskom i u rimskom brojevnom sustavu.

Štoviše, isti se algoritam danas koristi u računalu prilikom množenja dvaju prirodnih brojeva: množenje drugog faktora s dva u binarnom zapisu zapravo znači dodavanje nule s desne strane zapisa (odnosno pomak broja u lijevo za jedno mjesto), dok se zbrajaju samo oni brojevi (pomaci) koji odgovaraju poziciji znamenki 1 u binarnom zapisu prvoga broja. Na neki način mogli bismo reći da smo zatvorili puni krug, od egipatskog množenja hijeroglifa do istoga algoritma u modernim računalima.

2.3. Dijeljenje u rimskom brojevnom sustavu

Dijeljenje se često navodi kao operacija koja nije imala adekvatan algoritam provođenja kod rimskih brojeva, pa se postupak dijeljenja često opisuje pomoću sukcesivnog oduzimanja. Pa ipak, Rimljani su na raspolaganju imali više algoritama za cjelobrojno dijeljenje, a mi ćemo opisati onaj koji se temelji na egipatskom množenju. Za provođenje algoritma dijeljenja, kao i kod množenja, potrebno je znati pomnožiti broj s dva.

Recimo da želimo (cjelobrojno) podijeliti dva prirodna broja, tj. da želimo izračunati količnik i ostatak pri dijeljenju $n : m$. Kao i kod množenja, formirat ćemo dva stupca. Na vrhu prvog stupca pišemo broj jedan, a na vrhu drugog stupca pišemo djelitelja, odnosno m .

U svakom novom redu brojeve iz prethodnog reda pomnožimo s dva. Postupak zaustavljamo kada u drugom stupcu dobijemo broj veći od djeljenika, tj. n . Na primjer, ako želimo izračunati koliko iznosi $CLXXXV : XIII$ (tj. $185 : 13$), formiramo sljedeće stupce:

I	XIII	1	13
II	XXVI	2	26
III	LII	4	52
VIII	CIII	8	104
XVI	CCVIII	16	208

U tablici smo podvukli crtu ispod zadnjeg broja (u desnom stupcu) koji je manji od djeljenika n . Cilj je broj n prikazati kao maksimalan mogući zbroj brojeva iz desnog stupca, što ostvarujemo sukcesivnim oduzimanjem najvećeg mogućeg broja iz desnog stupca od djeljenika (n).

Tako u našem slučaju imamo:

$$\text{CLXXXV} - \text{CIII} = \text{LXXXIII} - \text{III} = \text{LXXXI} \quad (\text{tj. } 185 - 104 = 81),$$

$$\text{LXXXI} - \text{LII} = \text{XXVIII} - \text{II} = \text{XXVI} \quad (\text{tj. } 81 - 52 = 29),$$

$$\text{XXVI} - \text{XXIII} = \text{III} \quad (\text{tj. } 29 - 26 = 3).$$

Dakle, broj CLXXXV (185) može se prikazati kao zbroj brojeva iz drugog, trećeg i četvrtog reda i vrijednosti III (3) koja je *ostatak* cjelobrojnog dijeljenja.

Rezultat dijeljenja (količnik) dobivamo zbrajanjem odgovarajućih vrijednosti iz prvog stupca. U našem slučaju to su brojevi iz drugog, trećeg i četvrtog reda. Dakle, rezultat ovog dijeljenja je:

$$\text{II} + \text{III} + \text{VIII} = \text{XIII} = \text{XIII}.$$

Tako smo došli do rezultata dijeljenja $185 : 13$, koji iznosi 14 i ostatak 3.

Opisana metoda temelji se na egipatskom množenju. Tražimo najveći broj oblika $2^k \cdot m$ koji je manji od n . Rezultat cjelobrojnog dijeljenja potom je zbroj odgovarajućih eksponenata k_i koji zapravo definiraju binarni zapis rezultata dijeljenja.

Kao i kod množenja, treba istaknuti kako i operacija dijeljenja zahtijeva značajno oskudniju matematičku podlogu u usporedbi s dijeljenjem u indoarapskom brojevnom sustavu – potrebno je znati provesti zbrajanje i oduzimanje te množenje broja s dva.

Usporedimo li to potrebno predznanje s predznanjem potrebnim za provođenje dijeljenja u indoarapskom brojevnom sustavu, vidimo kako se uistinu radi o bitno jednostavnijem procesu.

3. Zaključak

Ovim smo tekstom željeli ukazati na algoritme za provođenje matematičkih operacija koje je moguće koristiti s rimskim brojevima. Opisani postupci vrlo su jednostavni za provođenje, zahtijevaju nisku razinu matematičkog predznanja (daleko nižu od one potrebne za provođenje istih operacija u indoarapskom brojevnom sustavu) i bitno nižu razinu apstrakcije.

S druge strane, te iste operacije postale su uglavnom nepoznate široj, a često i stručnoj matematičkoj javnosti, što može voditi k pogrešnim zaključcima o razvoju matematike kao znanosti, ali i o matematičkim mogućnostima i sposobnostima generacija koje su živjele prije nas. Na neki način, algoritmi poput egipatskog množenja postali su „zaboravljeno znanje“ iako ih u isto vrijeme koristimo svakodnevno kroz računalne algoritme.

Nadamo se da je i ovim tekstom bar malo dignuta „koprena zaborava“ s matematičkih znanja kojima se čovječanstvo koristilo prije više stoljeća, i da će pomoći pravednijem vrednovanju matematičkih znanja i vještina korištenih u prošlosti.

Literatura:

1. Ivanković, Ž., „Zašto je arapskim brojevima trebalo više od pola milenija da zamijene rimske?“, *ideje.hr* (2024.) <https://ideje.hr/zasto-je-arapskim-brojevima-trebalo-vise-od-pola-milenija-da-zamijene-rimske/> (15. 11. 2024.)
2. Ivanković, Ž., „Je li matematika Zapada superiorna matematičari Istoka?“, *ideje.hr* (2024.) <https://ideje.hr/je-li-matematika-zapada-superiorna-matematiki-istoka/> (15. 11. 2024.)
3. Kennedy, J. G. „Arithmetic with Roman Numerals“, *The American Mathematical Monthly*, 88 (1), 29–32. (1981.).
4. Kline, M., „*Mathematical Thought from Ancient to modern Times, vol. 1*“, Oxford University Press, New York (1972.)
5. Nicomachus of Gerasa „*Introduction to Arithmetic*“, translated by M.L. D’Ooge, The MacMillan & Co, London (1926.)
6. Roero, C.S., „*Egyptian mathematics*“, Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Routledge, New York, (1994.)
7. Rudman, P. S., „*How Mathematics Happened: The First 50 000 Years*“, Prometheus Books, New York (2007.)
8. Stern, D. P., „*A Different Kind of Multiplication*“, (2002.) <http://www.phy6.org/outreach/edu/roman.htm> (24. studenog 2024.)
9. Šikić, Z., „*Ključni problem rimskih brojeva. Razvoj prirodnih logaritama*“, *ideje.hr* (2024.) <https://ideje.hr/kljucni-problem-rimskih-brojeva-razvoj-prirodnih-logaritama/> (15. 11. 2024.)
10. Smestad, B. i Nikolantonakis, K. „*Historical methods for multiplication*“, European Summer University on the History and Epistemology of Mathematics (2010.).