

Složena razmjernost više veličina i njezina primjena¹

DRAGO FRANCIŠKOVIĆ²

Sažetak

U ovom originalnom radu opisana je generalizacija upravne razmjernosti (proporcionalnosti) i obrnute razmjernosti dviju veličina za slučaj triju i više veličina. Neka je k pozitivan realan broj. Poznato je da su dvije pozitivne veličine x i y upravno razmjerne ako njihova međusobna ovisnost ima oblik $x = ky$ ili $y = kx$, a obrnuto razmjerne ako njihova međusobna ovisnost ima oblik $xy = k$.

Tri pozitivne veličine x , y i z međusobno su složeno razmjerne veličine ako njihova međusobna ovisnost ima jedan od sljedeća tri oblika: $a_1 a_2 a_3 = k$, $a_1 a_2 = k a_3$ ili $a_1 = k a_2 a_3$, pri čemu se u svakom obliku umjesto varijabli a_1 , a_2 i a_3 nalaze veličine x , y i z , i to svaka samo jednom u svakom od spomenutih oblika. Primjerice, ovisnosti $x = kyz$ (odnosno $x = kzy$), $y = kxz$ (odnosno $y = kzx$) i $z = kyx$ (odnosno $z = kxy$) ovisnosti su trećeg oblika, a ovisnosti oblika $xyz = k$, $xzy = k$, $yxz = k$, $yzx = k$, $zxy = k$, $zyx = k$ ovisnosti su prvog oblika.

Na sličan se način definira i međusobna složena razmjernost četiriju i više pozitivnih veličina. Njihova međusobna ovisnost dana je u obliku jednakosti u kojoj je s lijeve strane jedna veličina ili umnožak više veličina, a s desne je strane konstanta k ili umnožak te konstante s umnožkom preostalih veličina. Ta jednakost je *osnovna jednakost složene razmjernosti*. Za dvije veličine s iste strane znaka te jednakosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su obrnuto razmjerne. Za dvije veličine, jedne s lijeve i jedne s desne strane znaka te jednakosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su upravno razmjerne. Posljednje dvije tvrdnje koriste se kako bi se za više promatranih veličina našla osnovna jednakost složene razmjernosti.

Složena razmjernost više veličina, odnosno osnovna jednakost složene razmjernosti, može se koristiti za rješavanja zadataka koji se uobičajeno, na stari način, rješavaju shemom složenog pravila trojnog. Tim novim načinom rješavanja takvih za-

¹Predavanje održano na 10. Kongresu nastavnika matematike 2024. u Zagrebu

²Drago Francišković, Koprivnica

dataka postaje jednostavnije i razumljivije. U radu se nadalje na nekoliko primjera pokazuje prednost novog načina nad starim načinom rješavanja problema složenog pravila trojnog.

Ključne riječi: složena razmjernost, upravna razmjernost, obrnuta razmjernost, složeno pravilo trojno, osnovna jednakost složene razmjernosti.

1. Uvod

Podsjetimo se definicija razmjernosti i obrnute razmjernosti dviju pozitivnih veličina x i y .

Veličine x i y upravno su razmjerne ako postoji konstanta $k > 0$ takva da vrijedi jednakost $x = ky$.

Veličine x i y obrnuto su razmjerne ako postoji konstanta $k > 0$ takva da vrijedi jednakost $x = k \frac{1}{y}$. Primijetimo da se jednakost $x = k \frac{1}{y}$ može pisati i kao jednakost $y = c \frac{1}{x}$, gdje je $c = \frac{1}{k}$, odnosno kao jednakost $xy = k$. Jednakost $xy = k$ u kojoj se pojavljuje samo produkt promatranih veličina naziva se *osnovna jednakost obrnute razmjernosti* veličina x i y .

Uočimo da je svaka od razmjernosti (proporcionalnost) dviju veličina (upravna i obrnuta) povezana s jednim od sljedećih dvaju oblika jednakosti:

1.) $xy = k$,

2.) $x = ky$,

pri čemu je x jedna od dviju promatranih veličina, a y ona druga.

Svaka od dviju spomenutih jednakosti predstavlja *osnovnu jednakost razmjernosti* veličina x i y . Prva jednakost predstavlja obrnutu razmjernost, a druga upravnu razmjernost veličina x i y .

1.1. Složena razmjernost triju pozitivnih veličina

Tri pozitivne veličine složeno su razmjerne ako postoji konstanta $k > 0$ takva da njihova međusobna ovisnost poprima jedan od sljedeća tri oblika:

1.) $xyz = k$,

2.) $xy = kz$,

3.) $x = kyz$.

pri čemu je x jedna od triju promatranih veličina, y jedna od preostalih dviju, a z preostala veličina.

Primjer 1. Sve moguće ovisnosti triju pozitivnih veličina a , b i c grupirane su u spomenuta tri oblika:

- 1.) $abc = k$,
- 2.) $ab = kc, \quad ac = kB, \quad bc = ka$,
- 3.) $a = kbc, \quad b = kac, \quad c = kab$.

Svaka je od tih jednakosti *osnovna jednakost složene razmjernosti* triju veličina.

1.2. Složena razmjernost četiriju pozitivnih veličina

Četiri pozitivne veličine složeno su razmjerne ako postoji konstanta $k > 0$ takva da njihova međusobna ovisnost poprima jedan od sljedeća četiri oblika:

- 1.) $xyzv = k$,
- 2.) $xyz = kv$,
- 3.) $xy = kzv$,
- 4.) $x = kyzv$,

pri čemu je x jedna od četiriju promatranih veličina, y jedna od preostalih triju, z jedna od preostalih dviju, a v jedina preostala veličina.

Primjer 2. Sve moguće ovisnosti pozitivnih veličina a , b , c i d grupirane su u spomenuta četiri oblika:

- 1.) $abcd = k$,
- 2.) $abc = kd, \quad abd = kc, \quad acd = kb, \quad bcd = ka$,
- 3.) $ab = kcd, \quad ac = kbd, \quad ad = kbc, \quad bc = kad, \quad bd = kac, \quad cd = kab$,
- 4.) $a = kbcd, \quad b = kacd, \quad c = kabd, \quad d = kabc$.

To su *osnovne jednakosti složene razmjernosti* četiriju veličina.

2. Složena razmjernost n pozitivnih veličina

Pozitivne veličina $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ složeno su razmjerne ako postoji konstanta $k > 0$ takva da se njihova međusobna ovisnost može prikazati jednom od jednakosti sljedećih n oblika:

- 1.) lijevo od znaka jednakosti '=' umnožak je svih veličina, a desno samo konstanta k ,
- 2.) lijevo od znaka jednakosti '=' umnožak je $n - 1$ od n promatranih veličina, a desno konstanta k pomnožena preostalom veličinom,
- 3.) lijevo od znaka jednakosti '=' umnožak je $n - 2$ od n promatranih veličina, a desno konstanta k pomnožena umnoškom svih preostalih veličina,
-,

n .) lijevo od znaka jednakosti '=' jedna je od n promatranih veličina, a desno konstanta k pomnožena umnoškom svih preostalih $n - 1$ veličina.

Osnovne jednakosti složene razmjernosti prikazane su u sljedećoj tablici:

<i>oblik osnovne jednakosti složene razmjernosti</i>	<i>broj</i>
1) $v_1 v_2 \cdots v_n = k$	1
2) $v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} = k v_{i_n}$	n
$\vdots$	$\dots\dots$
$n-l+1$) $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_l} = k v_{i_{l+1}} \cdots v_{i_n}, l = n-2, \dots, 2$	$\binom{n}{l}$
$\vdots$	$\dots\dots$
n) $v_{i_1} = k \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_n}$	n

Skup $\{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ je bilo koji l -teročlani podskup skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Broj svih mogućih osnovnih jednakosti složene razmjernosti n veličina je $2^n - 1$.

Postavlja se pitanje kako u konkretnom slučaju naći odnos između složeno razmjernih veličina, odnosno, osnovnu jednakost složene razmjernosti? Odnosno, postavlja se pitanje koje su od promatranih veličina s lijeve, a koje s desne strane znaka jednakosti u osnovnoj jednakosti složene razmjernosti?

2.1. Odnos dviju veličina u osnovnoj jednakosti složene razmjernosti n pozitivnih veličina

Promatrajmo dvije od n veličina koje su složeno razmjerne. Za dvije veličine s iste strane osnovne jednakosti složene razmjernosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su obrnuto razmjerne. Vrijedi i obratno; ako su dvije veličine obrnuto razmjerne, onda se nalaze s iste strane osnovne jednakosti složene razmjernosti.

Za dvije veličine koje su na različitim stranama znaka jednakosti osnovne jednakosti složene razmjernosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su upravo razmjerne. Vrijedi i obratno; ako su dvije veličine upravo razmjerne, onda se nalaze s različite strane osnovne jednakosti složene razmjernosti.

2.2. Nalaženje osnovne jednakosti složene razmjernosti n pozitivnih veličina

Odaberemo jednu od n veličina za koje smatramo da su složeno razmjerne. Odabranu veličinu pišemo s lijeve strane osnovne jednakosti složene razmjernosti. Za svaku od preostalih veličina odgovorimo na pitanje je li ona s odabranom veličinom upravno razmjerna ili obrnuto razmjerna, pri čemu pretpostavljamo da su ostale veličine konstante.

Ako je ona s odabranom upravno razmjerna, pišemo je s desne strane jednakosti, tj. množimo je s konstantom i svim ostalim veličinama koje su već u umnošku s desne strane jednakosti.

Ako je ona s odabranom obrnuto razmjerna, pišemo je s lijeve strane jednakosti, tj. množimo je sa svim veličinama koje su već u umnošku s lijeve strane jednakosti.

Primjer 3. Određeni broj kokoši za određeni broj dana snese određeni broj jaja. Kako se ti brojevi međusobno odnose?

Promatraju se tri veličine: broj kokoši, broj dana i broj jaja. Označimo ih redom varijablama x , y i z . Treba vidjeti jesu li spomenute veličine međusobno upravno ili obrnuto razmjerne, te naći osnovnu jednakost složenog razmjera ako jesu. Broj kokoši x upravno je razmjernan s brojem jaja z jer će m puta više kokoši za određeni broj dana snijeti m puta više jaja. Broj kokoši x obrnuto je razmjernan s brojem dana y jer će m puta više kokoši snijeti određeni broj jaja za m puta manji broj dana.

Prema tome imamo sljedeću osnovnu jednakost složene razmjernosti promatranih veličina:

$$xy = kz.$$

3. Primjena složene razmjernosti više veličina

Problemi koji se uobičajeno rješavaju postupkom složenog pravila trojnog mogu se brže, jednostavnije i razumljivije rješavati korištenjem osnovne jednakosti složene razmjernosti.

Sljedeća dva primjera to upravo pokazuju.

3.1. Primjer A

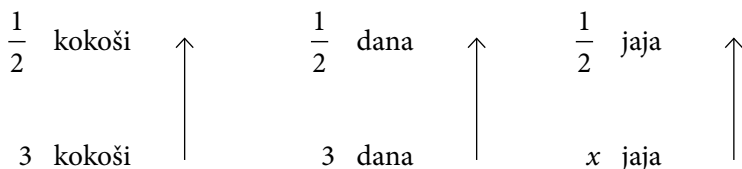
Poznato je da pola kokoši za pola dana snese pola jajeta. Odgovorite na sljedeća pitanja.

- Koliko jaja snesu tri kokoši u 3 dana?
- Koliko kokoši treba imati da bi se u dva dana dobilo 20 jaja?

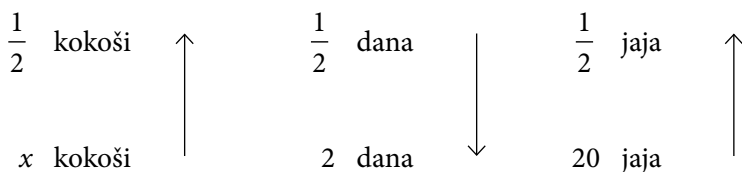
Prvo nađimo odgovore na postavljena pitanja koristeći uobičajenu shemu složenog pravila trojnog paralelno, korak po korak za oba pitanja.

Konstruirajmo uobičajenu shemu

a)



b)



Napomena. Primijetimo da nemaju su sve strelice u slučajevima a) ($\uparrow\uparrow\uparrow$) i b) ($\uparrow\downarrow\uparrow$) isti smjer. Razlog je što općenito strelice imaju različite smjerove ako se traže nepoznati iznosi različitih veličina koje promatramo. Tako npr. kada bi se tražio broj dana, u shemi bi strelice bile ovakve: $\downarrow\uparrow\uparrow$.

To može biti zbunjujuće za učenike i studente, a dodatni je problem razumijevanje opravdanosti takve sheme. U slučaju primjene osnovne jednakosti složene razmjernosti toga nema i odnos između veličina jasno je njome određen.

Sada pišemo omjere u smjeru strelica te nalazimo traženi iznos kako slijedi.

a)

$$\begin{array}{c|c}
 x : \frac{1}{2} & 3 : \frac{1}{2} \\
 \hline
 & 3 : \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$x : \frac{1}{2} = (3 \cdot 3) : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 18.$$

Traženi broj jaja je 18.

b)

$$\begin{array}{c|c}
 x : \frac{1}{2} & \frac{1}{2} : 2 \\
 \hline
 & 20 : \frac{1}{2} \\
 \hline
 x : \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \right) : \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 20}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5.$$

Traženi broj kokoši je 5.

Problem u promatranom primjeru može se jednostavnije i razumljivije riješiti primjenom osnovne jednakosti složene razmjernosti.

Pridružimo varijable svakoj veličini:

h – broj kokoši, d – broj dana, j – broj jaja.

Ovdje se radi o veličinama iz *Primjera 3.* u 2.2. Odaberemo npr. veličinu h i provjerimo jesu li ostale veličine s njom razmjerne ili obrnuto razmjerne.

Broj kokoši h razmjeran je broju jaja j , a obrnuto razmjeran broju dana d .

Osnovna jednakost složene razmjernosti tih veličina je

$$hd = kj.$$

Iz poznatih vrijednosti $h = d = j = \frac{1}{2}$ dobiva se da je $k = \frac{1}{2}$, te imamo da je:

$$hd = \frac{1}{2}j.$$

Odgovorimo sada na postavljena pitanja.

a) Koliko jaja snesu tri kokoši u 3 dana?

Iz činjenice da je $h = 3$ i $d = 3$ slijedi da je $3 \cdot 3 = \frac{1}{2}j$, tj. $j = 18$.

Odgovor je, dakle, 18 jaja.

b) Koliko kokoši treba imati da bi se u dva dana dobilo 20 jaja?

Iz činjenice da je $d = 2$ i $j = 20$, slijedi da je $h \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 20$, tj. $h = 5$.

Odgovor je, dakle, 5 kokoši.

3.2. Primjer B

Poznato je da 6 radnika radeći 5 dana po 4 sata na dan obere 3 reda od po 120 grmova borovnice.

- Koliko je radnika potrebno da u 6 dana, radeći 8 sati dnevno, pobere borovnice zasađene u 24 reda po 90 grmova?
- Za koliko će dana 9 radnika radeći 10 sati dnevno pobrati borovnice u 24 reda od po 90 grmova?
- Koliko se redova od po 100 grmova treba otvoriti za branje ako će ih 12 berača brati 6 dana po 8 sati dnevno?

Prvo nađimo odgovore na postavljena pitanja koristeći uobičajenu shemu složenog pravila trojnog, korak po korak za svako od tri pitanja.

Konstruirajmo uobičajenu shemu

a)

6 radnika	↑	5 dana	↓	4 sati	↓	3 reda	↑	120 grmova	↑
x radnika		6 dana	↓	8 sati	↓	24 reda		90 grmova	

Sada pišemo omjere u smjeru strelica te nalazimo traženi iznos kako slijedi.

$$\begin{array}{l|l}
 x : 6 & 5 : 6 \\
 & 4 : 8 \\
 & 24 : 3 \\
 & 90 : 120 \\
 \hline
 x : 6 = (5 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 90) : (6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 120)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 90}{6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 120} = 15.$$

Traženi je broj radnika 15.

b)

6 radnika	↓	5 dana	↑	4 sati	↓	3 reda	↑	120 grmova	↑
9 radnika		x dana	↑	10 sati	↓	24 reda		90 grmova	

Sada pišemo omjere u smjeru strelica te nalazimo traženi iznos kako slijedi.

$$\begin{array}{r|l}
 x : 5 & 6 : 9 \\
 & 4 : 10 \\
 & 24 : 3 \\
 & 90 : 120 \\
 \hline
 x : 5 & = (6 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 90) : (9 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 120)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 5 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 90}{9 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 120} = 8.$$

Traženi je broj dana 8.

c)

$$\begin{array}{ccccccc}
 6 \text{ radnika} & \uparrow & 5 \text{ dana} & \uparrow & 4 \text{ sati} & \uparrow & 3 \text{ reda} & \uparrow & 120 \text{ grmova} & \downarrow \\
 12 \text{ radnika} & & 6 \text{ dana} & & 8 \text{ sati} & & x \text{ reda} & & 100 \text{ grmova} &
 \end{array}$$

Sada pišemo omjere u smjeru strelica te nalazimo traženi iznos kako slijedi.

$$\begin{array}{r|l}
 x : 3 & 12 : 6 \\
 & 6 : 5 \\
 & 8 : 4 \\
 & 120 : 100 \\
 \hline
 x : 3 & = (12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 120) : (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 100)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 3 \cdot \frac{12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 120}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 100} = \frac{432}{15} = 17,28.$$

Traženi broj redova koje treba otvoriti za branje je 18.

Problem u promatranom primjeru može se jednostavnije i razumljivije riješiti primjenom osnovne jednakosti složene razmjernosti.

Pridružimo varijable svakoj veličini:

r – broj radnika, d – broj dana branja, s – broj sati branja dnevno,

l – broj redova otvorenih za branje, g – broj grmova u jednom redu.

Treba vidjeti jesu li spomenute veličine međusobno upravno ili obrnuto razmjerne, te naći osnovnu jednakost složenog razmjera ako jesu. Odaberemo npr. veličinu r i provjerimo jesu li ostale veličine s njom razmjerne ili obrnuto razmjerne.

Broj radnika r razmjernan je broju dana d i broju sati branja dnevno s , a obrnuto razmjernan broju redova d i broju grmova u redu g .

Osnovna jednakost složene razmjernosti tih veličina je

$$rds = klg.$$

Iz poznatih vrijednosti $r = 6$, $d = 5$, $s = 4$, $l = 3$, $g = 120$ dobiva se da je $k = \frac{1}{3}$, te imamo sljedeću osnovnu jednakost složene razmjernosti:

$$rds = \frac{1}{3}lg.$$

Odgovorimo sada na postavljena pitanja.

- a) Koliko je radnika potrebno da se u 6 dana radeći 8 sati dnevno poberu borovnice u 24 reda od po 90 grmova?

Iz činjenice da je $d = 6$, $s = 8$, $l = 24$, $g = 90$ slijedi da je $r \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 90$, tj. $r = 15$.

Odgovor je, dakle, 15 radnika.

- b) Koliko je dana rada potrebno da 9 radnika radeći 10 sati dnevno pobere borovnice u 24 reda od po 90 grmova?

Iz činjenice da je $r = 9$, $s = 10$, $l = 24$, $g = 90$ slijedi da je $9 \cdot d \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 90$, tj. $d = 8$.

Odgovor je, dakle, 8 dana.

- c) Koliko redova, od po 100 grmova, se treba otvoriti za branje, ako će ih 12 berača brati 6 dana po 8 sati dnevno?

Iz činjenice da je $r = 12$, $d = 6$, $s = 8$, $g = 100$ slijedi $12 \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot l \cdot 100$, tj. $l = 17,28$.

Dakle, za branje treba otvoriti 18 redova.

Zaključak

Za bilo koje dvije proizvoljne veličine od više složeno razmjernih veličina vrijedi da su ili upravno razmjerne ili obrnuto razmjerne, uz pretpostavku da su ostale veličine konstantne. Dvije veličine koje se nalaze na različitim stranama osnovne jednakosti složene razmjernosti upravno su razmjerne. Dvije veličine koje se nalaze na istoj strani spomenute jednakosti obrnuto su razmjerne. Osnovna jednakost složene razmjernosti jasno pokazuje međusobnu ovisnost složeno razmjernih veličina. U slučaju kada su poznati iznosi svih veličina odredi se nepoznata konstanta osnovne jednakosti složene razmjernosti. Osnovna jednakost složene razmjernosti može se primijeniti pri rješavanju problema koji se uobičajeno rješavaju postupkom složenog pravila trojnog. Radi se o postupku nalaženja iznosa jedne veličine kada su poznati

iznosi ostalih veličina. Njenom se primjenom postupak rješavanja takvih problema pojednostavljuje, ubrzava i čini razumljivijim. Prednost primjene osnovne jednakosti složene razmjernosti očita je.

Literatura:

1. Babić, Z., N. Tomić-Plazibat, N. (2008.): Poslovna matematika, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split
2. Francišković D. (2024.): Gospodarska i financijska matematika – suvremeni pristup, drugo dopunjeno izdanje, Element d.o.o., Zagreb
3. Štambuk, Lj. (2006.): Poslovna matematika, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac