

Kratak uvod u teoriju grafova

ANAMARI NAKIĆ¹

Sažetak

Graf je konačna kombinatorna struktura koja se sastoji od vrhova i bridova među vrhovima. Matematički pojam grafa prirodan je model za razne mreže prisutne u našoj svakodnevici (telekomunikacijske, električne ili društvene), stoga je od velikog interesa u inženjerstvu i tehnologiji. U ovom je radu dan kratak uvod u teoriju grafova.

1. Uvod

Teorija grafova nadovezuje se na teme iz kombinatorike i računalnog programiranja koje se obrađuju u srednjoškolskom programu. Stoga se neki rezultati o grafovima mogu približiti motiviranim učenicima srednjih škola, a obično se detaljno obrađuju u visokoškolskoj nastavi matematike na studijima matematike i računarstva.

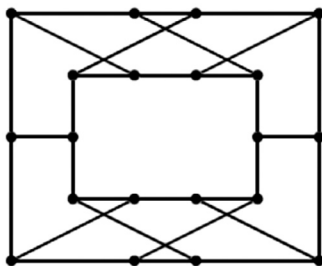
Teorija grafova matematička je disciplina koja se bavi problemima egzistencije, klasifikacije i konstrukcije grafova te njihovim primjenama. Iako je nekada teško definirati granice neke discipline, po svojoj prirodi teorija grafova pripada kombinatorici.

Početak ove discipline smatra se objava članka Leonarda Eulera iz 1736. godine [2] u kojem je po prvi put modelirao probleme iz svakodnevice matematičkim jezikom teorije grafova. U svom je radu Euler postavio pitanje o mogućnosti ostvarenja specifične šetnje Kalinjingradom u Rusiji preko sedam mostova rijeke Pregolje između kopna i njezina dva riječna otoka. Pri tome je zadao posebne uvjete za šetnju: svaki je most potrebno prijeći samo jednom, a zatim se vratiti u početnu točku šetnje. Euler je pri rješavanju problema predstavio analitičku tehniku iz koje se razvila teorija grafova. Konačno, zaključio je da takvu šetnju nije moguće ostvariti.

Najpoznatiji rezultat iz teorije grafova u Republici Hrvatskoj ostvario je profesor Danilo Blanuša (1903. – 1987.) sa Sveučilišta u Zagrebu. Radi se o otkriću grafa s posebnim svojstvima [1] o čijoj važnosti u teoriji grafova možete pročitati ovdje [3].

¹Anamari Nakić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

Blanušin graf nalazi se u logotipu Hrvatskog matematičkog društva, a objavljen je i na prigodnoj poštanskoj marki 2000. godine povodom Svjetske matematičke godine.



Slika 1. Blanušin graf

Brojne su primjene grafova u raznim granama inženjerstva pa i u svakodnevici. Graf je diskretna matematička struktura kojom se prirodno modeliraju upareni odnosi između objekata. Tako je graf matematički model za društvene, električne, komunikacijske ili transportne mreže. U kemiji i fizici, grafovi su matematički modeli za prikaz molekula i kemijskih spojeva. Ovakvim se problemima bavi specijalna grana matematike, kemijska teorija grafova.

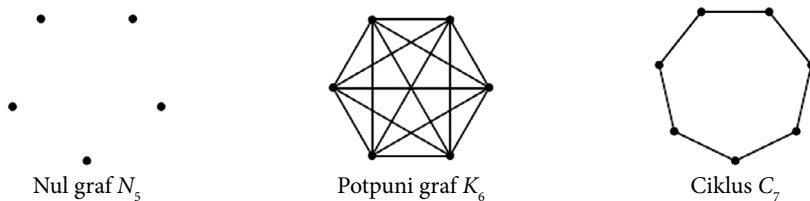
Nadalje, ceste između gradova čine transportnu mrežu koja se može modelirati pomoću grafa. Poznati su vrlo efikasni algoritmi za određivanje najkraćih putova na grafu koji se onda mogu primijeniti na transportne mreže.

U informacijskoj tehnologiji poznato je da tražilica *Google* koristi grafove za prikaz veza među internetskim stranicama te u svom algoritmu za pretraživanje Page-Rank. Pomoću alata teorije grafova analiziraju se navike korisnika društvenih mreža. Cilj je prikazati društvenu mrežu kao graf, a zatim ga istražiti i opisati jezikom teorije grafova te donijeti zaključke o njegovim karakteristikama.

2. Pojam grafa

U ovom su poglavlju definirani osnovni pojmovi te su predstavljeni i skicirani najpoznatiji grafovi.

Graf G sastoji se od konačnog nepraznog skupa vrhova V i konačnog skupa bridova E . Na Slici 2. predstavljeni su primjeri nekih poznatih grafova. *Nul graf* je graf bez bridova, a *potpuni graf* je graf u kojemu su svi vrhovi međusobno spojeni bridom.



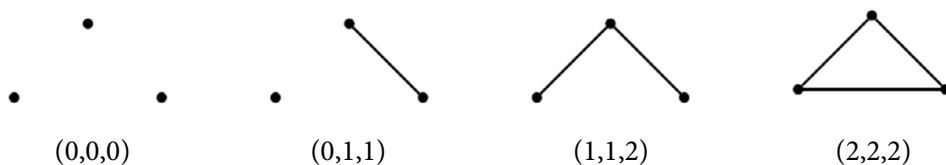
Slika 2.

Brid je dvočlani podskup skupa vrhova. Ako je e brid između vrhova v i w , kažemo da su e , te v i w *incidentni*, pa pišemo $e = vw$. U tom slučaju kažemo da su v i w *susjedni* vrhovi. S druge strane, kažemo da su bridovi *susjedni* ako imaju jedan zajednički vrh.

Graf je *jednostavan* ako nema petlji ni višestrukih bridova. Ovaj se rad bavi isključivo jednostavnim grafovima.

Put u grafu G konačan je niz različitih bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$, pri čemu su svaka dva uzastopna brida susjedna i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_k$ različiti. Kažemo da je graf *povezan* ako postoji put između svaka dva vrha. U suprotnom kažemo da je graf *nepovezan*. U prethodnom primjeru potpuni graf K_6 i ciklus C_7 povezani su grafovi: između svaka dva vrha postoji put. Nul graf N_5 nije povezan.

Broj susjeda vrha v u grafu G nazivamo stupanj vrha v . Stupnjevi svih vrhova grafa G mogu se poredati uzlazno u niz te pridružiti grafu G . Slika 3. prikazuje sve grafove s tri vrha te njihove nizove stupnjeva.



Slika 3.

U ovim je primjerima zbroj stupnjeva svakog pojedinog grafa paran broj te je dvostruko veći od broja bridova grafa:

- $0 + 0 + 0 = 0$
- $0 + 1 + 1 = 2$
- $1 + 1 + 2 = 4$
- $2 + 2 + 2 = 6$

To nije slučajnost, Leonard Euler je u već spomenutom radu [2] dokazao da ovo vrijedi za svaki graf.

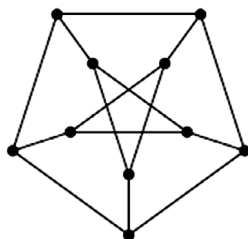
Lema 1. (*Lema o rukovanju* [2, 4]). *Zbroj stupnjeva svakog grafa je paran broj i dvostruko je veći od broja bridova u grafu.*

Evo jednog problema izrade rasporeda koji se može riješiti matematičkim modeliranjem pomoću grafa, te korištenjem *Leme o rukovanju*.

Primjer 1. *Organizira se turnir u šahu na koji se prijavilo 10 osoba. Pravila održavanja turnira nalažu da svaka osoba igra tri partije, uvijek s drugim protivnikom. Je li moguće organizirati turnir s opisanim pravilima?*

Neka je G graf koji predstavlja turnir. Tada su vrhovi sudionici turnira, a bridovi partije. Graf G ima 10 vrhova, a stupanj je svakoga vrha jednak tri. Stoga je ukupna suma stupnjeva od G jednaka $10 \cdot 3 = 30$. Prema Lemi o rukovanju, ukupan zbroj stupnjeva dvostruko je veći od broja bridova pa slijedi da graf G ima 15 bridova.

Dakle, moguće je organizirati turnir sa zadanim pravilima ako postoji graf G s 10 vrhova i 15 bridova kojemu je svaki vrh stupnja tri. Takav graf postoji i zove se Petersenov graf. Više o Petersenovom grafu može se pročitati u [5].



Slika 4. Petersenov graf

3. Klasifikacija grafova

Dotaknimo se sada problema klasifikacije grafova. Za početak je potrebno odgovoriti na pitanje kako razlikovati grafove. Očito je da su dva grafa različita ako imaju različit broj vrhova ili bridova, ili ako imaju različit pridruženi niz stupnjeva. S druge strane, Slika 5. prikazuje primjere grafova koji se razlikuju jedino u prikazu koji je rotiran u ravnini pa se ovi grafovi ne smatraju međusobno različitim.



Slika 5.

Formalno, kažemo da su *izomorfni*, a za dva različita grafa kažemo da su *neizomorfni*. Stroga matematička definicija je sljedeća.

Definicija 1. Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su *izomorfni* ako postoji bijekcija φ između skupova vrhova od G_1 i G_2 , takva da su vrhovi v i w u G_1 susjedni ako i samo ako su dva korespondentna vrha $\varphi(v)$ i $\varphi(w)$ susjedni u G_2 . U suprotnom kažemo da su grafovi *neizomorfni*.

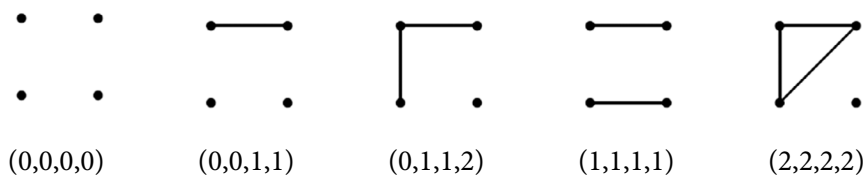
Sada je moguće postaviti pitanje: koliko ima različitih grafova sa zadanim brojem vrhova? Već su predstavljeni svi grafovi s tri vrha; ima ih četiri.

Primjer 2. *Odredite sve grafove s četiri vrha.*

Ako je graf s četiri vrha nepovezan, onda je stupanj jednog vrha jednak 0, 1 ili 2. Graf može imati redom 0, 1, 2 ili 3 brida. Prema Lemi o rukovanju, moguće vrijednosti ukupnog zbroja stupnjeva redom su 0, 2, 4 i 6. Sljedeći nizovi cijelih brojeva zadovoljavaju opisane uvjete:

$$(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 1), \\ (0, 1, 1, 2), (0, 0, 2, 2), (1, 1, 2, 2), (0, 2, 2, 2).$$

U sljedećih pet slučajeva prikazanih na Slici 6. moguće je realizirati nepovezan graf s četiri vrha. Svi konstruirani grafovi međusobno su neizomorfni.

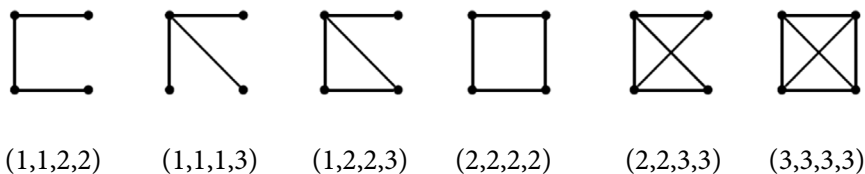


Slika 6.

Ako je graf s četiri vrha povezan, onda je stupanj jednog vrha jednak 1, 2 ili 3. Graf može imati redom 3, 4, 5 ili 6 bridova. Prema Lemi o rukovanju, moguće vrijednosti ukupnog zbroja stupnjeva redom su 6, 8, 10 i 12. Sljedeći nizovi cijelih brojeva zadovoljavaju opisane uvjete:

$$(1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 3, 3), (1, 2, 2, 3), \\ (2, 2, 2, 2), (1, 3, 3, 3), (2, 2, 3, 3), (3, 3, 3, 3).$$

U sljedećih šest slučajeva prikazanih na Slici 7. moguće je realizirati povezan graf s četiri vrha. Svi su konstruirani grafovi međusobno neizomorfni.



Slika 7.

Dakle, postoji 11 grafova s četiri vrha. Čitateljima se prepušta da sami odrede sve grafove s jednim ili s dva vrha. Oni koji žele znati više o ovoj temi upućuju se na radove [6, 7]. Ovdje još samo navodimo tablicu s brojevima grafova za male vrijednosti broja vrhova [8].

Broj vrhova	Broj grafova
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	274668
10	12005168

Tablica 1.

Problem klasifikacije grafova s n vrhova težak je kombinatorni problem koji je za veće vrijednosti od n još uvijek otvoren te istraživači nastavljaju raditi na njemu.

Literatura:

1. D. Blanuša, Problem četiriju boja, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser.II. 1, (1946.), 31-42.
2. L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, (1736.) 128-140.
3. I. Ivanšić, Logotip HMD-a: Blanušin graf, matematika.hr/o-hmd-u/logotip-hmd-a/ (14. 12. 2024.)
4. D. Kovačević, M. Krnić, A. Nakić, M. O. Pavčević. Diskretna matematika1, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2020.
5. S. Majstorović, L. Boras, Petersenov graf, Hrvatski matematički elektronički časopis, 27, No. 1, (2015.) 36-50.
6. I. Mihovilović, A. Nakić, Prebrojavanje stabala s malim brojem vrhova, Osječki matematički list, 22, No. 1, (2022.) pp. 13.
7. A. Nakić, I. Vesel, Problem klasifikacije grafova, Acta Mathematica Spalatensia, Series didactica, 3, (2020.) 87-97.
8. Number of simple graphs on n unlabeled nodes, A000088, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org