

Numerička integracija. Newton-Cotesove formule

MARIJAN ČANČAREVIĆ¹, IVICA ČULINA² I ŠIMUN ZLOPAŠA³

Uvod

U mnogim se slučajevima rješenje nekog problema svodi na izračun određenog integrala. Poznato je da su osnovne motivacije za uvođenje određenog integrala problem površine podskupova ravnine i rad sile. Proširimo li područje promatranja, lako se nađe primjena pri računanju brzine iz akceleracije, puta iz brzine u danom vremenskom intervalu, količina tvari iz brzine kemijske reakcije, količina topline iz specifične topline i još puno drugih primjena iz različitih znanstvenih i stručnih područja [1].

Metode integracije općenito mogu biti analitičke i numeričke, a integral jednostruki, dvostruki, ..., plošni, krivuljni, ... [2]. U ovom su članku izvedene Newton-Cotesove formule numeričke integracije i istaknuti posebni slučajevi popraćeni odgovarajućim primjerima. Ukratko je navedeno potrebno predznanje za razumijevanje problema koji se rješava. Također, primjeri su riješeni primjenom matematičkog softwarea *SageMath* [3].

Određeni integral

Ne ulazeći u detalje, navedimo neke dobro poznate definicije i činjenice o određenom integralu [1,3].

Problem izračunavanja određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ uglavnom se svodi na pronalaženje primitivne funkcije F funkcije f ($F'(x) = f(x)$) i primjenu Newton-Leibnizove formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

¹Marijan Čančarević, Veleučilište suvremenih informacijskih tehnologija

²Ivica Čulina, Veleučilište Velika Gorica

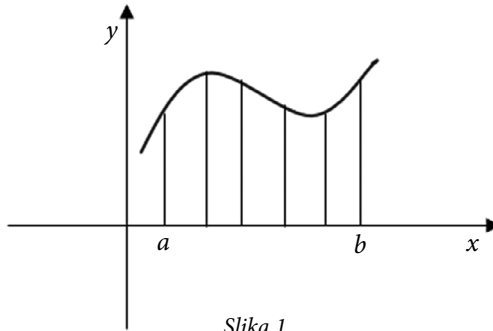
³Šimun Zlopaša, Veleučilište Velika Gorica

Postoji velik broj funkcija kao što su npr. $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, ... za koje primitivna funkcija F nije elementarna i nije moguće primijeniti formulu (1). Mnoge primitivne funkcije koje i nađemo dosta su složene. Na primjer,

$$\int \frac{dx}{8+x^3} = -\frac{1}{24} \ln(4-2x+x^2) + \frac{\sqrt{3}}{12} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\right) + \frac{1}{12} \ln(2+x) + C,$$

pa primjena formule (1) očito nije jednostavna. Također, funkcije koje su zadane tablično ili podatci koji su dobiveni mjerenjem ne mogu se integrirati Newton-Leibnitzovom formulom. U svim navedenim slučajevima određene integrale oblika $\int_a^b f(x)dx$ nalazimo pomoću metoda približne integracije.

Podsjetimo se da određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ geometrijski predstavlja algebarsku površinu pseudotrapeza određenog grafom funkcije f , pravcima $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ (Slika 1.). Ta činjenica može pomoći da se u nekim slučajevima pokuša stvarna vrijednost određenog integrala izračunati primjenom neke formule iz planimetrije.



Slika 1.

Newton-Cotesove formule

Problem koji želimo riješiti je naći približnu vrijednost $\int_a^b f(x)dx$. Prva ideja koja se nameće je da se podintegralna funkcija interpolira ili aproksimira polinomom, a potom se integracija funkcije svede na integraciju polinoma. Podsjetimo da za analitički nepoznatu funkciju kojoj su poznate vrijednosti $y_i = f(x_i)$ i

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

postoji jedinstven polinom L_n stupnja ne većeg od n koji ima svojstvo $L_n(x_i) = f(x_i)$ za svaki $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Navedena svojstva ima polinom koji se naziva Lagrangeov interpolacijski polinom, a njegov je oblik

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad (2)$$

gdje su

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}.$$

Za $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $x_n = b$ supstitucijom $x = x_0 + ph$ pomoćni polinomi l_i svode se na oblik

$$l_i(x) = \frac{p(p-1) \cdots (p-n)}{(p-i)(-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!},$$

odnosno, uz oznaku, $p^{(n+1)} = p(p-1) \cdots (p-n)$,

$$l_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{p^{(n+1)}}{(p-i)i!(n-i)!}. \quad (3)$$

Uvrstimo li (3) u (2) dobiva se

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i (-1)^{n-i} \frac{p^{(n+1)}}{(p-i)i!(n-i)!}.$$

Jednakost $f(x) = L_n(x) + R(x)$ daje

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b R(x) dx,$$

a približna vrijednost integrala iznosi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n y_i (-1)^{n-i} \frac{p^{(n+1)}}{(p-i)i!(n-i)!} \right) dx.$$

Označimo

$$A_i = \int_{x_0=a}^{x_n=b} (-1)^{n-i} \frac{p^{(n+1)}}{(p-i)i!(n-i)!} dx$$

i primijenimo li metodu supstitucije $x = x_0 + ph$, $dx = hdp$ na prethodni integral, dobiva se

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-i} dp.$$

Uzme li se u obzir da je $h = \frac{b-a}{n}$, izraz A_i može se zapisati u obliku

$$A_i = (b-a)H_i,$$

gdje su

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-i} dp.$$

Koeficijenti H_i poznati su pod nazivom Newton-Cotesovi koeficijenti, a odgovarajuće formule

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i \quad (4)$$

kao Newton-Cotesove formule.

Napomenimo da vrijede jednakosti: $H_i = H_{n-i}$ i $\sum_{i=0}^n H_i = 1$.

Greška aproksimacije nalazi se tako da se integrira greška aproksimacije funkcije Lagrangeovim interpolacijskim polinomom. Dakle,

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\alpha)(x-x_0) \cdots (x-x_n) dx, \quad \alpha \in [a, b].$$

Promotrimo dva posebna slučaja Newton-Cotesovih formula:

1) Za $n = 1$ dobiva se trapezna formula ili trapezno pravilo.

Imamo

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{p(p-1)}{p} dp = -\left(\frac{p^2}{2} - p\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

i

$$H_1 = \int_0^1 \frac{p(p-1)}{p-1} dp = \frac{p^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Prema (4) dobiva se

$$\int_{a=x_0}^{b=x_1} f(x) dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1 \right) = \frac{b-a}{2} (y_0 + y_1) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1), \quad (5)$$

odnosno

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) + R_1.$$

Ako funkcija ima sve derivacije u okolini točke x_0 , grešku aproksimacije R_1 možemo naći tako da razvijemo funkciju f u Taylorov red u točki x_0 i potom integriramo član po član. Imamo

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \cdots \right) dx \\ &= f(x_0)(x_1-x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{(x_1-x_0)^2}{2} + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot \frac{(x_1-x_0)^3}{3} + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot \frac{(x_1-x_0)^4}{4} + \cdots \\ &= y_0 h + f'(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + f''(x_0) \frac{h^3}{6} + f'''(x_0) \frac{h^4}{24} + \cdots. \end{aligned}$$

Također,

$$y_1 = f(x_0 + h) = y_0 + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \cdots.$$

Nadalje je

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1) = -f''(x_0) \frac{h^3}{12} - f'''(x_0) \frac{h^4}{24} - \cdots.$$

Iz prethodne jednakosti zaključujemo da se greška aproksimacije može prikazati u obliku

$$R_1 = -\frac{h^3}{12} f''(\theta), \quad x_0 < \theta < x_1.$$

2) Za $n = 2$ dobiva se Simpsonova formula ili Simpsonovo pravilo. Newton-Cotesovi koeficijenti su:

$$H_0 = H_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^2 \frac{p(p-1)(p-2)}{p} dp = \frac{1}{4} \left(\frac{p^3}{3} - 3 \frac{p^2}{2} + 2p \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{p(p-1)(p-2)}{p-1} dp = -\frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{3} - 2 \frac{p^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Primjenom formule (4) dobiva se

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right) = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (6)$$

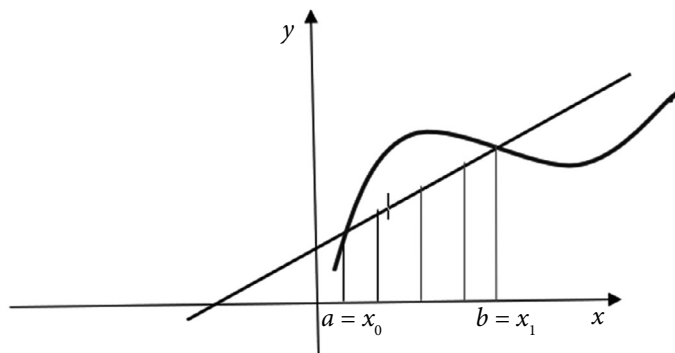
Navedimo bez dokaza da greška aproksimacije R_2 iznosi

$$R_2 = -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\theta) \quad x_0 < \theta < x_2.$$

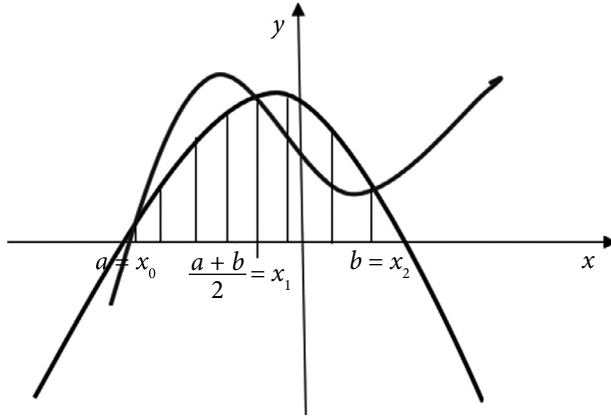
Dodajmo da smo do trapezne formule mogli doći tako da podintegralnu funkciju zamijenimo polinomom

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$$

i integriramo. Također, moglo se i geometrijski doći do istog rezultata tako da se površina pseudotrapeza izračuna formulom za površinu trapeza (Slika 2.). Simpsonova formula može se dobiti integriranjem Lagrangeovog interpolacijskog polinoma L_2 pri čemu su čvorovi točke $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ (Slika 3.).



Slika 2.



Slika 3.

Za veću točnost kod trapezne formule segment integracije $[a, b]$ dijeli se na n jednakih dijelova točkama $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ i na svakom od intervala $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$ primijeni formula (5). Tako se dobiva opća trapezna formula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})).$$

Greška aproksimacije primjenom opće trapezne formule iznosi:

$$R_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\alpha), \quad \alpha \in \langle a, b \rangle,$$

odnosno apsolutna je granična greška

$$|R_n| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M_2, \quad M_2 = \max |f''(x)|, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Za opću Simpsonovu formulu segment $[a, b]$ dijeli se na paran broj n jednakih dijelova točkama $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$, te se na svakom od intervala $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $\dots$, $[x_{2n-2}, x_{2n}]$ primijeni formula (6). Tako opća Simpsonova formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})).$$

Greška aproksimacije primjenom opće Simpsonove formule iznosi:

$$R_n = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{iv}(\alpha), \quad \alpha \in \langle a, b \rangle,$$

a apsolutna granična greška

$$|R_n| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M_4, \quad M_4 = \max |f^{iv}(x)|, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Napomenimo da se za procjenu greške integracije koristi i tzv. Rungeov princip. Uz pretpostavku da druga derivacija podintegralne funkcije kod trapezne, a četvrta kod Simpsonove nisu posebno brze na intervalu integracije, grešku integracije možemo zapisati u obliku

$$R = L \cdot h^n, n \in \{2, 4\}.$$

Tako je integral s korakom h jednak $I = I_h + Lh^n$, a integral s korakom $2h$ iznosi $I = I_{2h} + L(2h)^n$. Izjednačavanjem dobivamo

$$I_h + Lh^n = I_{2h} + L(2h)^n$$

$$Lh^n(2^n - 1) = I_h - I_{2h}$$

$$R = \frac{I_h - I_{2h}}{2^n - 1}.$$

Rungeov princip za procjenu greške integracije kod trapezne formule daje

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{3},$$

a kod Simpsonove formule

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{15}.$$

Primjer 1. Izračunajmo i procijenimo grešku za $\int_{2.2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 1}}$, $n = 8$ primjenom 1) trapezne, 2) Simpsonove formule. Računajmo sa šest decimala.

Rješenje: 1) Uz $h = \frac{3 - 2.2}{8} = 0.1$, $x_0 = 2.2$, $x_1 = 2.3$, ..., $x_8 = 3$, dobivamo

$$y_0 = \frac{dx}{\sqrt{3 \cdot 2.2^2 - 1}} \approx 0.271964,$$

$$y_1 = \frac{dx}{\sqrt{3 \cdot 2.3^2 - 1}} \approx 0.259325.$$

Nastavljajući dobivamo podatke prikazane Tablicom 1.

x_i	$y_{0,n}$	y_d
2.2	0.271964	
2.3		0.259325
2.4		0.247841
2.5		0.237356
2.6		0.227744
2.7		0.218896
2.8		0.210725
2.9		0.203153
3.0	0.196116	
Σ	0.468080	1.605040

Tablica 1.

Prema općoj trapeznoj formuli $\int_{2.2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}} \approx I$, gdje je

$$I = \frac{0.1}{2} (0.468080 + 2 \cdot 1.605040) = 0.183908.$$

Za procjenu greške treba nam druga derivacija:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (3x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x = -3x (3x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3x}{(3x^2 - 1)\sqrt{3x^2 - 1}}$$

$$f''(x) = -3 \left((3x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) (3x^2 - 1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 6x \right) = \dots = -\frac{3(6x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)^2 \sqrt{3x^2 - 1}}.$$

Funkcija f'' nema ekstrema (brojnik veći od nule za svaki realan broj x). Funkcija f'' raste ili pada na cijeloj domeni. Odredimo njezinu derivaciju

$$f'''(x) = \left(-\frac{3(6x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)^2 \sqrt{3x^2 - 1}} \right)' = \dots = -\frac{81x(2x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)^3 \sqrt{3x^2 - 1}}.$$

Funkcija f'' je neprekidna, pada na segmentu $[2.2, 3]$ i svoju maksimalnu vrijednost prima u točki $x = 2.2$. Kako je $f''(2.2) = 0.13408$, možemo uzeti da je $M_2 = 0.135$.

Uvrstimo li poznate vrijednosti u

$$|R_n| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2,$$

dobiva se

$$|R_8| \leq \frac{3-2.2}{12} \cdot 0.1^2 \cdot 0.135 = 0.00009$$

2)

x_i	$y_{0,n}$	y_n	y_p
2.2	0.271964		
2.3		0.259325	
2.4			0.247841
2.5		0.237356	
2.6			0.227744
2.7		0.218896	
2.8			0.210725
2.9		0.203153	
3.0	0.196116		
Σ	0.468080	0.918730	0.686310

Tablica 2.

Simpsonova formula daje

$$I = \frac{0.1}{3} (0.468080 + 4 \cdot 0.918730 + 2 \cdot 0.686310) = 0.183854.$$

Procijenimo točnost primjenom Rungeovog principa. Udvostručimo korak h s 0.1 na 0.2. Potrebne podatke (Tablica 3.) imamo u Tablici 2.

x_i	$y_{0,n}$	y_n	y_p
2.2	0.271964		
2.4		0.247841	
2.6			0.227744
2.8		0.210725	
3.0			
Σ	0.468080	0.458566	0.227744

Tablica 3.

$$I_{2h} = \frac{0.2}{3} (0.468080 + 4 \cdot 0.458566 + 2 \cdot 0.227744) = 0.183855.$$

Prema Rungeovom principu je

$$|R| = \frac{|0.183854 - 0.183855|}{15} = 6.6666 \dots \cdot 10^{-8} < 6.7 \cdot 10^{-8}.$$

Točna vrijednost integrala je 0.18385400626... Izračunati rezultati pokazuju da su sve znamenke dobivene Simpsonovom formulom točne. To je očekivano. Za većinu podintegralnih funkcija bolje se aproksimacije dobivaju primjenom Simpsonove formule. Razlog tome je viši stupanj Lagrangeovog interpolacijskog polinoma.

Primjer 2. Primjenom trapezne formule treba izračunati integral $\int_{2.1}^3 \frac{xdx}{\ln x}$ s točnošću $\varepsilon = 0.01$.

Rješenje: Da bismo mogli primijeniti trapeznu formulu, nedostaje nam prirodni broj n koji određuje na koliko se dijelova dijeli interval integracije za zadanu točnost i pomoću kojeg se određuje korak h . Do traženog podatka može se doći rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 \leq \varepsilon, \text{ to jest}$$

$$\frac{b-a}{12} \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot M_2 \leq \varepsilon,$$

odakle dobivamo

$$n^2 \geq \frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}.$$

Najprije nađimo prvu i drugu derivaciju podintegralne funkcije.

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x} \ln x (\ln x - 2 \ln x + 2)}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Stacionarna točka druge derivacije je e^2 i nalazi se izvan intervala $[2, 1.3]$. Ispitajmo monotonost druge derivacije. Nađimo njezinu derivaciju

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x \ln^3 x - (2 - \ln x) \cdot \left(\ln^3 x + x \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \right)}{x^2 \ln^6 x} = \dots = \frac{\ln^2 x - 6}{x^2 \ln^4 x}.$$

Lako se vidi da je $f'''(x) < 0$ za svaki $x \in [2, 1.3]$. Zaključujemo da funkcija f'' pada na tom intervalu i postiže najveću vrijednost u lijevom rubu intervala. Kako je $f''(2.1) = 1.466836$, možemo uzeti da je $M_2 = 1.47$. Uvrstimo li poznate podatke u nejednadžbu

$$n^2 \geq \frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}$$

dobivamo

$$n^2 \geq \frac{(3-2.1)^3 \cdot 1.47}{12 \cdot 0.01}.$$

Nakon korjenovanja dobiva se $n \geq 2.988352$, odnosno $n = 3$. Sada nam preostaje da primijenimo trapeznu formulu.

	$y_{0,n}$	y_d
2.1	2.830	
2.4		2.741
2.7		2.718
3.0	2.731	
Σ	5.561	5.459

$$\int_{2.1}^3 \frac{xdx}{\ln x} \approx \frac{0.3}{2} (5.561 + 2 \cdot 5.459) = 2.47185.$$

SageMath programi za numeričku integraciju

Primjenom računala i nekog od mnogo dostupnih matematičkih softvera, uz poznavanje osnova programiranja, sva prethodna računanja uvelike se pojednostavljaju i olakšavaju rad. Time se izbjegava nastanak grešaka pri unosu velikog broja podataka, izračuna i uvrštavanja u odgovarajuće formule. Uglavnom, programski paketi već sadrže neke funkcije i metode i korisniku je dovoljno unijeti parametre i tako riješiti problem numeričke integracije. U ovom radu stvorit ćemo vlastite programe u SageMath programu i pomoću njih riješiti prethodno riješene primjere.

Primjer 3. Pomoću *SageMath* softvera izračunajmo i procijenimo grešku za $\int_{2.2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$, $n = 8$ primjenom 1) trapezne, 2) Simpsonove formule. Računajmo sa šest decimala.

Rješenje:

1. Izračunavanje integrala trapeznom formulom:

```
Var. ( 'x' )
f(x)=1/sqrt(3*x^2-1)
a=2.2
b=3.0
n=8
I=f(a).n(digits=6)+(f(b)).n(digits=6)
h=(b-a)/n
for k in range(n-1):
    x=a+(k+1)*h
    I=I+2*(f(x)).n(digits=6)
I=h/2*I
print(I).n(digits=6)
0.183908
```

2. Procjena greške (analiza kao u Primjeru 1):

```
f(x)=1/sqrt(3*x^2-1)
d1=diff(f(x),x)
d2=diff(f(x),x,2)
d3=diff(f(x),x,3)
d2(x=2.2).n(digits=10),(3-2.2)*0.135*0.1^2/12
(0.1340847708, 0.00009000000000000000)
```

2) Izračunavanje integrala Simpsonovom formulom

```
f(x)=1/sqrt(3*x^2-1)
a=2.2
b=3.0
n=8
I=f(a).n(digits=6)+(f(b)).n(digits=6)
h=(b-a)/n
for k in range(n-1):
    x=a+(k+1)*h
    if ((k+1)%2)==0:
        I=I+2*f(x).n(digits=6)
    else:
        I=I+4*f(x).n(digits=6)
I1=(h/3*I).n(digits=6)
```

```

print('I1={0}'.format(I1))
I1=0.183854

2. Procjena greške – Rungeov princip
f(x)=1/sqrt(3*x^2-1)
a=2.2
b=3.0
n=4
I=f(a).n(digits=6)+(f(b)).n(digits=6)
h=(b-a)/n
for k in range(n-1):
    x=a+(k+1)*h
    if ((k+1)%2)==0:
        I=I+2*f(x).n(digits=6)
    else:
        I=I+4*f(x).n(digits=6)
I2=(h/3*I).n(digits=6)
print('I2={0}'.format(I2))
I2=0.183855
R=abs(0.183855-0.183854)/15;R1=abs(I1-I2)/15
(6.66666666667333e-8, 0.000000)

```

Primjer 4. Pomoću SageMath softvera primjenom trapezne formule treba izračunati integral $\int_{2.1}^3 \frac{xdx}{\ln x}$ s točnošću $\varepsilon = 0.01$.

Rješenje:

```

f(x)=x/log(x)
d1=diff(f(x),x)
d2=diff(f(x),x,2)
d3=diff(f(x),x,3)
print(factor(d1))
print(factor(d2))
print(factor(d3))

(log(x) - 1)/log(x)^2
-(log(x) - 2)/(x*log(x)^3)
(log(x)^2 - 6)/(x^2*log(x)^4)

```

Očito je treća derivacija d3 negativna na intervalu integracije [2.1, 3] (brojnik je negativan, a nazivnik pozitivan za sve $x \in [2.1, 3]$). Negativna treća derivacija pokazuje da je druga derivacija d2 strogo padajuća na tom intervalu i svoj maksimum postiže u lijevom rubu intervala.

```

d2(x=2.1)
1.46683505971423

```

```

var('n')
solve(n>=sqrt((3.-2.1)^3*1.47/(12.*0.01)),n)
[[n >= (12315/4121)]]
n =int(12315/4121)+1
n
3
var('x')
f(x)=x/log(x)
a=2.1
b=3.0
n=3
I=f(a).n(digits=4)+(f(b)).n(digits=4)
h=(b-a)/n
for k in range(n-1):
    x=a+(k+1)*h
    I=I+2*(f(x)).n(digits=4)
I=h/2*I
print(I).n(digits=4)
2.472

```

Zaključak

Jedan od autora više je godina nositelj kolegija Primijenjena i numerička matematika na Veleučilištu suvremenih informacijskih tehnologija u Zagrebu (VSITE). Među sadržajima koji se obrađuju je numerička integracija, a namjera je ovim radom podijeliti vlastita iskustva s čitateljima časopisa *Poučak*. Koncept rada odgovara realnom načinu izvođenja nastave. Najprije se na predavanjima obradi teorijski dio, a zatim se na primjerima klasičnim načinom primijene uvedene metode. Na laboratorijskim vježbama slijedi izrada softvera (*SageMath*) i potom njegova primjena u rješavanju konkretnih zadataka iz područja numeričke integracije. Na ovaj način organizirana nastava kroz predavanja osigurava razumijevanje gradiva, a primjena suvremenih tehnologija bitno olakšava rješavanje problema iz područja numeričke integracije. Osim toga, ovi me je ostvarena povezanost matematičkog kolegija i sadržaja struke (programiranje).

Literatura:

1. B. Čulina, Š. Zlopaša, *Matematika za tehničke visoke škole, peti dio: Višedimenzionalna matematika promjena*, Veleučilište Velika Gorica, 2015.
2. S. Kurepa, *Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli*, Golden marketing – Tehnička knjiga. 1989.
3. *SageMath*, <https://www.sagemath.org/>
4. G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume I, Siam, USA, 2008.