

Problem traženja primitivne funkcije za Newton-Leibnizovu formulu

GORAN KOVAČEVIĆ¹

Sažetak

U radu se najprije analizira jedan primjer određenog integrala u kojemu dobivena primitivna funkcija nije neprekidna na cijelom području integracije, što onemogućuje izravnu primjenu Newton-Leibnizove formule. Pričom o studentu Mati prikazana je pogrešna primjena formule i ispravno rješenje integrala. U drugom, složenijem primjeru određenog integrala s trigonometrijskim funkcijama, izvedena je formula primitivne funkcije za koju vrijedi Newton-Leibnizova formula na svakom području integracije. Drugi primjer detaljno opisuje pravilan način rješavanja jednog integrala s trigonometrijskim funkcijama koji se u nastavi često zanemaruje ili namjerno izbjegava zbog potrebnog predznanja o periodičnosti trigonometrijskih funkcija. Rad bi mogao poslužiti studentima i nastavnicima jer opisuje ispravan postupak traženja primitivne funkcije za koju će vrijediti Newton-Leibnizova formula na svakom smislenom području integracije.

Ključne riječi: *(ne)određeni integral, Newton-Leibnizova formula, neprekidnost funkcije, primitivna funkcija, funkcija najveće cijelo, integracija trigonometrijskih funkcija*

Newton-Leibnizova formula

Postoje dva oblika Newton-Leibnizova teorema – oblik koji postavlja uvjete na primitivnu funkciju F i oblik koji navodi uvjete za podintegralnu funkciju f . U ovom radu se koristi prvi oblik koji glasi:

ako je funkcija F neprekidna na $[a, b]$, derivabilna na $\langle a, b \rangle \setminus S$, gdje je S prazan ili konačan skup, i $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b \rangle \setminus S$, onda vrijedi Newton-Leibnizova formula:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

¹Goran Kovačević, Pomorski fakultet u Splitu, Sveučilište u Splitu

Što ako primitivna funkcija nije neprekidna?

Mate, student jednog tehničkog fakulteta, za jedan se ispit iz matematike relativno kratko pripremao. Ipak, bio je optimističan nakon ispita jer je bio riješio 3 od 6 zadataka. Bio je siguran da je 2 zadatka točno riješio jer su ista rješenja dobili i kolege koji su s njim izašli na ispit. U preostalom riješenom zadatku, trebalo je izračunati $\int_1^{10} \lfloor x \rfloor dx$ primjenom Newton-Leibnizove formule. Taj zadatak Mate je brzo riješio, smatrao ga je prejednostavnim pa je na njega zaboravio i nije o njemu raspravljao s kolegama.

U rješavanju tog zadatka, Mate je zaključivao na sljedeći način.

Koristeći definiciju funkcije najveće cijelo, prema kojoj je

$$\lfloor x \rfloor = n \text{ ako je } n \leq x < n+1 \text{ za neki } n \in \mathbb{N},$$

primitivnu funkciju F funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$ možemo naći rješavanjem neodređenog integrala

$$\int \lfloor x \rfloor dx.$$

Dakle,

$$\int \lfloor x \rfloor dx = \int n dx = n \int dx = nx + C = \lfloor x \rfloor x + C,$$

pa je $F(x) = \lfloor x \rfloor x$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Primjenom Newton-Leibnizove formule, Mate je dobio

$$\int_1^{10} \lfloor x \rfloor dx = F(10) - F(1) = \lfloor 10 \rfloor 10 - \lfloor 1 \rfloor 1 = 100 - 1 = 99,$$

te je bio uvjeren da je to i točno rješenje zadatka.

Međutim, kasnije se, kad se sjetio tog zadatka i odlučio ipak provjeriti dobiveno rješenje, neugodno iznenadio. Naime, *Wolfram Mathematica* – moćan softverski alat za simboličko i numeričko računanje, pokazao mu je sljedeći rezultat:

$$\int_1^{10} \lfloor x \rfloor dx = 45.$$

S obzirom da nije mogao naći grešku u svom zaključivanju, pomislio je da se vjerojatno radi o nekom softverskom *bugu*. I dalje je vjerovao da će položiti ispit. Nakon objavljenih rezultata, saznao je da nije položio. Smatrao je da ga je profesorica, kod ocjenjivanja, sigurno negdje neopravdano zakinula pa je odlučio otići na uvid. Tek na uvidu potonule su mu sve nade da će na tom roku položiti.

U nastavku ćemo opisati što je Mate naučio na uvidu i gdje je pogriješio u zaključivanju dok je rješavao problematični zadatak.

Mate jest našao primitivnu funkciju funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ali problem je u tome što nije znao da primitivna funkcija F , za koju vrijedi Newton-Leibnizova formula,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

mora biti neprekidna na intervalu integracije $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$. Funkcija $F(x) = \lfloor x \rfloor x$, koju je dobio Mate, jest neprekidna zdesna u svakoj realnoj točki, ali nije neprekidna slijeva u točkama $x = n$ za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jer je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} \lfloor c \rfloor x = \lfloor c \rfloor c = F(c), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow c^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} \lfloor c \rfloor x = \lfloor c \rfloor c = F(c), \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i

$$\lim_{x \rightarrow n^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-1)x = (n-1)n = \lfloor n-1 \rfloor n \neq \lfloor n \rfloor n = F(n)$$

za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Dakle, za Matinu funkciju $F(x) = \lfloor x \rfloor x$ vrijedit će Newton-Leibnizova formula samo ako je, ili isključivo $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \subset [-1, 1]$ ili isključivo $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \subset [k, k+1]$ za točno jedan $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.

Gdje je zapravo Mate pogriješio? Nije koristio limese, a morao je jer je dobio funkciju koja nije neprekidna na području integracije. O tome detaljnije u nastavku jer nam je važnije najprije dati odgovor na jedno drugo pitanje.

Znamo da je podintegralna funkcija neprekidna u svakoj točki skupa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pa bismo željeli naći primitivnu funkciju koja je derivabilna u svakoj točki tog skupa.

Podintegralna funkcija je i neprekidna zdesna na skupu $\mathbb{Z}$ pa tražimo primitivnu funkciju koja bi bila derivabilna zdesna na $\mathbb{Z}$.

Da li je moguće naći takvu primitivnu funkciju koja će biti derivabilna u svakoj točki skupa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i derivabilna zdesna na skupu $\mathbb{Z}$ (dakle, i neprekidna na skupu $D_f = \mathbb{R}$)?

Mate je na uvidu saznao sljedeće bitne detalje.

Takva funkcija sigurno postoji. Naime, skup točaka prekida podintegralne funkcije na svakom segmentu skup je mjere nula pa je podintegralna funkcija integrabilna na svakom segmentu. Za takvu primitivnu funkciju vrijedit će Newton-Leibnizova formula za bilo koji izbor $a, b \in \mathbb{R}$. S obzirom da znamo da je $D_f = \mathbb{R}$, možemo izabrati bilo koju točku $c \in D_f$, pa primitivnu funkciju potražiti pomoću formule

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Tako definirana funkcija F sigurno je neprekidna na $\mathbb{R}$ jer je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \int_c^{x_0} f(t) dt = F(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Uzmimo da je $c = 0$ pa odredimo funkciju F za $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Uz pretpostavku da je $x \in [n, n+1]$ za neki $n \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor dt + \int_n^x \lfloor t \rfloor dt = \sum_{k=0}^{n-1} k \int_k^{k+1} dt + n \int_n^x dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) + n(x-n) = \sum_{k=0}^{n-1} k + n(x-n) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + nx - n^2 = nx - \frac{n(n+1)}{2} = \lfloor x \rfloor x - \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Slično se može pokazati da se ista formula za F dobije ako se uzme $x \in [-(n+1), -n]$ za neki $n \in \mathbb{N}_0$.

Nije teško vidjeti da je dobivena funkcija F neprekidna zdesna u svakoj točki skupa $\mathbb{R}$.

Provjerimo da li je neprekidna i slijeva u svakoj cjelobrojnoj točki n .

Iz

$$\lim_{x \rightarrow n^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} \left[(n-1)x - \frac{(n-1)n}{2} \right] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

i

$$F(n) = n \cdot n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} [2n - (n+1)] = \frac{n(n-1)}{2}$$

zaista slijedi

$$\lim_{x \rightarrow n^-} F(x) = F(n).$$

Ako je $x \in \langle n, n+1 \rangle$ za neki $n \in \mathbb{Z}$, onda je

$$F(x) = nx - \frac{n(n+1)}{2}$$

pa je očito

$$F'(x) = n = \lfloor x \rfloor = f(x).$$

Pokažimo da je F derivabilna zdesna u svakoj točki $x = n$, gdje je $n \in \mathbb{Z}$, tj. da je

$$F'_d(n) = f(n).$$

$$\begin{aligned} F'_d(n) &= \lim_{u \rightarrow n^+} \frac{F(n+u) - F(n)}{u} = \lim_{u \rightarrow n^+} \frac{n(n+u) - \frac{n(n+1)}{2} - n \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow n^+} \frac{nu}{u} = n = \lfloor n \rfloor = f(n). \end{aligned}$$

Možemo odrediti i lijevu derivaciju F' funkcije F u istim točkama.

$$\begin{aligned}
 F'_l(n) &= \lim_{u \rightarrow n^-} \frac{F(n+u) - F(n)}{u} = \lim_{u \rightarrow n^-} \frac{(n-1)(n+u) - \frac{(n-1)n}{2} - n \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}}{u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow n^-} \frac{(n-1)u}{u} = n-1 = n-1 = f(n-1).
 \end{aligned}$$

Kao što vidimo, funkcija F nije derivabilna u cjelobrojnim točkama jer je

$$F'_d(n) \neq F'_l(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Na kraju, možemo zaključiti da za funkciju

$$F(x) = \lfloor x \rfloor x - \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2}$$

vrijedi

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor dt = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

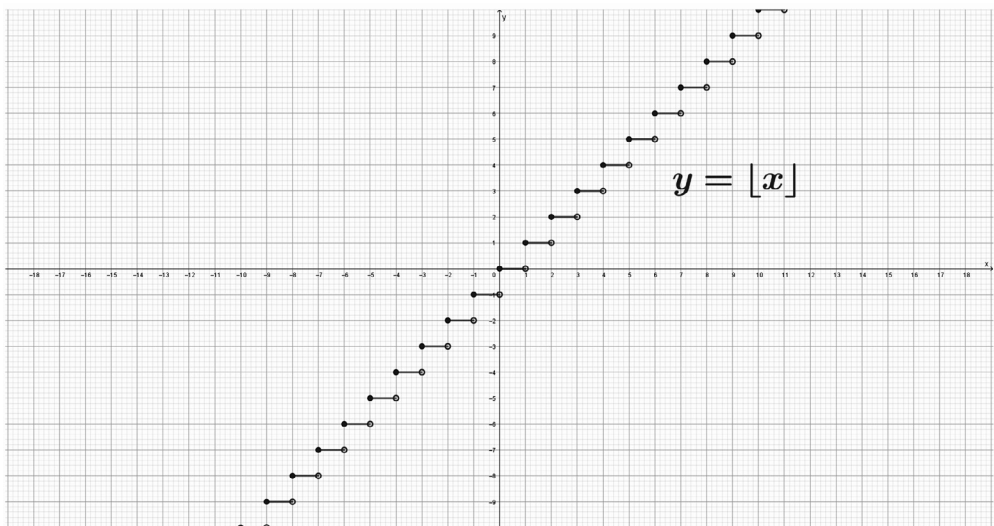
pa za nju vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b \lfloor t \rfloor dt = F(b) - F(a)$$

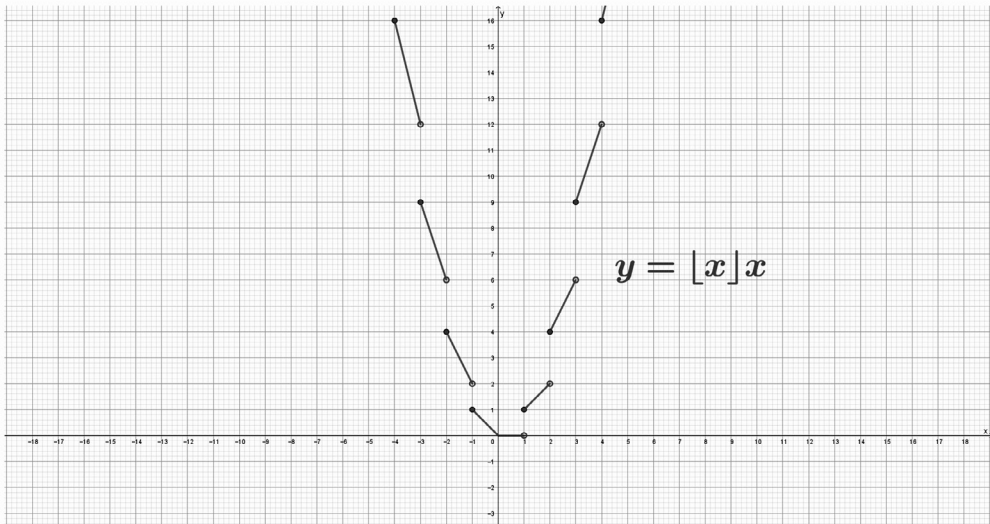
za svaki izbor realnih točaka a i b .

Slika 1. prikazuje graf podintegralne funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$, Slika 2. graf Martine funkcije $F_M(x) = \lfloor x \rfloor x$, a Slika 3. graf neprekidne primitivne funkcije

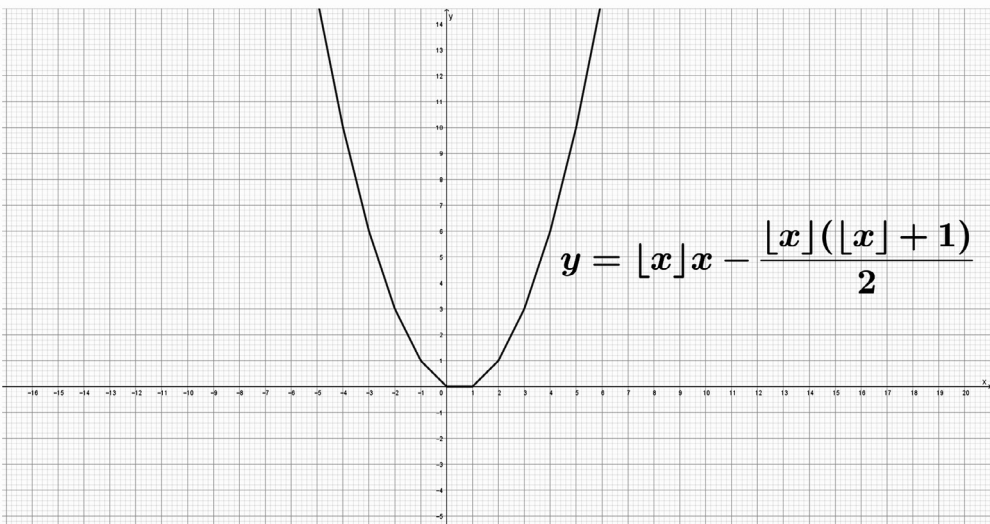
$$F(x) = \lfloor x \rfloor x - \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2}.$$



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Riješimo sada, bez greške, zadatak s ispita.

Za funkciju

$$F(x) = [x]x - \frac{[x]([x] + 1)}{2}$$

vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b [x] dx = F(b) - F(a)$$

za bilo koji izbor $a, b \in \mathbb{R}$. Stoga je

$$\int_1^{10} \lfloor x \rfloor dx = F(10) - F(1) = 10 \cdot 10 - \frac{10 \cdot 11}{2} - 1 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 100 - 55 = 45.$$

Koji mjesec kasnije Mate se sjetio da je zadatak ipak mogao točno riješiti i primjenom Newton-Leibnizove formule na funkciju koju je sam našao na ispitu. Ako se uzme da je

$$F(x) = \lfloor x \rfloor x,$$

onda se moraju koristiti lijevi limesi na gornjim cjelobrojnim granicama integrala jer je njegova funkcija F neprekidna zdesna, ali nije neprekidna slijeva.

U tom slučaju, imamo

$$\begin{aligned} \int_1^{10} \lfloor x \rfloor dx &= \sum_{n=1}^9 \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor dx = \sum_{n=1}^9 \lim_{b \rightarrow (n+1)^-} \int_n^b \lfloor x \rfloor dx = \sum_{n=1}^9 n \cdot \lim_{b \rightarrow (n+1)^-} \int_n^b dx \\ &= \sum_{n=1}^9 n \lim_{b \rightarrow (n+1)^-} (b - n) = \sum_{n=1}^9 n(\cancel{n} + 1 - \cancel{n}) = \sum_{n=1}^9 n = \frac{9(1+9)}{2} = 45. \end{aligned}$$

Jedan kompliciraniji primjer

Za sljedeći ispitni rok Mate se izvrsno pripremio te je ugodno iznenadio profesoricu jer je jedini riješio najteži zadatak s ispita. U zadatku je trebalo izračunati vrijednost integrala

$$I = \int_{100}^{51\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}$$

primjenom Newton-Leibnizove formule.

Mate je vjerojatno razmišljao ovako.

Prirodna domena podintegralne funkcije $f(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$ je skup $D_f = \mathbb{R}$ i ta funkcija je očito, kao kvocijent dviju neprekidnih funkcija, i sama neprekidna. Stoga fima primitivnu funkciju F koja je derivabilna na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Tražit ćemo takvu funkciju F .

Najprije ćemo naći restrikciju F_0 funkcije F na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ primjenom supstitucije $\tan \frac{x}{2} = t$ u neodređenom integralu $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= F \Big|_{\langle -\pi, \pi \rangle} (x) = \int \frac{dx}{3 + \sin x} = \left[\begin{array}{l} \tan \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \arctan t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{3t^2 + 2t + 3} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C_0$$

Uzet ćemo da je $C_0 = 0$, tj. da je

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

Komentar: Sada se zadani integral može riješiti rastavljanjem početnog intervala integracije na više podintervala. Linearnom supstitucijom svaki integral po intervalu $\langle -\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ za neki $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ prelazi u integral po intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Tako dobivamo nepravne integrale koje možemo riješiti korištenjem dobivene formule za F_0 . U nastavku rada cilj je pokazati da je moguće pronaći primitivnu funkciju funkcije f koja je derivabilna na cijelom području integracije zadanog integrala, što-više čak na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Funkciju F_0 napisat ćemo pomoću funkcija sinus, kosinus i arkus sinus jer ćemo tako moći ukloniti neugodne prekide na rubovima intervala $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u kojima funkcija $x \rightarrow \tan \frac{x}{2}$ nije definirana). Pritom ćemo koristiti trigonometrijske formule

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1, \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$$

činjenicu da je $\cos \frac{x}{2} > 0$ za $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ i formulu

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

koja vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\frac{3 \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + 1}{\frac{\cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \frac{\left(3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{8 \cos^2 \frac{x}{2}}}} \end{aligned}$$

Lako se provjeri da je zadnjom formulom domena funkcije F_0 proširena i na točke $x = \pm\pi$.

Naime, vrijedi

$$F_0(\pm\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{9 + 3 \sin(\pm\pi)}} = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Sada supstitucijom $x = t + 2k\pi$ za $t \in [-\pi, \pi]$ i $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ u integralu $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$ možemo dobiti restrikciju F_k tražene primitivne funkcije F na bilo koji interval oblika $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$:

$$\begin{aligned} F_k(x) &= F \Big|_{[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]}(x) = \int \frac{dx}{3 + \sin x} \Bigg|_{x=t+2k\pi}^{x=t+2k\pi} = \int \frac{dt}{3 + \sin(t + 2k\pi)} \\ &= \int \frac{dt}{3 + \sin t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin t}} + C_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x - 2k\pi}{2} + \cos \frac{x - 2k\pi}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin(x - 2k\pi)}} + C_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin\left(\frac{x}{2} - k\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - k\pi\right)}{\sqrt{9 + 3 \sin(x - 2k\pi)}} + C_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \cdot (-1)^k \sin \frac{x}{2} + (-1)^k \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + C_k. \end{aligned}$$

Određujemo konstante C_k takve da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F_k(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} F_{k+1}(x).$$

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F_k(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} \left[\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + C_k \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k$$

i

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} F_{k+1}(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + C_{k+1} \right] = C_{k+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

iz

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F_k(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} F_{k+1}(x)$$

slijedi

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = C_{k+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

odnosno

$$C_{k+1} - C_k = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Stoga za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$C_k = C_k - C_0 = (C_k - C_{k-1}) + (C_{k-1} - C_{k-2}) + \dots + (C_1 - C_0) = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

pa je restrikcija tražene funkcije F na interval $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ za $k \in \mathbb{Z}$ zadana formulom

$$F_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}.$$

Zbog neprekidnosti funkcija F_k , jasno je da F ne može biti dvoznačna u točkama oblika $x = \pi + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. To se lako provjeri. Naime, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ je

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F_k(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

i

$$\begin{aligned} F_k(\pi + 2k\pi) &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} + \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin(\pi + 2k\pi)}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\sqrt{9 + 3 \sin(\pi + 2k\pi)}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3 \cdot (-1)^k + 0}{\sqrt{9 + 3 \cdot 0}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \arcsin(-1)^k + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2}} \arcsin 1 + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F_k(x) = F_k(\pi + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} F_{k+1}(x).$$

Dakle, F je funkcija, neprekidna na $\mathbb{R}$ i vrijedi

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Provjerimo još da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$F'(\pi + 2k\pi) = f(\pi + 2k\pi).$$

Funkcija f je neprekidna pa je

$$F'_d(\pi + 2k\pi) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{F(\pi + 2k\pi + u) - F(\pi + 2k\pi)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{F_{k+1}(\pi + 2k\pi + u) - F(\pi + 2k\pi)}{u}$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right]^{\text{LHP}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} F'_{k+1}(\pi + 2k\pi + u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f(\pi + 2k\pi + u) = f(\pi + 2k\pi)$$

i

$$F'_l(\pi + 2k\pi) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{F(\pi + 2k\pi + u) - F(\pi + 2k\pi)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{F_k(\pi + 2k\pi + u) - F(\pi + 2k\pi)}{u}$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right]^{\text{LHP}} = \lim_{u \rightarrow 0^-} F'_k(\pi + 2k\pi + u) = \lim_{u \rightarrow 0^-} f(\pi + 2k\pi + u) = f(\pi + 2k\pi).$$

Stoga je i

$$F'(\pi + 2k\pi) = f(\pi + 2k\pi).$$

Jednakost $\stackrel{\text{LHP}}{=}$ kod računanja prethodna dva limesa označava primjenu L'Hospitalova pravila.

Znamo da je $x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ako i samo ako je $k = \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor$.

Prema tome, tražena funkcija je

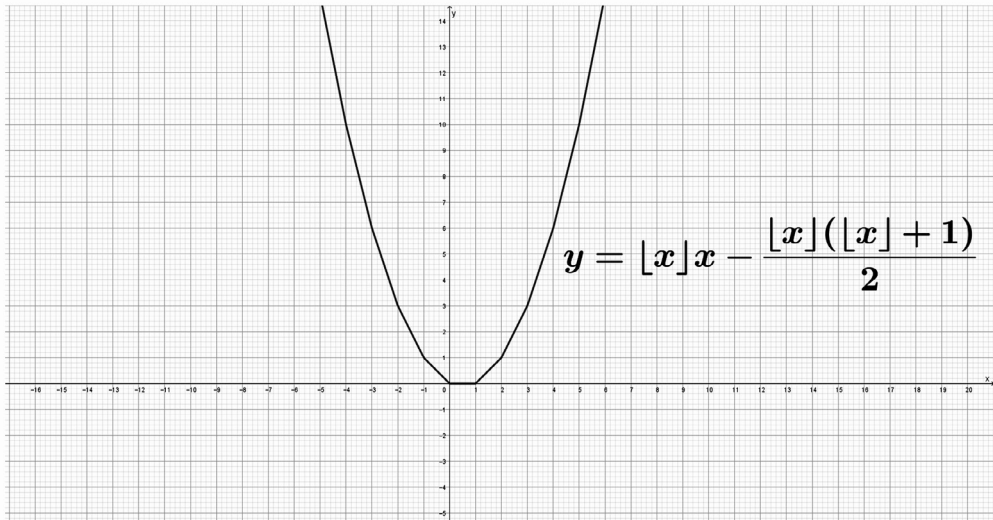
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{\left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor \pi \right).$$

Slika 4. prikazuje GeoGebrine grafove funkcija

$$y = \frac{1}{3 + \sin x}$$

i

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{\left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor} \arcsin \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{9 + 3 \sin x}} + \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor \pi \right).$$



Slika 4.

Iz Slike 4. vidi se da je graf funkcije F glatka krivulja, što potvrđuje da je F derivabilna funkcija. Vidimo da je F i strogo rastuća funkcija; mora biti takva jer je njena derivacija, tj. funkcija $f(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$, strogo pozitivna na cijeloj domeni.

Na samom kraju, izračunajmo

$$\int_{100}^{51\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}$$

primjenom Newton-Leibnizove formule na dobivenu funkciju F :

$$\begin{aligned} \int_{100}^{51\pi} \frac{dx}{3 + \sin x} &= F(51\pi) - F(100) = \frac{51\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arcsin \frac{3\sin 50 + \cos 50}{\sqrt{9 + 3\sin 100}} + 16\pi \right) \\ &= \frac{19\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{3\sin 50 + \cos 50}{\sqrt{9 + 3\sin 100}} \approx 21.0576844562785. \end{aligned}$$

Wolfram Mathematica 13.2 (programski kod za provjeru rješenja):

```
F[x_] = ((-1) ^ Floor[(x + π) / (2 π)] ArcSin[(3 Sin[x/2] + Cos[x/2]) / Sqrt[9 + 3 Sin[x]]] + Floor[(x + π) / (2 π)] π) / Sqrt[2];
a = 100;
b = 51π;
c = Integrate[1 / (3 + Sin[x]), {x, a, b}];
d = FullSimplify[F[b] - F[a]];
e = N[d, 15];
Row[{" F(b) - F(a) = ", d, " \[TildeTilde] ", NumberForm[e, 15]}]
Row[{HoldForm[Integrate[1 / (3 + Sin[x]), {x, a, b}]], " = ", c, " \[TildeTilde] ", N[c, 15]}]
```

Za kraj. Možda nekoga zanima što je dalje bilo s Matom, je li uspješno završio studij. Nakon nekoliko početnih neuspjeha, Mate se uozbiljio i završio fakultet kao jedan od najboljih studenata. Iako je, nakon završetka studija, dobio nekoliko ponuda da ostane raditi na fakultetu, odlučio se za poduzetništvo jer je smatrao da posao profesora nije dovoljno cijenjen.

Pokrenuo je vlastitu tvrtku te razvio aplikacije koje su postale globalno prepoznatljive.

Je li Mate stvarna osoba ili ne – i nije toliko bitno. Vjerojatno negdje postoji osoba slična njemu, možda s nekim drugim imenom. Najvažnije je da Mate (matičar) živi u svijetu u kojem se upornost, znanje i predan rad adekvatno nagrađuju i cijene.

Literatura:

1. S. Kurepa (1989.): *Matematička analiza I*, Tehnička knjiga, Zagreb.
2. P. Javor (2003.): *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb.