

Računalna konstrukcija Steinerovih dizajna

Antonio Lakoš*, Anamari Nakić†

Sažetak

Balansirani nepotpuni blok dizajn, kraće blok dizajn, s parametrima (v, k, λ) sastoji se od konačnog v -članog skupa točaka \mathcal{P} i kolekcije \mathcal{B} k -članih podskupova od \mathcal{P} (blokova), pri čemu je svaki par točaka sadržan u točno λ blokova. U ovom su radu opisani osnovni rezultati o blok dizajnima. Prikazano je kako se problem konstrukcije blok dizajna može modelirati pomoću sustava linearnih jednažbi. Posebna pozornost posvećena je Steinerovim dizajnima, blok dizajnima za koje je $\lambda = 1$. Opisan je algoritam X slavnog matematičara i računalnog znanstvenika Donalda Knutha za pronalazak potpunog pokrivanja skupa te njegova primjena u konstrukciji Steinerovih dizajna. Konačno, pokazano je kako se blok dizajni mogu primijeniti u planiranju istraživanja s ciljem saniranja štete nastale uslijed klimatskih promjena.

Ključne riječi: *balansirani nepotpuni blok dizajn, incidencijska matrica, Steinerov dizajn, Knuthov X algoritam*

*Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000 Zagreb, email: antonio.lakos@fer.unizg.hr

†Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000 Zagreb, email: anamari.nakic@fer.unizg.hr

Computational Construction of Steiner Designs

Abstract

A balanced incomplete block design, or simply a block design, with parameters (v, k, λ) , consists of a finite set \mathcal{P} of v points and a collection \mathcal{B} of k -subsets of \mathcal{P} (blocks), such that every pair of points is contained in exactly λ blocks. This paper describes the basic results on block designs. We show how the problem of constructing a block design can be modeled by means of a system of linear equations. Special attention is devoted to Steiner designs, that is, block designs for which $\lambda = 1$. We describe Algorithm X, introduced by the renowned mathematician and computer scientist Donald Knuth, for finding exact covers of a set, as well as its application to the construction of Steiner designs. Finally, we demonstrate how block designs can be applied in planning research aimed at mitigating damage caused by climate change.

Keywords: *balanced incomplete block design, incidence matrix, Steiner design, Knuth's Algorithm X*

1 Osnovni pojmovi i rezultati

Teorija dizajna je grana kombinatorike koja se bavi problemima egzistencije, konstrukcije i klasifikacije *kombinatornih dizajna*, odnosno sistema konačnih skupova sa zadanim svojstvima. Početkom istraživanja smatra se objava članka iz rekreativne matematike Thomasa P. Kirkmana sa sljedećim problemom [9]:

"Petnaest učenica hoda svakodnevno u školu u tročlanim skupinama. Možemo li napraviti tjedni raspored skupina tako da niti jedan par učenica ne hoda zajedno u skupini dvaput?"

Problem se prvi put pojavio 1847. godine, a samo je rješenje predstavio Kirkman par godina kasnije [10]. Danas znamo da je ovo pitanje ekvivalentno pitanju egzistencije rastavljivog blok dizajna s parametrima $(15, 3, 1)$.

Definicija 1.1. *Neka su v, k i λ prirodni brojevi takvi da je $v > k \geq 2$. Uređeni par $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ je (balansirani nepotpuni) blok dizajn s parametrima (v, k, λ) ako vrijedi:*

1. \mathcal{P} je konačan skup v točaka,
2. \mathcal{B} je kolekcija k -članih podskupova od \mathcal{P} (blokova),

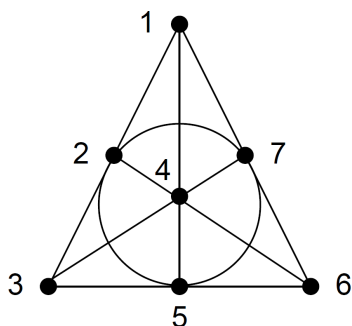
3. svaki par točaka sadržan je u točno λ blokova.

Ako dizajn nema ponovljenih blokova onda kažemo da je *jednostavan*. Za dizajn koji ima isti broj točaka i blokova kažemo da je *simetričan*.

Primjer 1.1. Jedan od najpoznatijih primjera je *Fanova ravnina*, dizajn s parametrima $(7, 3, 1)$. Skup $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sastoji se od $v = 7$ točaka, a skup \mathcal{B} sadrži sljedeće tročlane blokove:

$$\mathcal{B} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}.$$

Radi jednostavnijeg zapisa, u ovom ćemo članku blokove kraće označavati s abc umjesto $\{a, b, c\}$. Lako je provjeriti da je svaki par točaka sadržan u točno jednom bloku. *Fanova ravnina* je primjer jednostavnog simetričnog dizajna.



Slika 1. Vizualizacija Fanove ravnine

Dizajne možemo prikazivati na razne načine. Za računalni prikaz pogodnije su *matrice incidencije* koje pokazuju odnos između dvije klase objekata.

Definicija 1.2. Neka je \mathcal{D} dizajn s parametrima (v, k, λ) , sa skupom točaka $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$ i skupom blokova $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$. Matrica incidencije dizajna \mathcal{D} je binarna matrica $A = (a_{ij})$ dimenzije $v \times b$ definirana pravilom

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } p_i \in B_j, \\ 0, & \text{ako } p_i \notin B_j. \end{cases}$$

Primjer 1.2. *Matrica incidencije Fanove ravnine je*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica A ima $v = 7$ redaka i svaki redak odgovara jednom elementu iz skupa \mathcal{P} , te 7 stupaca i svaki stupac odgovara jednom bloku iz \mathcal{B} . Uočimo da je broj jedinica u svakom retku jednak broju blokova koji sadrže pripadajuću točku, te da je taj broj konstantan i jednak 3. S druge strane, broj jedinica u svakom stupcu podudara se s brojem točaka koji sadrži pripadajući blok i jednak je $k = 3$. Ova svojstva, pokazat ćemo, vrijede za svaku matricu incidencije dizajna.

Teorem 1.1. *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ dizajn s parametrima (v, k, λ) . Svaka je točka sadržana u $r = \lambda \cdot \frac{v-1}{k-1}$ blokova.*

Dokaz. Neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljna točka dizajna \mathcal{D} i neka je r_p broj blokova iz \mathcal{B} koji sadrže točku p . Definirajmo skup

$$I = \{(p', B) : p' \in \mathcal{P}, p' \neq p, B \in \mathcal{B}, \{p, p'\} \subseteq B\}.$$

Prebrojat ćemo elemente od I na dva načina. Prvo uočimo da točku $p' \in \mathcal{P}$, $p' \neq p$, možemo odabrati na $v - 1$ načina. Nadalje, postoji λ blokova B koji sadrže p i p' . Stoga vrijedi

$$|I| = \lambda(v - 1).$$

S druge strane, blok B koji sadrži p možemo odabrati na r_p načina. Nadalje, točku $p' \in B$, $p' \neq p$, možemo odabrati na $k - 1$ načina. Stoga vrijedi

$$|I| = r_p(k - 1).$$

Zaključujemo da je

$$|I| = \lambda(v - 1) = r_p(k - 1) \text{ i zatim } r_p = \lambda \frac{v - 1}{k - 1}.$$

S obzirom na to da rezultat vrijedi za proizvoljnu točku $p \in \mathcal{P}$, tvrdnja teorema slijedi. \square

Primjer 1.3. Neka je \mathcal{D} blok dizajn sa skupom točaka $\mathcal{P} = \{1, \dots, 8\}$ i skupom blokova

$$\mathcal{B} = \{1234, 1235, 1267, 1368, 1456, 1478, 1578, \\ 2378, 2457, 2468, 2568, 3458, 3467, 3567\}.$$

Ovo je dizajn s parametrima $(8, 4, 3)$ i svaka se točka pojavljuje u

$$r = \lambda \cdot \frac{v-1}{k-1} = 3 \cdot \frac{8-1}{4-1} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$$

blokova.

Teorem 1.2. Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ blok dizajn s parametrima (v, k, λ) . Dizajn \mathcal{D} ima

$$b = v \cdot \frac{r}{k} = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

blokova.

Dokaz. Neka je $b = |\mathcal{B}|$. Definirajmo skup

$$I = \{(p, B) : p \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}, p \in B\}.$$

Prebrojat ćemo elemente od I na dva načina.

Prvo uočimo da točku $p \in \mathcal{P}$ možemo odabrati na v načina. Nadalje, postoji r blokova B koji sadrže točku p . Zato vrijedi

$$|I| = vr.$$

S druge strane, blok $B \in \mathcal{B}$ možemo odabrati na b načina. Svaki blok sadrži k točaka pa je

$$|I| = bk.$$

Stoga vrijedi da je

$$bk = vr$$

i slijedi iskaz teorema. □

Primjer 1.4. Dizajn \mathcal{D} s parametrima $(9, 3, 2)$ prema prethodnom teoremu ima

$$b = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = 2 \cdot \frac{9(9-1)}{3(3-1)} = 2 \cdot \frac{72}{6} = 24$$

bloka koja navodimo ovdje:

$$\mathcal{B} = \{123, 123, 145, 145, 167, 167, 189, 189, 246, 246, 258, 258, \\ 279, 279, 349, 349, 357, 357, 368, 368, 478, 478, 569, 569\}.$$

Navedeni dizajn nije jednostavan, uočimo da ima ponovljene blokove.

Lako je vidjeti da za matricu incidencije \mathbf{A} dizajna \mathcal{D} s parametrima (v, b, r, k, λ) vrijede sljedeće tvrdnje:

1. svaki stupac matrice \mathbf{A} sadrži točno k jedinica,
2. svaki redak matrice \mathbf{A} sadrži točno r jedinica,
3. svaka dva retka matrice \mathbf{A} istovremeno sadrže jedinicu u točno λ stupaca.

Korolar 1.1. *Ako je \mathcal{D} simetričan dizajn s parametrima (v, k, λ) , tada vrijedi*

$$\lambda(v - 1) = k(k - 1).$$

Dokaz. Iz teorema 1.2. znamo da dizajn ima

$$b = v \cdot \frac{r}{k}$$

blokova. Dizajn \mathcal{D} je simetričan pa je $b = v$ i posljedično $k = r$. Primjenom teorema 1.1. dolazimo do jednakosti

$$k = \lambda \cdot \frac{v - 1}{k - 1}$$

i konačno $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$. □

Iz prethodnih teorema slijede bazični nužni uvjeti za egzistenciju dizajna.

Korolar 1.2. *Ako postoji dizajn s parametrima (v, k, λ) , onda vrijedi sljedeće:*

1. $\lambda(v - 1) \equiv 0 \pmod{(k - 1)}$,
2. $\lambda v(v - 1) \equiv 0 \pmod{(k(k - 1))}$.

Primjeri nekih parametara (v, k, λ) koji zadovoljavaju nužne uvjete dani su u nastavku. Štoviše, napomenut ćemo da za sve navedene trojke parametara dizajni postoje. Više primjera parametara te podataka o egzistenciji dizajna dostupno je u [12].

v	k	λ
3	3	1
6	3	2
7	3	1
7	3	2
7	3	3
8	4	3
9	3	1
9	3	2
9	4	3

v	k	λ
10	4	2
11	5	2
13	4	1
15	3	1
15	7	3
16	4	1
16	6	2
19	3	1
10	3	2

Slika 2. Primjeri parametara

Bazični nužni uvjeti za egzistenciju dizajna nisu i dovoljni. Lako je, primjerice, provjeriti da parametri $(22, 7, 2)$ zadovoljavaju bazične nužne uvjete. S druge strane, prema slavnom Bruck-Ryser-Chowlinom teoremu, dizajn s ovim parametrima ne postoji.

Teorem 1.3 (Bruck-Ryser-Chowla [2, 4]). *Pretpostavimo da postoji simetrični dizajn s parametrima (v, k, λ) .*

1. *Ako je v paran broj, tada je $k - \lambda$ kvadrat prirodnog broja.*
2. *Ako je v neparan broj, tada postoje cijeli brojevi $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da vrijedi jednakost:*

$$x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{(v-1)/2} \lambda z^2$$

uz uvjet da je barem jedan od cijelih brojeva x, y, z različit od 0.

Primjer 1.5. *Pretpostavimo da postoji dizajn \mathcal{D} s parametrima $(22, 7, 2)$. Tada je $b = 22$ pa je \mathcal{D} simetričan dizajn. Parametar $v = 22$ je paran, no $k - \lambda = 22 - 2 = 20$ nije kvadrat prirodnog broja pa se, prema Bruck-Ryser-Chowlinom teoremu, dizajn s ovim parametrima ne postoji.*

Osim pitanja egzistencije dizajna, zanimljivo je i pitanje klasifikacije dizajna s istim parametrima. Kada kažemo da su dva dizajna s istim parametrima različita?

Definicija 1.3. *Neka su $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ i $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}')$ dizajni. Kažemo da su dizajni \mathcal{D} i \mathcal{D}' izomorfni ako postoji postoji bijekcija $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ takva da je*

$$\{\{\alpha(p) : p \in B\} : B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}'.$$

Ukoliko takva bijekcija ne postoji, onda kažemo da su dizajni \mathcal{D} i \mathcal{D}' neizomorfni.

Primjer 1.6. Neka je $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i neka su $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ i $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}, \mathcal{B}')$ dizajni s parametrima $(7, 3, 1)$:

$$\mathcal{B} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\},$$

$$\mathcal{B}' = \{127, 136, 145, 234, 256, 357, 467\}.$$

Bijekcija $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ zadana s

$$\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 5, \alpha(5) = 6, \alpha(6) = 7, \alpha(7) = 1,$$

ima tražena svojstva. Naime, lako je provjeriti da vrijedi $\alpha(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$:

$$123 \mapsto 234, \quad 145 \mapsto 256, \quad 167 \mapsto 127,$$

$$246 \mapsto 357, \quad 257 \mapsto 136, \quad 347 \mapsto 145, \quad 356 \mapsto 467.$$

Stoga zaključujemo da su \mathcal{D} i \mathcal{D}' izomorfni. Poznato je da su svi blok dizajni s navedenim parametrima međusobno izomorfni. Stoga postoji jedinstven, do na izomorfizam, blok dizajn s parametrima $(7, 3, 1)$.

Primjer 1.7. Za parametre $(7, 3, 2)$ možemo pronaći primjere blok dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ i $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}, \mathcal{B}')$ koji su neizomorfni. Evo njihovih skupova blokova:

$$\mathcal{B} = \{123, 123, 145, 145, 167, 167, 246, 246, 257, 257, 347, 347, 356, 356\},$$

$$\mathcal{B}' = \{123, 123, 145, 145, 167, 167, 246, 247, 256, 257, 346, 347, 356, 357\}.$$

Iscrpnom pretragom se utvrdi da ne postoji bijekcija $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ takva da vrijedi $\alpha(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.

U nastavku navodimo poznate rezultate klasifikacije neizomornih blok dizajna s malim parametrima [12].

v	k	λ	# dizajna	v	k	λ	# dizajna
3	3	1	1	10	4	2	3
6	3	2	2	11	5	2	1
7	3	1	1	13	4	1	1
7	3	2	4	15	3	1	80
7	3	3	10	15	7	3	5
8	4	3	4	16	4	1	1
9	3	1	1	16	6	2	3
9	3	2	36	19	3	1	11084874829
9	4	3	11	10	3	2	960

Slika 3. Broj neizomornih blok dizajna

Napomenimo da nije poznata zatvorena formula pomoću koje bismo mogli izračunati koliko ima neizomorfnih blok dizajna za zadane parametre. U sljedećem ćemo poglavlju opisati jednu opću metodu za konstrukciju blok dizajna.

2 Konstrukcija blok dizajna

Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$. Neka je $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ skup svih dvočlanih podskupova od \mathcal{P} i neka je $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ skup svih k -članih podskupova od \mathcal{P} .

Relacija incidencije između elemenata od S i X definirana je na sljedeći način: skup S_i je u relaciji sa skupom X_j ako je $S_i \subseteq X_j$. Tada pišemo $S_i \sim X_j$. *Matrica incidencije* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ skupova S i X je binarna matrica dimenzije $m \times n$, takva da je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } S_i \sim X_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Glavni zadatak pri konstrukciji blok dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ s parametrima (v, k, λ) jest utvrditi koji k -člani podskupovi od \mathcal{P} čine blokove dizajna \mathcal{D} tako da je svaki dvočlani podskup točkaka sadržan u λ blokova. Stoga, problem konstrukcije blok dizajna možemo modelirati pomoću sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda \\ &\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= \lambda \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= \lambda \end{aligned}$$

pri čemu nepoznanica x_j poprima vrijednost 1 ako je k -člani podskup X_j blok od \mathcal{D} , a vrijednost 0 ako nije. Sustav možemo sažetije zapisati u matricnom obliku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix},$$

odnosno $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{1}$. Binarno rješenje sustava \mathbf{x} određuje koji su k -člani podskupovi od \mathcal{P} upravo blokovi od \mathcal{D} ,

$$\mathcal{B} = \{X_j \mid x_j = 1\},$$

te da je svaki par točaka, odnosno svaki podskup S_i , prisutan u točno λ blokova. Prethodna razmatranja vode do sljedećeg teorema.

Teorem 2.1. *Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$. Neka je $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ skup svih dvočlanih podskupova od \mathcal{P} , $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ skup svih k -članih podskupova od \mathcal{P} te A matrica incidencije skupova S i X .*

Blok dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ s parametrima (v, k, λ) postoji ako i samo ako postoji binarno rješenje \mathbf{x} linearnog sustava jednadžbi

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{1}. \tag{1}$$

Primjer 2.1. *Konstruirajmo blok dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ s parametrima $(6, 3, 2)$ na opisani način. Sada je $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pa su dvočlani podskupovi od \mathcal{P} redom*

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, 2\}, & S_2 &= \{1, 3\}, & S_3 &= \{1, 4\}, & S_4 &= \{1, 5\}, & S_5 &= \{1, 6\}, \\ S_6 &= \{2, 3\}, & S_7 &= \{2, 4\}, & S_8 &= \{2, 5\}, & S_9 &= \{2, 6\}, & S_{10} &= \{3, 4\}, \\ S_{11} &= \{3, 5\}, & S_{12} &= \{3, 6\}, & S_{13} &= \{4, 5\}, & S_{14} &= \{4, 6\}, & S_{15} &= \{5, 6\}, \end{aligned}$$

dok su tročlani podskupovi od \mathcal{P} redom

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 2, 3\}, & X_2 &= \{1, 2, 4\}, & X_3 &= \{1, 2, 5\}, & X_4 &= \{1, 2, 6\}, \\ X_5 &= \{1, 3, 4\}, & X_6 &= \{1, 3, 5\}, & X_7 &= \{1, 3, 6\}, & X_8 &= \{1, 4, 5\}, \\ X_9 &= \{1, 4, 6\}, & X_{10} &= \{1, 5, 6\}, & X_{11} &= \{2, 3, 4\}, & X_{12} &= \{2, 3, 5\}, \\ X_{13} &= \{2, 3, 6\}, & X_{14} &= \{2, 4, 5\}, & X_{15} &= \{2, 4, 6\}, & X_{16} &= \{2, 5, 6\}, \\ X_{17} &= \{3, 4, 5\}, & X_{18} &= \{3, 4, 6\}, & X_{19} &= \{3, 5, 6\}, & X_{20} &= \{4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Kako bismo konstruirali željeni blok dizajn potrebno je pronaći binarno rješenje $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{20})$ sustava

$$\begin{pmatrix} 111100000000000000 \\ 100011100000000000 \\ 010010011000000000 \\ 001001010100000000 \\ 000100101100000000 \\ 100000000111000000 \\ 010000000100110000 \\ 001000000010101000 \\ 000100000001011000 \\ 0000100000100001100 \\ 00000100000100001010 \\ 00000010000010000110 \\ 00000001000001001001 \\ 00000000100000100101 \\ 00000000010000010011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sustav ima binarno rješenje, pa postoji blok dizajn s parametrima $(6, 3, 2)$. Jedno rješenje je vektor

$$\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0),$$

a blokovi od \mathcal{D} su

$$\mathcal{B} = \{X_1, X_2, X_7, X_8, X_{10}, X_{12}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}\},$$

odnosno

$$\mathcal{B} = \{123, 124, 136, 145, 156, 235, 246, 256, 345, 346\}.$$

Općenito, za rješavanje proizvoljnog sustava linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ koristi se poznata Gauss-Jordanova metoda [6]. No, u ovom se slučaju ne može primijeniti jer tražimo rješenje sa specifičnim svojstvima.

Linearni sustavi u kojima su koeficijenti i rješenja cjelobrojna nazivaju se *linearnim diofantskim sustavima jednadžbi*. Brojni su primjeri u kojim je rješavanje matematičkog problema moguće modelirati pomoću ovakvih sustava. Stoga najpoznatije računalne platforme implementiraju najbrže algoritme za rješavanje:

- Wolfram Alpha (naredba *FindInstance*)
- GAP System (naredba *SolutionIntMat*)
- Matlab (naredba *solve*)

U ovom se radu nećemo baviti implementacijom algoritma za rješavanje diofantskih linearnih sustava jednadžbi. Za više podataka o ovoj temi čitatelja upućujemo na [13]. U nastavku ćemo opisati implementaciju algoritma za rješavanje specijalnog slučaja $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$ kada je \mathbf{A} binarna matrica i \mathbf{x} binarni vektor, odnosno za konstrukciju blok dizajna s $\lambda = 1$. Radi se o efikasnom algoritmu X američkog matematičara Donalda Knutha koji se uspješno koristi za rješavanje problema egzaktnog pokrivanja.

3 Steinerovi dizajni i egzaktno pokrivanje

Definicija 3.1. *Blok dizajn \mathcal{D} u kojem je svaki par točaka sadržan u točno jednom bloku zove se Steinerov dizajn. Dizajn \mathcal{D} tada ima parametre $(v, k, 1)$.*

Fanova ravnina jedan je od primjera Steinerovih dizajna. Iz teorema 1.1 i teorema 1.2 slijedi da Steinerov dizajn \mathcal{D} ima $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ blokova, da je svaka točka sadržana u točno $r = \frac{v-1}{k-1}$ blokova, te da nužno mora vrijediti

$$(v - 1) \equiv 0 \pmod{(k - 1)}. \quad (2)$$

Pitanja egzistencije, klasifikacije i konstrukcije Steinerovih dizajna pobudila su mnogo interesa među istraživačima. U sljedećim slučajevima problem egzistencije je riješen: pokazano je da su bazični nužni uvjeti (2) za egzistenciju ujedno i dovoljni.

k	
3	postoji ako i samo ako $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$ [9]
4	postoji ako i samo ako $v \equiv 1, 4 \pmod{12}$ [7]
5	postoji ako i samo ako $v \equiv 1, 5 \pmod{20}$ [7]

U nedavno objavljenom ekstenzivnom, zasad nerecenziranom, radu Peter Keevash je riješio problem egzistencije Steinerovih dizajna za ogromne vrijednosti parametra v [8]. Važno je napomenuti da predstavljeni dokaz nije konstruktivan već koristi vjerojatnosne tehnike.

Klasifikacija Steinerovih dizajna je težak kombinatorni problem. Za sada su klasificirani Steinerovi dizajni s malim parametrima, navodimo neke djelomične rezultate u sljedećoj tablici [5].

$v, k = 3$	# dizajna	$v, k = 4$	# dizajna	$v, k = 5$	# dizajna
7	1	13	1	21	1
9	1	16	1	25	1
13	1	25	18	41	≥ 15
15	80	28	≥ 4747	45	≥ 16
19	11084874829	37	≥ 51402	61	≥ 10
21	≥ 62336617	40	$\geq 10^6$	65	≥ 2
25	$\geq 10^{14}$	49	≥ 769	81	≥ 1

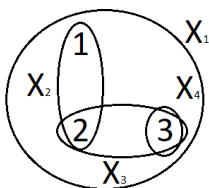
Slika 4. Poznati klasifikacijski rezultati o Steinerovim dizajnim

Ovdje ćemo opisati opću metodu za konstrukciju Steinerovih dizajna koja se realizira kroz vezu s *egzaktnim pokrivanjem skupa*.

Definicija 3.2. *Neka je $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ konačan skup i $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ familija podskupova od S . Kažemo da je podfamilija $\mathcal{B} = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_b}\}$ od X egzaktno pokrivanje skupa S ako je svaki element od S sadržan u točno jednom podskupu od \mathcal{B} .*

Primjer 3.1. Neka je $S = \{1, 2, 3\}$, te neka je

$$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}\}.$$



Slika 5. Prikaz skupova X_1, X_2, X_3, X_4

Skup $\mathcal{B} = \{X_1\} = \{\{1, 2, 3\}\}$ je egzaktno pokrivanje od S . Svi elementi od S pokriveni su s X_1 . Egzaktno pokrivanje skupa S nije jedinstveno, evo još jednog primjera $\mathcal{B}' = \{X_2, X_4\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Konstrukcija Steinerovog dizajna \mathcal{D} može se svesti na problem pronalaska egzaktnog pokrivanja.

Teorem 3.1. Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_v\}$, $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ familija dvočlanih podskupova od \mathcal{P} , te $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ familija k -članih podskupova od \mathcal{P} .

Steinerov dizajn \mathcal{D} s parametrima $(v, k, 1)$ postoji ako i samo ako postoji podfamilija \mathcal{B} od X koja je egzaktno pokrivanje skupa S .

Dokaz. Ako je podfamilija \mathcal{B} od X potpuno pokrivanje od S , onda je svaki dvočlani skup točaka S_i sadržan u jednom skupu X_j iz \mathcal{B} . Stoga je $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ Steinerov dizajn s parametrima $(v, k, 1)$. S druge strane, ako je $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ Steinerov dizajn s navedenim parametrima, onda je, prema definiciji, \mathcal{B} podfamilija od X koja je egzaktno pokrivanje od S . \square

Problem pronalaska egzaktnog pokrivanja skupa možemo modelirati pomoću linearnog sustava jednadžbi. Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrica incidencije između skupova S i X . Retku s indeksom i odgovara element s_i , a stupcu s indeksom j odgovara podskup X_j , te vrijedi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } s_i \in X_j, \\ 0, & \text{ako } s_i \notin X_j. \end{cases}$$

Svako binarno rješenje $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ matrične jednadžbe

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$$

određuje elemente egzaktnog pokrivanja od S na sljedeći način

$$\mathcal{B} = \{X_j \mid x_j = 1\}.$$

Primjer 3.2. U primjeru koji smo predstavili matrica incidencije skupova S i X je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustav

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ima dva binarna rješenja:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prvo rješenje daje egzaktno pokrivanje $\mathcal{B} = \{X_1\} = \{\{1, 2, 3\}\}$. Drugo rješenje daje egzaktno pokrivanje $\mathcal{B}' = \{X_2, X_4\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Sada ćemo predstaviti algoritam koji se uspješno koristi za rješavanje problema egzaktnog pokrivanja. Algoritam naročito efikasno pronalazi binarno rješenje pridruženog diofantskog linearnog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$. Nama je interesantan jer je, zbog ekvivalencije problema, pogodan za primjenu u računalnoj konstrukciji Steinerovih dizajna.

4 Algoritam X

Algoritam X je rekurzivni nedeterministički algoritam za rješavanje problema egzaktnog pokrivanja. Popularizirao ga je poznati američki matematičar i računalni znanstvenik Donald Knuth u svom članku [11].

Algoritam na ulaz uzima matricu incidencije \mathbf{A} skupova S i X , a na izlazu vraća binarna rješenja \mathbf{x} sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$ koja odgovaraju egzaktnim pokrivanjima od S .

Kratko ćemo opisati ideju algoritma. Osnovni cilj provedbe algoritma je u ulaznoj matrici \mathbf{A} pronaći one vektore-stupce A_j koji se sumiraju u jedinični stupac $\mathbf{1}$. Algoritam se provodi iterativno, a svaka se iteracija provodi u četiri ključna koraka:

1. odabir stupca A_j matrice \mathbf{A} koji se dodaje u parcijalno rješenje;
2. označavanje stupaca i redaka matrice \mathbf{A} za brisanje;
3. redukcija matrice \mathbf{A} brisanjem označenih stupaca i redaka;
4. validacija parcijalnog rješenja.

Algoritam svoju veliku brzinu postiže i heuristikom koju je predložio Knuth, a tiče se odabira stupca A_j koji se dodaje u parcijalno rješenje. Na početku se identificira redak matrice \mathbf{A} koji sadrži najmanje jedinica, a zatim se za parcijalno rješenje odabire bilo koji stupac koji ima jedinicu u tom retku. Na ovaj se način broj grana pretraživanja smanjio na najmanji broj jedinica u nekom retku matrice \mathbf{A} te se postiže smanjenje pretraživanja prostora mogućih rješenja.

U svakom rekurzivnom pozivu odabire se stupac A_j matrice \mathbf{A} koji se dodaje u parcijalno rješenje. Matrica se reducira brisanjem redaka u kojima stupac A_j ima vrijednost 1 jer je odabirom stupca A_j pripadajući element pokriven u parcijalnom pokrivanju. Uz retke, brišu se i stupci koji u obrisanim redcima imaju vrijednost 1 jer pripadajući skupovi nisu disjunktni s elementima parcijalnog pokrivanja. Konačno, validira se je li brisanje odabranih redaka i stupaca onemogućilo da svi elementi iz S budu pokriveni.

Nakon svakog rekurzivnog poziva, označavanja te izbacivanja stupaca i redaka, cijeli se postupak ponavlja na reduciranoj matrici dok se ne pronađe rješenje tj. dok se ne pronađu oni stupci koji se sumiraju u jedinični vektor. Kad algoritam uspješno završi s radom, znamo da svi stupci koji se redom dodavani u parcijalno pokrivanje čine egzaktno pokrivanje. U nastavku je prikazan pseudokod algoritma X .

Algoritam 1 Pseudokod algoritma X

```

Provjeri rješenje
Odaberi redak  $A_i$ 
za svaki indeks stupca  $j$  za koji vrijedi  $a_{ij} = 1$ 
    Uvrsti stupac  $A_j$  u parcijalno rješenje
    za svaki indeks retka  $k$  za koji vrijedi  $a_{kj} = 1$ 
        za svaki indeks stupca  $l$  za koji vrijedi  $a_{kl} = 1$ 
            Izbaci stupac  $A_l$ 
        Izbaci redak  $A_k$ 
    Rekurzivno pozovi algoritam  $X$  nad reduciranom matricom
    Vрати izbačene retke i stupce
    Izbaci stupac  $A_j$  iz parcijalnog rješenja
    
```

Primjer 4.1. Opišimo tijek provedbe algoritma na jednom ilustrativnom primjeru. Zadane su skupovi $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ i $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ te pripadajuća matrica incidencije

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo kako element s_1 koji odgovara prvom retku matrice može biti pokriven samo skupovima X_1 ili X_2 koji odgovaraju prvom i drugom stupcu. Dakle, ako postoji egzaktno pokrivanje skupa S onda ili prvi ili drugi stupac moraju odabrani u nekom koraku algoritma. Ako ne nađemo rješenje pri odabiru prvog ili drugog stupca, možemo zaključiti izvođenje algoritma i egzaktno pokrivanje od S ne postoji.

Udubimo se u ova dva slučaja. U prvom slučaju dodajmo u prvom koraku provedbe algoritma prvi stupac u parcijalno rješenje. U sljedećem koraku:

- uočimo da je $a_{11} = 1$, zatim $a_{12} = 1$ pa obrišemo stupac A_2 ;
- uočimo da je $a_{31} = 1$, zatim $a_{35} = 1$ pa obrišemo stupac A_5 ;
- uočimo da je $a_{41} = 1$, zatim $a_{42} = 1, a_{43} = 1, a_{44} = 1$ pa obrišemo stupce A_3, A_4 .

Algoritam staje s izvođenjem jer smo izbacili sve ostale stupce iz matrice. S obzirom da suma stupaca u parcijalnom rješenju koje se sastoji samo od prvog stupca od A , nije jednaka jediničnom stupcu, zaključujemo da egzaktno pokrivanje od S koji sadrži skup X_1 ne postoji.

U drugom slučaju, odaberimo drugi stupac u parcijalno rješenje. U sljedećem koraku:

- uočimo da je $a_{12} = 1$, zatim $a_{11} = 1$ pa obrišemo stupac A_1 ;
- uočimo da je $a_{22} = 1$, zatim $a_{23} = 1, a_{25} = 1$ pa obrišemo stupce A_3, A_5 ;
- uočimo da je $a_{42} = 1$, zatim $a_{41} = 1, a_{43} = 1, a_{44} = 1$ pa obrišemo stupac A_4 .

Algoritam staje s izvođenjem jer smo izbacili sve ostale stupce iz matrice. S obzirom da suma stupaca u parcijalnom rješenju koje se sastoji samo od drugog stupca od A , nije jednaka jediničnom stupcu, zaključujemo da egzaktno pokrivanje od S koji sadrži skup X_2 ne postoji.

Konačno, zaključujemo da ne postoji egzaktno pokrivanje od S .

Primjer 4.5. Dizajn s parametrima $(13, 4, 1)$ ima 13 točaka i 13 blokova. Rješavanjem linearnog sustava $Ax = \mathbf{1}$, pri čemu je matrica A dimenzije 78×715 , dobivamo blokove

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{8, 1, 10, 9\}, \{1, 11, 12, 13\}, \\ \{8, 2, 11, 5\}, \{8, 3, 12, 6\}, \{8, 4, 13, 7\}, \{9, 2, 13, 6\}, \{11, 9, 3, 7\}, \\ \{9, 12, 4, 5\}, \{2, 10, 12, 7\}, \{13, 10, 3, 5\}, \{10, 11, 4, 6\}\}.$$

Primjer 4.6. Dizajn s parametrima $(15, 3, 1)$ ima 15 točaka i 35 blokova. Rješavanjem linearnog sustava $Ax = \mathbf{1}$, pri čemu je matrica A dimenzije 105×455 , dobivamo blokove

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{8, 1, 9\}, \{1, 10, 11\}, \{1, 12, 13\}, \{1, 14, 15\}, \\ \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{8, 2, 7\}, \{9, 2, 10\}, \{2, 11, 12\}, \{2, 13, 14\}, \{3, 4, 7\}, \\ \{3, 13, 15\}, \{8, 10, 3\}, \{11, 9, 3\}, \{3, 12, 14\}, \{11, 5, 7\}, \{12, 15, 7\}, \{8, 4, 12\}, \\ \{9, 12, 5\}, \{8, 13, 6\}, \{10, 14, 7\}, \{9, 4, 14\}, \{2, 5, 15\}, \{9, 6, 15\}, \{10, 4, 15\}, \\ \{8, 11, 15\}, \{11, 4, 13\}, \{8, 5, 14\}, \{10, 13, 5\}, \{10, 12, 6\}, \{11, 6, 14\}, \{9, 13, 7\}\}.$$

Primjer 4.7. Dizajn s parametrima $(16, 4, 1)$ ima 16 točaka i 20 blokova. Rješavanjem linearnog sustava $Ax = \mathbf{1}$, pri čemu je matrica A dimenzije 120×1820 , dobivamo blokove

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{8, 1, 10, 9\}, \{1, 11, 12, 13\}, \{16, 1, 14, 15\}, \\ \{8, 2, 11, 5\}, \{8, 3, 6, 14\}, \{11, 4, 14, 7\}, \{9, 2, 12, 14\}, \{10, 13, 5, 14\}, \\ \{9, 3, 13, 7\}, \{10, 4, 12, 6\}, \{2, 13, 6, 15\}, \{16, 3, 12, 5\}, \{16, 2, 10, 7\}, \\ \{11, 10, 3, 15\}, \{9, 4, 5, 15\}, \{8, 16, 4, 13\}, \{16, 9, 11, 6\}, \{8, 12, 15, 7\}\}.$$

Računalni doseg metode, u smislu veličine parametara konstruiranog blok dizajna, ograničen je implementacijom algoritma i kapacitetom korištenog računala. Poznato je da su opisani algoritam te snažni klaster računala za znanstveno računanje korišteni za rješavanje sustava s matricom A dimenzije 105×30705 te je konstruiran Steinerov dizajn s parametrima $(8191, 7, 1)$ s dodatnim svojstvima [1]. Alternativni način konstrukcije ovog dizajna opisan je i ovdje [3].

Steinerovi dizajni, pokazat ćemo u sljedećem poglavlju, posebno su zanimljivi u praktičnim primjenama, kao što je planiranje laboratorijskih eksperimenata. Također, za očekivati je da u opisanim primjenama parametri dizajna nisu preveliki. Stoga je opisana računalna metoda za konstrukciju Steinerovih dizajna, uz sva svoja ograničenja, korisna i daje zadovoljavajuće rezultate.

5 Primjena u znanosti i industriji

Matematička teorija nalazi brojne primjene u rješavanju suvremenih izazova. Dizajni se tipično koriste u komunikacijskim tehnologijama i kripto-

grafiji. Također, koriste se u planiranju i provođenju eksperimenata, gdje omogućuju značajnu uštedu korištenih resursa. U ovom ćemo poglavlju, kroz jedan primjer, opisati kako se blok dizajni mogu koristiti u planiranju istraživanja s ciljem saniranja štete nastale uslijed klimatskih promjena.

Klimatske promjene uzrokuju češću pojavu ekstremnih vremenskih događaja i prirodnih katastrofa diljem svijeta. U netipično snažnim naletima vjetrova 2018. godine u talijanskom planinskom lancu Dolomiti, koji se nalazi na UNESCO-voj listi prirodne baštine, srušene su tisuće stabala, od kojih su neka starija od stotinu godina. Praktički preko noći, ugrožena su staništa brojnih životinja. Nakon čišćenja, ostala su velika ogoljena planinska područja, a klizišta koja su se aktivirala s nestankom šume počela su prijetiti kućama u planinskim selima. Čitavo područje potrebno je ubrzano pošumiti novim stablima.

Istraživači su dobili zadatak ispitati koje neautohtone šumske kulture uspijevaju na ovom području, jer su autohtone šumske kulture spororastuće. Identificirano je 9 neautohtonih vrsta drveća koja uspješno rastu na tlu u interesnom području. Analizom tla i postojećeg ekosustava utvrđeno je da tlo ima kapacitet suživota najviše 3 različite vrste stabala. U istraživanju je važno utvrditi koji su parovi vrsta stabala nekompatibilni koegzistirati na odabranom području. Potrebno je provesti eksperiment i istražiti uspješnost sadnje.

Ako se testiraju sve moguće tročlane kombinacije šumskih kultura, trebalo bi provesti $\binom{9}{3} = 84$ eksperimenata i analizirati rezultate. U ovakvom rasporedu testiranja, svaki par kultura pojavljuje se u sedam testova. Uočimo sada da je dovoljno ispitati samo jednom je li odabrani par šumskih kultura kompatibilan. Slijedom, modificira se testno pošumljavanje: na parcele se sade šumske kulture u grupama od tri, uz ograničenje da se svaki par pojavljuje točno jednom. Kreiraju li testovi kao blokovi dizajna s parametrima $(9, 3, 1)$, testiranje je moguće provesti na samo 12 parcela. Na ovaj način postiže se značajna ušteda resursa u provedbi eksperimenta.

1	1	1	1	2	3	2	3	2	3	4	5
2	4	6	8	4	5	5	4	7	6	7	6
3	5	7	9	6	7	8	9	9	8	8	9

Slika 6. Plan testiranja interakcije devet šumskih kultura baziran na blokovima $(9, 3, 1)$ -dizajna

Općenito, ako je u eksperiment uključeno v šumskih kultura koje se grupiraju u skupine veličine k , u iscrpnom testiranju potrebno je provesti

$\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}$ eksperimenata. Ako se provedu testovi tako da se svaki par šumskih kultura pojavi u jednom testu, testovi bi se modelirali kao blokovi $(v, k, 1)$ -dizajna. Tada bi se provelo $\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ testova, što je značajno manje.

Literatura

- [1] M. Braun, T. Etzion, P. Östergård, A. Vardy, A. Wassermann, *Existence of q -analogs of Steiner systems*, Forum of Mathematics, Pi, 4 (2016).
- [2] R. H. Bruck, H. J. Ryser, *The nonexistence of certain finite projective planes*, Canad. J. Math. 1 (1949), 88-93.
- [3] M. Buratti, A. Nakić, *Designs over finite fields by difference methods*, Finite Fields and Their Applications, 57 (2019), 128-138.
- [4] S. A. Chowla, H. J. Ryser, *Combinatorial problems*, Canad. J. Math. 2 (1950), 93-99.
- [5] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, *The Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd edn, CRC Press, Boca Raton, 2007.
- [6] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2016.
- [7] H. Hanani, *Balanced incomplete block designs and related designs*, Discrete Math. 11 (1975), 255-369.
- [8] P. Keevash, *The existence of designs*, arXiv:1401.3665, 2019.
- [9] T. P. Kirkman, *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Math. J. 2 (1847), 191-204.
- [10] T. P. Kirkman, *Note on an unanswered prize question*, The Cambridge and Dublin Math. J. 5 (1850), 255-262.
- [11] D. Knuth, *Dancing links*, arXiv:cs/0011047, 2000.
- [12] R. Mathon, A. Rosa, *2 - (v, k, λ) designs of small order*, in *The Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd edn, C. J. Colbourn, J. H. Dinitz (Editors), CRC Press, Boca Raton, 2007, 25-58.
- [13] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, John Wiley and Sons, Chichester, 1999.