

Sylvesterova i Ljapunovljeva matricna jednadžba

Maja Kovačević*, Ivana Kuzmanović Ivičić†

Sažetak

Linearne matricne jednadžbe su linearne jednadžbe u kojima je nepoznanica matrica. Zbog svoje široke primjene, među najvažnijim matricnim jednadžbama ističe se Sylvesterova jednadžba, kao i njezin specijalni slučaj – Lyapunovljeva jednadžba. U ovom radu prikazani su nužni i dovoljni uvjeti egzistencije jedinstvenog rješenja Sylvesterove i Lyapunovljeve jednadžbe, kao i njihovih generalizacija. Ujedno je dan opis osnovnih numeričkih algoritama za njihovo rješavanje.

Ključne riječi: *matricne jednadžbe, Sylvesterova jednadžba, Lyapunovljeva jednadžba*

Sylvester and Lyapunov matrix equations

Abstract

Linear matrix equations are linear equations in which the unknown is a matrix. Due to their wide range of applications, the Sylvester equation stands out as one of the most important types of matrix equations, along with its special case – the Lyapunov equation. This paper presents the necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of the Sylvester and Lyapunov equations, as well as their generalizations. Additionally, a description of the fundamental numerical algorithms used to solve these equations is provided.

Keywords: *matrix equations, Sylvester equation, Lyapunov equation*

*Osnovna škola Jagode Truhelke Osijek, email: maja.kovacevic2@skole.hr

†Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ikuzmano@mathos.hr

1 Linearne matrične jednačbe

Linearne jednačbe u kojima je nepoznanica matrica imaju važnu ulogu u brojnim područjima primijenjene matematike kao i u mnogim drugim znanstvenim disciplinama. Posebno se ističe njihova primjena u teoriji upravljanja, računalnoj grafici, ekonomsko-matematičkim modelima, kao i u obradi podataka i metodama strojnog učenja. U tim kontekstima matrične jednačbe često služe za modeliranje složenih sustava i odnosa između velikog broja varijabli.

Definicija 1.1. *Neka su $A_i \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $B_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $i = 1, 2, \dots, k$ i $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dane matrice. Jednačba oblika*

$$\sum_{i=1}^k A_i X B_i = C \quad (1)$$

naziva se linearna matrična jednačba s nepoznanicom $X \in \mathbb{R}^{q \times r}$.

Matrice A_i i B_i , $i = 1, 2, \dots, k$ nazivaju se matricama koeficijena matrične jednačbe (1). Najosnovniji oblik linearne matrične jednačbe je

$$AX = C, \quad (2)$$

pri čemu je $r = n$. Ako je $X = [x_1, \dots, x_n]$, gdje su x_1, \dots, x_n stupci matrice $X \in \mathbb{R}^{q \times n}$ i $C = [c_1, \dots, c_n]$, gdje su c_1, \dots, c_n stupci matrice C , onda je jednačba (2) ekvivalentna sustavu sustava linearnih jednačbi $Ax_1 = c_1, \dots, Ax_n = c_n$. Stoga, ako je matrica A invertibilna, odnosno ako je $m = q$ i $\det(A) \neq 0$, onda je jedinstveno rješenje jednačbe (2) dano s $X = A^{-1}C$.

1.1 Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije matrice od velike su važnosti za dobivanje teorijskih rezultata o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ostalih linearnih matričnih jednačbi oblika (1).

Definicija 1.2. *Kroneckerov produkt matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times s}$ (u oznaci $A \otimes B$), definiran je s:*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times ns}. \quad (3)$$

U nastavku je dan primjer Kroneckerovog produkta.

Primjer 1.1. Neka su zadane sljedeće matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0B & -2B \\ 3B & -1B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 15 & -2 & -1 & -5 \\ -12 & -6 & 18 & 4 & 2 & -6 \\ -9 & 6 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.3. Za matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definiramo Kroneckerovu sumu (u oznaci $A \oplus B$) izrazom:

$$A \oplus B = I_m \otimes A + B \otimes I_n \in \mathbb{R}^{mn \times mn}, \quad (4)$$

pri čemu su I_m i I_n jedinične matrice dimenzija $m \times m$ i $n \times n$.

Primjer 1.2. Za matrice A i B iz prethodnog primjera je

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2I_2 & I_2 & 5I_2 \\ -4I_2 & -2I_2 & 6I_2 \\ -3I_2 & 2I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Važan rezultat o svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima Kroneckerove sume dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1. Neka matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ i neka $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ima svojstvene vrijednosti $\mu_j, j = 1, \dots, m$. Tada Kroneckerova suma $A \oplus B = I_m \otimes A + B \otimes I_n$ ima mn svojstvenih vrijednosti

$$\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_1 + \mu_m, \lambda_2 + \mu_1, \dots, \lambda_2 + \mu_m, \dots, \lambda_n + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_m.$$

Nadalje, ako su x_1, \dots, x_n svojstveni vektori matrice A za odgovarajuće svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i y_1, \dots, y_m svojstveni vektori matrice B za odgovarajuće svojstvene vrijednosti μ_1, \dots, μ_m , tada su $y_j \otimes x_i \in \mathbb{R}^{mn}$ svojstveni vektori od $A \oplus B$ za odgovarajuće svojstvene vrijednosti $\lambda_i + \mu_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Dokaz. Neka je $Ax_i = \lambda_i x_i$ i $By_j = \mu_j y_j$ za $x_i, y_j \neq 0$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Primjenom definicije Kroneckerove sume, svojstva množenja Kroneckerovih produkata $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ i svojstva $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$, za $\alpha \in \mathbb{R}$ slijedi:

$$\begin{aligned} (A \oplus B)(y_j \otimes x_i) &= [(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](y_j \otimes x_i) \\ &= (I_m \otimes A)(y_j \otimes x_i) + (B \otimes I_n)(y_j \otimes x_i) \\ &= (I_m y_j \otimes Ax_i) + (By_j \otimes I_n x_i) \\ &= y_j \otimes (\lambda_i x_i) + (\mu_j y_j) \otimes x_i \\ &= \lambda_i (y_j \otimes x_i) + \mu_j (y_j \otimes x_i) \\ &= (\lambda_i + \mu_j)(y_j \otimes x_i). \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti izravno slijedi tvrdnja teorema. □

Definicija 1.4. Operator vektorizacije matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, u oznaci $\text{vec}(A)$ je linearni operator koji matrici A pridružuje vektor sačinjen od stupaca matrice A poredanih jedan ispod drugog, odnosno

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn} \quad (5)$$

pri čemu su a_1, a_2, \dots, a_n stupci matrice A .

Primjer 1.3. Za matricu A iz Primjera 1 je $\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2 Sylvesterova i Ljapunovljeva jednadžba

Najčešće korištena matricna jednadžba oblika (1) je tzv. Sylvesterova jednadžba, nazvana prema engleskom matematičaru Jamesu Josephu Sylvesteru¹. Važan specijalni slučaj Sylvesterove jednadžbe predstavlja Ljapunov-

¹James Joseph Sylvester (1814.–1897.), engleski matematičar poznat po doprinosima u teoriji matrica, teoriji brojeva, teoriji invarijanti, teoriji particija i kombinatorici

ljeva matrična jednadžba, koja nosi ime po ruskom matematičaru Aleksandru Mikhailovichu Ljapunovu².

Definicija 2.1. *Matrična jednadžba oblika*

$$AX + XB = C, \quad (6)$$

pri čemu su $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, naziva se Sylvesterova matrična jednadžba s nepoznanicom $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

U primjenama se često javlja specijalan slučaj jednadžbe (6) kod kojeg je $B = A^T$.

Definicija 2.2. *Jednadžba oblika*

$$AX + XA^T = C, \quad (7)$$

pri čemu su $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, naziva se Ljapunovljeva matrična jednadžba s nepoznanicom $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Koristeći Kroneckerov produkt i operator vektorizacije, svaka linearna matrična jednadžba može se zapisati kao sustav linearnih jednadžbi čije su nepoznanice elementi matrice X . Promotrimo Sylvesterovu jednadžbu (6). Neka su b_i, c_i, x_i redom stupci matrica B, C, X . Zapišimo jednakost (6) po stupcima. Dobivamo

$$c_i = Ax_i + Xb_i = Ax_i + \sum_{j=1}^m b_{ji}x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

odnosno, ako sada prethodno dobiveni sustav jednadžbi zapišemo matrično, dobivamo

$$\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \dots & b_{m1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \dots & b_{m2}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m}I & b_{2m}I & \dots & A + b_{mm}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Matricu koeficijenata $mn \times mn$ linearnog sustava (8) možemo zapisati kao Kroneckerovu sumu $(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)$ te dobivamo linearni sustav

$$[I_m \otimes A + B^T \otimes I_n] \text{vec}(X) = \text{vec}(C). \quad (9)$$

²Aleksandar Mikhailovich Ljapunov (1857.-1918.), ruski matematičar poznat po svom doprinosu teoriji stabilnosti dinamičkih sustava, matematičkoj fizici i teoriji vjerojatnosti.

Analogno, Ljapunovljeva matrična jednačba (7) ekvivalentna je linearnom sustavu

$$[I_m \otimes A + A \otimes I_n] \text{vec}(X) = \text{vec}(C). \quad (10)$$

Koristeći zapis (9) lako se dobiva osnovni rezultat o egzistencije i jedinstvenosti rješenja Sylvesterove jednačbe.

Teorem 2.1. (Egzistencija i jedinstvenost rješenja Sylvesterove jednačbe) *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A i μ_1, \dots, μ_m svojstvene vrijednosti matrice B . Tada Sylvesterova jednačba (6) ima jedinstveno rješenje X ako i samo ako je $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ za svaki $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, odnosno Sylvesterova jednačba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-B$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.*

Dokaz. Sylvesterova jednačba $AX + XB = C$ ekvivalentna je $mn \times mn$ linearnom sustavu

$$Px = c, \quad (11)$$

gdje je $P = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n$, $x = \text{vec}(X)$ i $c = \text{vec}(C)$. Stoga, Sylvesterova jednačba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je P regularna matrica. Prema Teoremu 1.1, svojstvene vrijednosti matrice P su $\lambda_i + \mu_j$, gdje su $\lambda_i, i = 1, \dots, n, \mu_j, j = 1, \dots, m$ svojstvene vrijednosti matrice A i B . Kako je determinanta matrice jednaka produktu svojstvenih vrijednosti, to znači da je P regularna, odnosno da Sylvesterova jednačba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\lambda_i + \mu_j \neq 0$, za $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. \square

Budući da je Ljapunovljeva jednačba poseban slučaj Sylvesterove jednačbe, sljedeći korolar direktna je posljedica prethodnog teorema.

Korolar 2.1. (Egzistencija i jedinstvenost rješenja Ljapunovljeve jednačbe) *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tada Ljapunovljeva jednačba (7) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, za $i, j = 1, \dots, n$, odnosno Ljapunovljeva jednačba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-A$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.*

U mnogim primjenama pojavljuje se Ljapunovljeva jednačba

$$AX + XA^T = C \quad (12)$$

u kojoj je matrica C simetrična. Kako transponiranjem (12) i korištenjem $C = C^T$ dobivamo

$$AX^T + X^T A^T = C \quad (13)$$

slijedi da ako (12) ima jedinstveno rješenje, onda je $X^T = X$, odnosno da je jedinstveno rješenje jednačbe sa simetričnom desnom stranom također simetrična matrica.

3 Numeričke metode za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

Kako je Sylvesterove jednadžba $AX + XB = C$ ekvivalentna linearnom sustavu $Px = c$, može se riješiti bilo kojom metodom za rješavanje linearnih sustava, primjerice Gaussovom metodom eliminacija. Međutim, primjena Gaussove metode na matricu P računski je zahtjevna jer je P matrica dimenzije $mn \times mn$, što daje složenost $O(m^3n^3)$. Jedan od načina za smanjenje računске složenosti jest transformacija matrica A i B u jednostavnije oblike pomoću sličnosti matrica.

3.1 Bartels - Stewartov algoritam

Jedna od najčešće korištenih metoda za rješavanje Sylvesterove jednadžbe male do umjerene dimenzije je Bartels–Stewartov algoritam iz 1972. godine. Njegova numerička složenost iznosi $O(m^3 + n^3)$, a sastoji se od četiri osnovna koraka:

1. Transformiranje matrica A i B u "jednostavniji" oblik koristeći sličnost matrica:

$$\hat{A} = U^{-1}AU, \quad \hat{B} = V^{-1}BV.$$

2. Transformiranje desne strane jednadžbe: $\hat{C} = U^{-1}CV$ i uvođenje supstitucije $Y = U^{-1}XV$.
3. Rješavanje transformirane jednadžbe $\hat{A}Y + Y\hat{B} = \hat{C}$ po nepoznanici Y .
4. Računanje X iz Y : $X = UYV^{-1}$.

Najčešće korišten oblik transformacije matrica u 1. koraku algoritma je Schurova dekompozicija.

Teorem 3.1. (Realna Schurova dekompozicija) Za svaku realnu kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da vrijedi:

$$A = QTQ^T,$$

gdje je T realna blok-gornje trokutasta matrica koja sadrži:

- i) realne vrijednosti na dijagonali, koje odgovaraju realnim svojstvenim vrijednostima matrice A ,
- ii) ili 2×2 blokove na dijagonali, koji odgovaraju kompleksno–konjugiranim parovima svojstvenih vrijednosti matrice A .

Ako matrica A ima realne svojstvene vrijednosti, onda je matrica T iz prethodnog teorema gornje trokutasta.

Primjer 3.1. Za matricu

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

njezina Schurova forma je

$$T = Q^T B Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koraci Bartels-Stewartovog algoritma uz svodjenje matrica sustava na Schurovu formu za A i B s realnim svojstvenim vrijednostima su:

1. Schurova dekompozicija: Prvo se odrede Schurove dekompozicije matrica A i B :

$$A = Q_A T_A Q_A^T \quad \text{i} \quad B = Q_B T_B Q_B^T$$

gdje su T_A i T_B gornje trokutaste matrice, a Q_A i Q_B su ortogonalne matrice.

2. Transformacija problema: Originalna Sylvesterova jednadžba transformira se u jednadžbu

$$T_A Y + Y T_B = C' \tag{14}$$

gdje je $C' = Q_A^T C Q_B$ i $Y = Q_A^T X Q_B$.

3. Rješavanje modificirane jednadžbe: Jednadžba $T_A Y + Y T_B = C'$, rješava se supstitucijama unaprijed. Neka je

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_m], \quad y_i \in \mathbb{R}^n, \quad C' = [c'_1, c'_2, \dots, c'_m], \quad c_i \in \mathbb{R}^n,$$

te $T_B = [t_{ij}^{(B)}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Iz jednadžbe (14), izjednačavajući stupce s lijeve i desne strane, dobivamo m linearnih gornje trokutastih sustava

$$(T_A + t_{kk}^{(B)} I_n) y_k = c'_k - \sum_{i=1}^{k-1} t_{ik}^{(B)} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \tag{15}$$

koji se lako rješavaju redom koristeći supstitucije unazad.

4. Računanje konačnog rješenja:

$$X = Q_A Y Q_B^T.$$

Primjer 3.2. Neka su dane sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Treba riješiti Sylvesterovu jednadžbu $AX + XB = C$. Prvo se određuje Schurova dekompozicija matrica sustava. Matrica A je već gornje trokutasta pa je $T_A = A$ i $Q_A = I$. Schurova forma matrice B dana je u Primjeru 3.1. Sada rješavamo modificiranu jednadžbu $T_A Y + Y T_B = C'$, gdje je

$$C' = Q_A^T C Q_B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje redom računamo stupce matrice Y koji se dobiju primjenom supstitucija unazad na trokutaste sustave

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} - y_1,$$

odakle dobivamo $Y = \frac{56}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 17 & -13 \\ -7 & -21 \end{bmatrix}$. Na poslijetku rješenje polazne jednadžbe je

$$X = Q_A Y Q_B^T = Y = \frac{1}{280} \begin{bmatrix} 47 & -9 \\ 7 & -49 \end{bmatrix}.$$

4 Generalizirana Sylvesterova jednadžba

Osim standardne Sylvesterove jednadžbe, postoji i njezina generalizacija koja je oblika (1) za $k = 2$.

Definicija 4.1. Matrična jednadžba

$$A_1 X B_1 + A_2 X B_2 = C, \tag{16}$$

naziva se generalizirana Sylvesterova jednadžba.

Ako su matrice A_2 i B_1 (odnosno A_1 i B_2) obje regularne, tada množenje (16) slijeva s A_2^{-1} (odnosno s A_1^{-1}) i zdesna s B_1^{-1} (odnosno s B_2^{-1}) dovodi do standardne Sylvesterove jednadžbe s istim rješenjem X . Međutim, ako A_2 i B_1 (odnosno A_1 i B_2) nisu obje regularne ili je barem jedna od njih loše uvjetovana, takva transformacija nije moguća. Slično kao i kod standardne Sylvesterove jednadžbe, primjenom Kroneckerovog produkta i operatora vektorizacije mogu se analizirati nužni i dovoljni uvjeti za postojanje i jedinstvenost rješenja generalizirane Sylvesterove jednadžbe. Međutim, u ovom slučaju pojavljuje se složeniji uvjet povezan s generaliziranim svojstvenim vrijednostima matričnih parova (A_1, A_2) i (B_1, B_2) .

Pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja generalizirane Ljapunovljeve jednadžbe

$$AXB^T + BXA^T = C \quad (17)$$

također je povezano sa spektralnim svojstvima matričnog para (A, B) . U slučaju kada je barem jedna od matrica A ili B regularna, jednadžbu (17) moguće je transformirati u standardni oblik Lyapunovljeve jednadžbe. Na primjer, ako je B regularna, tada supstitucijom $Y = B^{-1}X$ i odgovarajućim preuređivanjem dobivamo jednadžbu

$$AY + YA^T = C',$$

što omogućuje primjenu poznatih rezultata i algoritama za standardnu Ljapunovljevu jednadžbu. Za rješavanje općih generaliziranih Sylvesterovih jednadžbi može se koristiti poopćeni Bartels-Stewartov algoritam (vidi[5]).

Literatura

- [1] A. C. Antoulas, *Approximation of large-scale dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2005
- [2] B. N. Datta, *Numerical methods for linear control systems*, Academic Press, San Diego, 2004.
- [3] G. H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix computations*, JHU Press, 2012.
- [4] M. Kovačević, *Sylvesterova i Ljapunovljeva matrična jednadžba* (Završni rad), Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2020.
- [5] V. Simoncini, *Computational methods for linear matrix equations*, SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics, (2016), 377–441.