

Eudoksova metoda iscrpljivanja

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U radu se opisuju principi metode ekshaustije, koja je antički grčki prethodnik limesa i integrala. Njen prvi precizni opis pripisuje se Eudoksu s Knida, a uz njegov doprinos opisani su i primjeri njene primjene iz Euklidovih *Elemenata* te kod Arhimeda iz Sirakuze. Konkretno su istaknuti važni rezultati koji su njome dobiveni - proporcionalnost površine kruga i kvadrata nad njegovim promjerom te Arhimedovi teorem o krugu, kugli i Arhimedovoj spirali. Dan je i kratak pregled njenog korištenja kasnije, do utemeljenja infinitezimalnog računa.

Ključne riječi: *Eudoks s Knida, povijest infinitezimalnog računa, limesi, integriranje, problem površine, Arhimed iz Sirakuze*

Eudoxus' method of exhaustion

Abstract

The paper discusses the principles of the method of exhaustion, which was the ancient Greek predecessor of limits and integrals. Its first precise description is attributed to Eudoxus of Cnidus, and along with his contribution, examples of its application from Euclid's *Elements* and Archimedes of Syracuse are described. Specifically, important results obtained by this method are highlighted - the proportionality of the area of a circle and a square over its diameter, and Archimedes' theorems on the circle, sphere, and Archimedean spiral. A brief overview of its later use, before the foundation of calculus, is also given.

Keywords: *Eudoxus of Cnidus, history of infinitesimal calculus, limits, integration, area problem, Archimedes of Syracuse*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

1 Uvod

Većina čitatelja zasigurno bi na pitanje "Tko je uveo (otkrio, izmislio) deriviranje i integriranje?" lako odgovorila Newton i Leibniz. Dok je neosporno njihov doprinos izniman, razlog zašto se njima pripisuje utemeljenje infinitezimalnog, dakle diferencijalnog i integralnog računa ne leži u tome da su oni prvi znali derivirati i integrirati, nego u tome što su prvi jasno iskazali međusobnu inverznost tih dviju tehnika i prvi dali efikasne, algoritamske metode računanja derivacija i integrala. Štoviše, derivaciju oni zapravo nisu ni imali, već su ono što mi zovemo derivacijom gledali kao kvocijent dviju brzina (vertikalne i horizontalne fluksije kod Newtona) odnosno dviju infinitezimalnih veličina (diferencijala dy i dx kod Leibniza). Oznaka i naziv integrala pak potječu od Leibniza, točnije rečeno iz njegove komunikacije s Johannom Bernoullijem: dok je Bernoulli zaslužan za naziv *calculus integrationis*, integralni račun, oznaku $\int$ osmislio je Leibniz [2]. No, iako je s Newtonovim i Leibnizovim utemeljenjem infinitezimalnog računa krajem 17. st. naglo porasla mogućnost njegovih primjena, a i sami računi postali su lakši i pregledniji, kako se primjerice može saznati iz prethodnog članka [4], već i prije Newtona i Leibniza mnogi su matematičari znali rješavati problem tangente i problem površine, od čega su mnoge njihove tehnike bile očigledni prethodnici deriviranja i integriranja.

Ono što će, vjerujem, začuditi čitatelja slabije upoznatog s poviješću matematike je to da je i stoljećima prije uvođenja Kartezijevog koordinatnog sustava i opisa krivulja pomoću jednadžbi u njemu (R. Descartes, 1637.) u pojedinačnim slučajevima bilo poznato kako konstruirati tangentu na neke krivulje, a za rješavanje problema površine razvijena je i korištena metoda koja je čak i preciznija od Newtonovog i Leibnizovog integriranja (iako manje pregledna i jednostavna u korištenju). Bila je to starogrčka metoda ekshaustije (iscrpljivanja). O njoj ćemo više reći u ovom članku.

2 Eudoks časni, otac iscrpljivanja

Jedan od najznačajnijih matematičara atenskog razdoblja starogrčke matematike bio je matematičar i astronom **Eudoks s Knida** (oko 400.–350. pr. Kr.). Ime Eudoks u prijevodu znači „časni“, Knid je antički grčki grad u Maloj Aziji, u današnjoj Turskoj, blizu grada Marmarisa u provinciji Muğla, a Eudoks je vjerojatno najznamenitije dijete tog grada. Među oskudnim podacima o njegovu životu¹ nalazimo da je studirao matematiku u Tarentu

¹ Glavni izvor saznanja o Eudoksovom životu je biografija koju je skupa s biografijama drugih velikih matematičara napisao Diogenes Laertius u 3. st. n. e.

(današnji Taranto u Italiji) kod Arhite iz Tarenta, vođom pitagorejske škole svoga doba.² Nakon matematike u Tarentu, prvo je kod Filistona na Siciliji studirao medicinu. Zatim je u Atenu došao s liječnikom Teomedonom (prema Diogenesu Laertiusu, kako je citirano u [13], moguće je da je bio Teomedonov „dječak“) gdje je studirao filozofiju. Nakon toga studirao je astronomiju u egipatskom Heliopolisu. U Kiziku na Mramornom moru (kod današnjeg turskog grada Bandırma) osnovao je svoju školu koja je postala vrlo popularna. S nekolicinom sljedbenika vratio se u Atenu oko 368. pr. Kr. Iako je izvjesno da se poznao s Platonom i vjerojatno već u prvom posjetu pohađao njegovu Akademiju, iz izvora nije sasvim jasno koje su mišljenje imali jedan o drugom, a smatra se i da nisu imali značajnijeg utjecaja jedan na drugog. Po nekim izvorima u ovom drugom boravku podučavao je među ostalim i Aristotela. Kasnije se vratio u rodni Knid, gdje je osnovao opservatorij, a njegov Sunčani sat se i danas može ondje vidjeti.³ Eudoksova filozofija bila je hedonistička, što saznajemo iz Aristotelove *Nikomahove etike*, izjednačujući užitek s dobrim. Imao je jednog sina i tri kćeri. Uz temu našeg članka, metodu ekshauzije, Eudoksovi najznačajniji znanstveni doprinosi su njegov planetarni model s koncentričnim sferama, kojeg je opisao Aristotel u svojoj *Metafizici*, te njegova teorija omjera i razmjera, koju nalazimo opisanu u V. knjizi Euklidovih *Elementata* i koja je omogućila precizno baratanje s bar nekim iracionalnim veličinama, koje za antičke Grke nisu bile brojevi. Eudoks je i umro u Knidu, a sva njegova izvorna djela su izgubljena [10, 13, 14].

3 Eudoksove postavke metode iscrpljivanja

Ideja metode iscrpljivanja pripisuje se sofistu i govorniku **Antifontu** (5. st. pr. Kr.), kojemu se pripisuje da je problem kvadrature kruga pokušao riješiti upisivanjem pravilnih mnogokuta u kružnicu. Pritom, za antičke Grke kvadriranje lika znači konstrukcija, neoznačenim ravnalom i šestarom, stranice kvadrata čija je površina jednaka površini zadannog lika. Smatrao je da će se ako dovoljno puta udvostruči broj stranica upisanog mnogokuta razlika površine kruga i mnogokuta „iscrpiti“. No, kod Antifonta ta je ideja značila da će se te površine stvarno i izjednačiti, a kako je bilo poznato da se svaki mnogokut može kvadrirati ravnalom i šestarom, čini se da je Antifont mislio, nepravilno, da je riješio problem kvadrature kruga. Modernim jezikom rečeno, počinio je pogrešku da je iz činjenice

²Podsjećamo, izvorna pitagorejska škola djelovala je u Krotonu u drugoj polovici 6. st. pr. Kr. Nakon političkih previranja i Pitagorine smrti proširila se u druge gradove na području današnje Italije.

³<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Diagrams/Sundial/>

da se svaki član nekog konvergentnog niza (površina) može konstruirati ravnalom i šestarom krivo zaključio da se i njegov limes može konstruirati ravnalom i šestarom. Antifontova ideja je zasigurno utjecala na Eudoksa u formulaciji njegove precizne metode iscrpljivanja koju je zatim primijenio na izračunavanje raznih površina i volumena zaobljenih likova odnosno tijela [2, 10]. Također, prilično je izvjesno da su dokazi pomoću metode ekshaustije (iako vjerojatno manje precizni) stariji od Eudoksa, konkretno se uz Antifonta poznavanje te metode pripisuje Hipokratu s Hiosa (oko 470.–410. pr. Kr.) i Demokritu iz Abdere (oko 460.–370. pr. Kr.) [9].

Dok rezultate o površinama i volumenima određenim Eudoksovom metodom iscrpljivanja nalazimo u XII. knjizi Euklidovih *Elementa* (oko 300. pr. Kr.), sama propozicija na kojoj se temelje ti dokazi, odnosno propozicija koja je temelj metode iscrpljivanja, prva je propozicija u X. knjizi *Elementa* [8]:

Propozicija 3.1 (Metoda ekshaustije). *Ako su dane dvije nejednake veličine,⁴ ako se od veće oduzme veličina veća od polovine, a od ostatka veličina veća od njegove polovine, te ako se taj postupak nastavi neprekidno,⁵ onda će preostati veličina manja od manje od polaznih dviju veličina.*

Dokaz ove propozicije temelji se na također Eudoksovoj definiciji koju nalazimo u V. knjizi *Elementa*: Dvije veličine imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge.⁶ Stoga se Euklidov (vjerojatno izvorni Eudoksov) dokaz ove propozicije odnosi samo na takve veličine, a ne na neke koje se ne bi mogle staviti u omjer [8]. To naravno nije problem za sve standardne situacije primjene propozicije 3.1, a te su na po dvije površine ili dva volumena. Primijetimo da modernim stilom rečeno ova propozicija kaže sljedeće: Ako je $a > \varepsilon > 0$ te ako konstruiramo niz (a_n) u kojem je $a_0 = a$ i $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda postoji n_0 takav da je $a_{n_0} < \varepsilon$, odnosno vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$.

Kao primjer dokaza metodom ekshaustije u Euklidovim *Elementima* navodimo (gotovo doslovno preveden iz [8]) dokaz proporcionalnosti površine kruga i kvadrata nad njegovim promjerom (koji je pak vjerojatno bio poznat spomenutom Hipokratu s Hiosa), a za ostale primjere takvih dokaza upućujemo na [8, 11]. Pritom mislimo na ovo: Kad antički grčki matematičar govori o odnosu dvaju geometrijskih objekata, misli na omjer njihovih mjera (duljina, površina odnosno volumena). Također, iz ovog dokaza vidimo glavnu karakteristiku većine dokaza metodom ekshaustije, a

⁴Podrazumijeva se da imaju istu fizikalnu dimenziju: Dvije duljine, dvije površine, dva volumena, ... U nastavku ćemo govoriti o istovrsnim veličinama.

⁵Misli se: Kroz dovoljno mnogo koraka

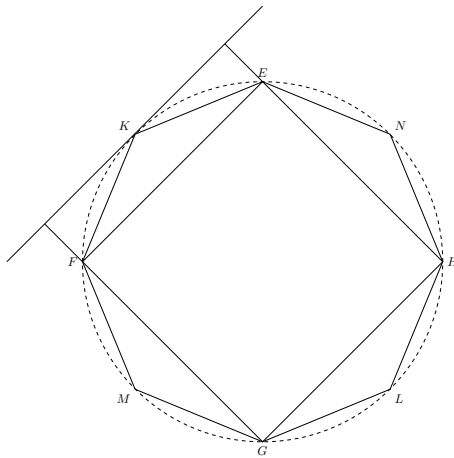
⁶To povlači da veličine koje se stavljaju u omjer moraju biti istovrsne, usp. bilješku 4.

to je da se pretpostavlja suprotno od neke jednakosti pa se dokazuje da obje druge moguće nejednakosti dovode do kontradikcije. Dakle, dokazujemo 2. propoziciju XII. knjige *Elemenata*:

Propozicija 3.2. *Krugovi se međusobno odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.*

Dokaz. Neka su dane kružnice s promjerima $\overline{BD}$ i $\overline{FH}$. Tvrđimo da se prvi krug prema drugom odnosi kao kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$.

Ako se kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$ ne odnosi kao prvi prema drugom krugu, onda je taj odnos jednak odnosu prvog kruga prema nekoj većoj ili manjoj površini od one drugog kruga.



Slika 1. Ilustracija uz dokaz 2. propozicije XII. knjige Euklidovih *Elemenata*

Prvo, neka je taj omjer jednak omjeru prema nekoj manjoj površini S . U drugu kružnicu upišemo kvadrat $EFGH$ (slika 1). Tada je kvadrat $EFGH$ više od pola drugog kruga, jer ako bismo kroz njegove vrhove povukli tangente na kružnicu dobili bismo kvadrat opisan kružnici koji je dvostruko veći od kvadrata $EFGH$, a krug je manji od njega, dakle je upisani kvadrat veći od pola kruga.

Raspolovimo lukove EF , FG , GH i HE točkama K , L , M i N . Spojimo E s K , K s F , F s L , L s G , G s M , M s H , H s N i N s E . Sada je svaki od trokuta EKF , FLG , GMH i HNE također veći od pola odgovarajućeg kružnog odsjeka u koji su upisani, jer ako bismo u K , L , M i N povukli tangente na kružnicu i dopunili do paralelograma nad tetivama $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ i $\overline{HE}$, svaki

od trokuta EKF , FLG , GMH i HNE bit će pola paralelograma oko njega, dok je svaki segment manji od paralelograma, dakle je svaki od trokuta EKF , FLG , GMH i HNE veći od pola opisanog mu kružnog odsjeka.

Prepolavljanjem preostalih kružnih lukova i spajanjem polovišta dužinama, ponavljajući to,⁷ preostat će nam neki kružni odječki koji su⁸ manje od viška drugog kruga u odnosu na površinu S . Jer, u 1. propoziciji X. knjige dokazano je da ako su dane dvije nejednake veličine i ako se od veće oduzme veličina veća od njezine polovine, od ostatka više od njegove polovine i ako se to ponavlja, preostat će veličina manja od manje od dviju polaznih veličina.

Neka su odsjeci označeni kako je opisano i neka su segmenti drugog kruga $EFGH$ nad tetivama $\overline{EK}$, $\overline{KF}$, $\overline{FL}$, $\overline{LG}$, $\overline{GM}$, $\overline{MH}$, $\overline{HN}$ i $\overline{NE}$ ⁹ manji od viška kruga $EFGH$ u odnosu na površinu S . Stoga je ostatak, mnogokut $EKFLGMHN$, veći od S . Sada u prvi krug upišemo mnogokut $AOBPCQDR$ sličan mnogokutu $EKFLGMHN$. Slijedi da se kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$ odnosi kao mnogokut $AOBPCQDR$ prema $EKFLGMHN$.¹⁰ No, po pretpostavci se kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$ odnosi kao krug $ABCD$ (prvi krug) prema površini S , dakle se krug $ABCD$ odnosi prema S kao mnogokut $AOBPCQDR$ prema mnogokutu $EKFLGMHN$. Stoga se krug $ABCD$ prema u njega upisanom mnogokutu odnosi kao S prema mnogokutu $EKFLGMHN$. Krug $ABCS$ je veći od mnogokuta upisanog u njega, pa je S veća od površine mnogokuta $EKFLGMHN$. No, ona je istovremeno i manja, što je nemoguće. Dakle, kvadrat nad $\overline{BD}$ se prema kvadratu nad $\overline{FH}$ ne odnosi kao krug $ABCD$ prema ikojoj površini manjoj od kruga $EFGH$. Analogno se vidi da se krug $EFGH$ prema nikoj površini manjoj od $ABCD$ ne odnosi kao kvadrat nad $\overline{FH}$ prema kvadratu nad $\overline{BD}$.

Sada tvrdimo da se krug $ABCD$ ni prema ikojoj površini većoj od kruga $EFGH$ ne odnosi kao kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$. Jer, ako bi to bilo moguće, neka je takva veća površina S . Stoga se kvadrat nad $\overline{FH}$ prema kvadratu nad $\overline{BD}$ odnosi kao S prema krugu $ABCD$. To znači da se površina S prema krugu $ABCD$ odnosi kao krug $EFGH$ prema nekoj površini manjoj od kruga $ABCD$,¹¹ te se kvadrat nad $\overline{FH}$ prema kvadratu

⁷Misli se: Dovoljno mnogo puta

⁸Misli se: U zbroju njihovih površina.

⁹Vidimo da ovdje Euklid, dakle vjerojatno Eudoks, zapravo misli na ono što danas kažemo „bez smanjenja općenitosti“, jer je u prethodnom zaključio da će uz udvostručavanje broja stranica upisanog pravilnog mnogokuta uz dovoljno mnogo koraka zbroj površina odsjeka biti manji od razlike površine kruga $EFGH$ i površine S .

¹⁰U propoziciji prije ove Euklid je dokazao, za to ne treba metoda ekshauštije, da se slični mnogokuti upisani u dvije kružnice odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

¹¹Ovo je zasebno dokazano u lemi, u istom stilu. Taj dio dokaza preskačemo radi pregled-

nad $\overline{BD}$ odnosi kao krug $EFGH$ prema nekoj površini manjoj od kruga $ABCD$, što smo dokazali da je nemoguće. Stoga se kvadrat nad $\overline{BD}$ prema kvadratu nad $\overline{FH}$ ne odnosi kao krug $ABCD$ prema ikojoj površini većoj od kruga $EFGH$.

Kako je dokazano da nije ni u tom omjeru prema nikojoj površini manjoj od kruga $EFGH$, kvadrat nad $\overline{BD}$ se prema kvadratu nad $\overline{FH}$ odnosi kao krug $ABCD$ prema krugu $EFGH$. $\square$

4 Arhimedova primjena metode ekshaustije

Korištenje metode ekshaustije do savršenstva je doveo najveći primijenjeni matematičar među antičkim Grcima, znameniti **Arhimed iz Sirakuze** (oko 287.–212. pr. Kr.). Iz Arhimedova *Palimpsesta*, točnije palimpsesta¹² otkrivenog 1906. godine, a za koji se ispostavilo da je ispisan preko Arhimedovih tekstova za koje se prije mislilo da su izgubljeni, saznajemo da je Arhimed većinu teorema prvo postavio kao hipoteze temeljem fizikalnog eksperimenta, a zatim dokazivao metodom ekshaustije [1, 2].

Arhimed se u svojim dokazima eksplicitno poziva na Eudoksa i to na Eudoksovu propoziciju 3.1. Naime, Arhimed je Eudoksovu definiciju (4. definicija u V. knjizi *Elementa*) uvjeta da dvije veličine posjeduju omjer [5, 8] u svom djelu *O kugli i valjku* formulirao kao pretpostavku koju danas poznajemo pod nazivom **Arhimedov aksiom** [6, 7]:

Nadalje, za nejednake dužine, nejednake¹³ likove, nejednaka tijela, veće nadmašuje manje za veličinu koja se, kad se pribraja sama sebi, može učiniti većom od bilo koje zadane veličine s kojom su te veličine usporedive¹⁴ (prevedeno iz [7]).

Suvremenim stilom izrečeno: Za svake $a, b, c > 0$, ako je $a > b$, onda postoji prirodan broj n takav da je $n(a - b) > c$.

Među najpoznatijim rezultatima koje je Arhimed dokazao metodom ekshaustije, tj. koristeći gornju pretpostavku i/ili propoziciju 3.1, a koje bismo danas dokazivali integriranjem, su:

- Teorem o površini kruga: Površina kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta ima duljinu polumjera, a druga duljinu opsega kruga. Za dokaz kojeg je Arhimed dao u svom djelu

nosti.

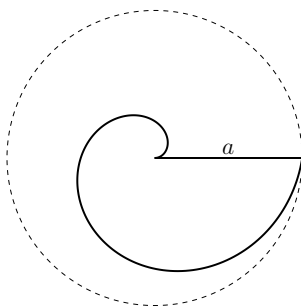
¹²Srednjevjekovni rukopis koji je ispisan nakon guljenja odnosno ispiranja prethodnog teksta.

¹³Još jednom podsjećamo: U starogrčkom smislu jednakost krivulja, likova, tijela nije njihova sukladnost već jednakost njihovih duljina, površina odnosno volumena.

¹⁴Koje su iste fizikalne dimenzije.

O mjerenju kruga i kružnice upućujemo na literaturu [5, 6, 11]. Antički Grci nisu poznavali formule, a nisu ni znali za broj π (niti bi ga prihvatili kao broj), ali suvremenim formulama izrečeno ovaj teorem tvrdi da je za svaki krug $r^2\pi = \frac{1}{2}r \cdot 2r\pi$, odnosno da je konstanta proporcionalnosti koja postoji između površine i polumjera kruga (njena egzistencija je moderan način da iskažemo propoziciju 3.2) ista kao konstanta proporcionalnosti između opsega i promjera kruga (koja je isto bila poznata antičkim Grcima) [3].

- Teoremi o volumenu i oplošju kugle: Oplošje kugle jednako je četverostruko površini najvećeg kruga u njoj (ovo ćemo dokazati niže, vidi propoziciju 4.1). Svaka kugla jednaka je četverostrukom stošcu kojemu je osnovka jednaka najvećem krugu u kugli, a visina jednaka polumjeru kugle (za dokaz ove tvrdnje upućujemo na [6]). Suvremenim stilom izrečeno, Arhimed je dokazao da je za kuglu polumjera r njezino oplošje jednako $4r^2\pi$, a njezin volumen (relacija između volumena stošca i valjka dokazana je metodom ekshaustije u XII. knjizi *Elementata*) jednak je $4 \cdot \frac{1}{3}r^2\pi r = \frac{4}{3}r^3\pi$.
- Kvadratura jednog okreta Arhimedove spirale: Površina omeđena jednim okretom spirale i početnim pravcem jednaka je trećini prvog kruga. Ovo je Arhimed dokazao u svojem djelu *O spiralama*. Mi ćemo dolje dati skraćeni i moderno interpretirani dokaz, a za izvorni dokaz upućujemo na [6]. Budući da je Arhimedova spirala definirana kao trajektorija točke koja se jednoliko kreće po pravcu dok taj pravac jednoliko rotira oko početnog položaja O točke, dakle joj je moderna nadžba u polarnim koordinatama $r = \frac{a}{2\pi}\varphi$, gdje je a udaljenost koju je na pravcu točka prošla tijekom jednog punog okreta (čime je došla do neke točke A), suvremenim formalnim stilom izrečeno Arhimed je dokazao da je površina omeđena dužinom $\overline{OA}$ i prvim okretom Arhimedove spirale jednaka $\frac{1}{3}a^2\pi$ (vidi sliku 2).
- Kvadratura segmenta parabole: Segment omeđen parabolom i njezinom tetivom Qq jednak je četiri trećine trokuta koji ima istu osnovku i visinu kao segment. Pritom pod visinom segmenta parabole Arhimed misli na razmak tetive koja ga određuje i njoj paralelne tangente na parabolu. Ovaj dokaz poznat je kao jedan od prvih primjera korištenja konvergentnog reda (Arhimed *de facto* dokazuje konvergenciju geometrijskog reda s kvocijentom $\frac{1}{4}$ koristeći propoziciju 3.1). Ovu je tvrdnju Arhimed dokazao u svojem djelu *Kvadratura parabole*, a za dokaz upućujemo na [5, 2, 6].



Slika 2. Jedan okret Arhimedove spirale.

Propozicija 4.1. *Oplošje kugle jednako je četverostrukoj površini najvećeg kruga u njoj.*

Dokaz. (prema [6]; pod najvećim krugom u kugli se naravno podrazumijeva krug omeđen nekom velikom kružnicom sfere, tj. krug istog polumjera kao sfera). Neka je k krug jednak četiri puta veliki krug. Tada, ako površina K kruga k nije jednaka oplošju kugle O , onda je ili manja ili veća od njega.

I. Pretpostavimo da je $K < O$. Tada je¹⁵ moguće naći dvije dužine duljina β i γ takve da je $\beta > \gamma$ i

$$\beta : \gamma < O : K.$$

Uzmimo takve dužine i neka je δ njihova srednja proporcionala:¹⁶ $\beta : \delta = \delta : \gamma$. Pretpostavimo da su velikom krugu upisani i upisani pravilni $4n$ -terokuti takvi da im je omjer stranica manji od $\beta : \delta$.¹⁷ Uzmimo da ti mnogokuti i krug rotiraju oko zajedničkog promjera, čime dobijemo tri rotacijska tijela s oplošjima O_u (rotacijsko tijelo nastalo rotacijom upisanog $4n$ -terokuta), O_v (rotacijsko tijelo nastalo rotacijom vanjskog $4n$ -terokuta) i O . Tada je, prema prethodno dokazanoj propoziciji koju zbog duljine iskaza ne navodimo,

$$O_v : O_u = a_v^2 : a_u^2 < \beta^2 : \delta^2,$$

¹⁵Tu se Arhimed poziva na jednu ranije, koristeći Arhimedov aksiom, dokazanu propoziciju da je za svake dvije nejednake veličine moguće naći dvije dužine takve da je omjer dulje prema kraćoj dužini jednak omjeru veće prema manjoj veličini.

¹⁶Geometrijska sredina.

¹⁷Takvi, tj. takav dovoljno velik n , postoje po ranije dokazanoj propoziciji da za svake dvije nejednake veličine i jedan krug postoje tom krugu upisani i opisani mnogokuti takvi da je omjer stranica a_u i a_v upisanog i opisanog mnogokuta manji od omjera veće prema manjoj veličini.

pa slijedi

$$\beta : \gamma < O : K,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom.

II. Pretpostavimo da je $K > O$. U ovom slučaju uzimamo dužine duljina $\beta > \gamma$, sa srednjom proporcionalom δ , takve da je

$$\beta : \gamma < K : O.$$

Opet se velikoj kružnici opišu i upišu pravilni $4n$ -terokut s dovoljno velikim n da bude $a_v : a_u < \beta : \delta$. Opet promotrimo odgovarajuća tri rotacijska tijela te u ovom slučaju dobijemo

$$O_v : O_u < K : O,$$

što je kontradikcije jer je $O_v > O$ i $O_u < O$ (oboje dokazano ranije).

Budući da K nije ni veći ni manji od O , zaključujemo da je $K = O$. $\square$

Posebno dobro se veza metode ekshaustije s limesima i integralima vidi ako malo moderniziramo i prilagodimo izvorne dokaze. Za primjer damo dokaz sljedeće Arhimedove propozicije:

Propozicija 4.2. *Neka je O početna pozicija točke čije gibanje određuje Arhimedovu spiralnu i neka je A pozicija na kojoj se ta točka nalazi nakon jednog punog okreta. Površina A omeđena Arhimedovom spiralom i dužinom $\overline{OA}$ jednaka je trećini površine K kruga s polumjerom $a = |OA|$ (vidi sliku 2).*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $A \neq \frac{1}{3}K$. Tada je ili $A < \frac{1}{3}K$ ili $A > \frac{1}{3}K$.

Za proizvoljni prirodan broj n neka je $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$. Za $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ neka je $P_{n,k}$ točka Arhimedove spirale s polarnim koordinatama $\varphi_{n,k} = k\theta_n$ i $r_{n,k} = \frac{a}{2\pi} \varphi_{n,k}$, a $Q_{n,k}$ točka Arhimedove spirale s polarnim koordinatama $\varphi_{n,k+1}$ i $r_{n,k+1}$ (slika 3). Nadalje, za svaki k neka su $i_{n,k}$ i $I_{n,k}$ kružni isječci između pravaca $OP_{n,k}$ i $OQ_{n,k}$, pri čemu je polumjer od $i_{n,k}$ jednak $r_{n,k}$ ($i_{n,k}$ je Arhimedovoj spirali „upisani“ kružni isječak), a polumjer od $I_{n,k}$ je $r_{n,k+1}$ ($I_{n,k}$ je Arhimedovoj spirali „opisani“ kružni isječak). Očito za svaki n vrijedi

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(i_{n,k}) < A < \sum_{k=0}^{n-1} P(I_{n,k}) = O_n.$$

Ako je $A < \frac{1}{3}K$, onda je $\frac{1}{3}K - A > 0$. Prema principu ekshaustije postoji prirodan broj n takav da je $O_n - A$ (višak površine opisanih isječaka u odnosu na A) manji od $\frac{1}{3}K - A$, tj.

$$O_n < \frac{1}{3}K. \quad (1)$$

Za taj isti n , polumjeri isječaka $I_{n,k}$ su redom $r_{n,1} = \frac{a}{2\pi} \theta_n$, $r_{n,2} = 2 \frac{a}{2\pi} \theta_n$, $\dots$, $r_{n,n} = n \frac{a}{2\pi} \theta_n = a$, tj. čine aritmetički niz s pozitivnim članovima i diferencijom jednakom prvom članu niza. Za takve aritmetičke nizove $a_1, a_2, \dots, a_n$ lako se pokaže da vrijedi

$$3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 < n a_n^2 < 3 \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (2)$$

Stoga za naš niz polumjera vrijedi

$$n a^2 = \sum_{i=1}^n a^2 < 3 \sum_{k=1}^n r_{n,k}^2.$$

Iz proporcionalnosti površina kružnih isječaka jednakog kuta (ovdje θ_n) s kvadratima njihovih polumjera, zaključujemo $K < 3O_n$, odnosno $\frac{1}{3}O_n < K$, što je kontradikcija s nejednakosti (1).

Ako je $A > \frac{1}{3}K$, onda je $A - \frac{1}{3}K > 0$ te gledamo upisane kružne isječke. Opet po principu ekshaustije zaključujemo da postoji prirodan broj n takav da je $A - U_n < A - \frac{1}{3}K$, tj.

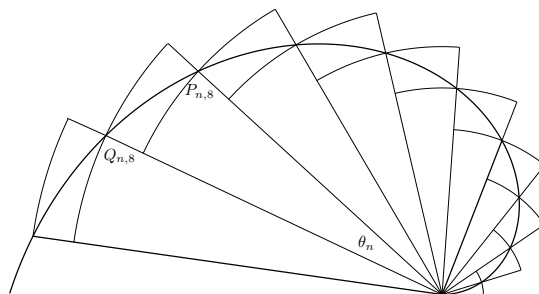
$$\frac{1}{3}K < U_n. \quad (3)$$

Ponovno polumjeri isječaka $i_{n,k}$ čiji zbroj površina daje U_n čine aritmetički niz ($r_{n,0} = 0$), $r_{n,1} = \frac{a}{2\pi} \theta_n, \dots, r_{n-1} = (n-1) \frac{a}{2\pi} \theta_n$. Ignoriramo li nulti član (i dodamo n -ti) opet imamo aritmetički niz za koji vrijede nejednakosti (2), od kojih nam sada treba prva. Na analogan način kao gore iz proporcionalnosti površina isječaka $i_{n,k}$ i kvadrata njihovih polumjera dobivamo da je $K > 3U_n$, a to je pak kontradikcija s nejednakosti (3). $\square$

5 Metoda ekshaustije kroz povijest

S Arhimedovim dokazima metoda ekshaustije doživjela je vrhunac preciznosti korištenja i brojnosti dobivenih rezultata. No to ne znači da je nakon Arhimeda potpuno nestala iz upotrebe.

Među poznatijim kasnijim matematičarima koji su metodom ekshaustije dobili zanimljive rezultate nalazimo tri brata **Banu Musa**, koji su u prvoj polovici 9. st. n. e. djelovali sa znamenitim Al-Hvarizmijem u bagdadskoj *Kući mudrosti* i tako bili među prvim znanstvenicima arapskog kalifata. Njihova primjena metode nije tako precizna kao Arhimedova (nedostaje pravi prijelaz u ono što danas zovemo limesom), ali su dobili nekoliko novih rezultata. Također, **Tabit ibn Kurra** (oko 836.–901.), s kojim smo se



Slika 3. Ilustracija uz dokaz propozicije 4.2.

u ovom serijalu već susretali, koristio je varijantu metode ekshaustije da odredi razne površine i volumene, primjerice odsječka parabole na drugačiji, današnjem integriranju sličniji, način nego Arhimed [10, 12].

Nakon renesanse, u kojoj su zapadni Europljani kako dobro znamo iz opće kulture i povijesti ponovno otkrili antiku, nekolicina matematičara su u prvoj polovici 17. st., dakle prije Newtonovog i Leibnizovog utemeljenja infinitezimalnog računa, izveli svoje varijante metode ekshaustije. Najpoznatiji primjer je metoda nedjeljivih veličina koju je 1635. uveo **Bonaventura Cavalieri** (1598.–1647.) temelji se na metodi ekshaustije i na Keplerovoj metodi određivanja površina i volumena.

Na kraju, spomenimo nešto i o nazivu. Netko bi na prvi pogled mogao pomisliti da izraz metoda ekshaustije potječe još iz antike. Uz malo razmišljanja o etimologiji (ekshaustija dolazi od latinske riječi *exhaurire*), lako ćemo shvatiti da to nije tako: izraz nije grčki, a stari Rimljani nisu imali smisla za znanost i njihovi rijetki prijevodi starogrčkih matematičkih djela su bili nekvalitetni i povijesno nebitni. No, latinski jezik je dugo ostao jezikom kulture i obrazovanja u Europi. Naziv ekshaustija uveden je tek u 17. stoljeću: flamanski isusovac i matematičar **Gregorius Saint-Vincent** (1584.–1667.) je, čini se, prva osoba koja je (1647.) koristila glagol *exhaurire*, iscrpljivati, u geometrijskom smislu, a najstarija poznata pojava naziva „metoda ekshaustije“ potječe od engleskog matematičara **Johna Wallisa** (1616.–1703.), važnog prethodnika utemeljenja infinitezimalnog računa. On 1685. u *Treatise of Algebra* kaže: „Bit će nužno pretpostaviti nešto što se tiče (kako je to uobičajeno nazivati) metode ekshaustije“ [10].

6 Zaključak

Kao što je vidljivo iz navedenih rezultata, antički Grci, specijalno Eudoks, Euklid i Arhimed, znali su koristeći metodu ekshaustije vrlo precizno dokazati teoreme o površinama i volumenima koje bismo danas dokazivali integriranjem. Dok je, naravno, integriranje efikasnije i preglednije, ne možemo ne uočiti iznimnu preciznost dokaza metodom ekshaustije, tj. antičkom formom računanja limesa nizova. Tom su metodom u antici, ali i njezinim varijantama u doba Arapskog kalifata te u prvoj polovici 17. stoljeća u zapadnoj Europi dobiveni mnogi važni rezultati. Među rezultatima dobivenim metodom ekshaustije najpoznatiji su Arhimedovi rezultati o površini kruga te oplošju i volumenu kugle. Ti su pak povezani s povijesti vjerojatno najznamenitije matematičke konstante π , o čijoj ranoj povijesti smo već pisali ([3]), a u sljedećem ćemo nastavku reći više o povijesti broja π u novoj eri, sve do uvođenja njegova simbola u 18. stoljeću.

Literatura

- [1] Tom M. Apostol, Mamikon A. Mnatsakanian, *A Fresh Look at the Method of Archimedes*, The American Mathematical Monthly, 111:6 (2004) 496–508.
- [2] F. M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*, Berlin: Springer Spektrum, 2018.
- [3] F. M. Brückler, π prije nego se za njega znalo, Osječki matematički list, 21(2) (2021), 151–161.
- [4] F. M. Brückler, *Helena geometrijska iliti cikloida*, Osječki matematički list, 24(1) (2024), 75–86.
- [5] F. M. Brückler, *Povijest matematike*. Online-skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2024. https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a (pristupljeno 26. travnja 2024.)
- [6] T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, New York: Dover, 1953.
- [7] J. Hjelmslev, *Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma*, Centaurus, 1(1) (1950), 2–11.
- [8] D. E. Joyce, *Euclid's Elements*, 1998. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> (pristupljeno 5. studenoga 2024.)

- [9] T. Kouremenos, *Mathematical Rigor and the Origin of the Exhaustion Method*. Centaurus 39 (1997), 230–252.
- [10] MacTutor History of Mathematics Archives. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/> (pristupljeno 13. studenoga 2024.)
- [11] I. Matanović, *Metoda ekshautije*. Diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.
- [12] M. Heritage, *Thabit ibn Qurra*. <https://muslimheritage.com/thabit-ibn-qurra/> (pristupljeno 13. studenoga 2024.)
- [13] O. M. Moen, *Eudoxus: The Hedonistic Mathematician*. <https://olemartinmoen.substack.com/p/eudoxus-the-hedonistic-mathematician> (pristupljeno 5. studenoga 2024.)
- [14] H. K. Strick, *Eudoxos von Knidos*. Spektrum der Wissenschaft, 2015. <https://www.spektrum.de/wissen/eudoxos-von-knidos-der-schoepfer-dere exhaustionsmethode/1331747> (pristupljeno 5. studenoga 2024.)