

Aritmetički i geometrijski nizovi u otkrivanju novih spoznaja

Dragana Jankov Maširević*, Barbara Barunović†

Sažetak

U radu se analiziraju aritmetički i geometrijski nizovi te njihova primjena u otkrivanju novih spoznaja. Poseban naglasak stavljen je na edukativnu primjenu ovih nizova, uključujući zadatke za učenike koji povezuju teoriju s praksom. Cilj je pokazati značaj ovih nizova u razumijevanju i rješavanju raznovrsnih problema.

Ključne riječi: *niz, aritmetički niz, geometrijski niz, primjena u svakodnevnom životu*

Arithmetics and geometric sequences in the discovery of new cognition

Abstract

The paper analyzes arithmetic and geometric sequences and their application in discovering new insights. Special emphasis is placed on the educational application of these sequences, including tasks for students that connect theory with practice. The aim is to demonstrate the importance of these sequences in understanding and solving various problems.

Keywords: *sequence, arithmetic sequence, geometric sequence, application in real-life*

*Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: djankov@mathos.hr

†Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: bbarunov@mathos.hr

1 Nizanje i nizovi od najranijeg djetinjstva

Još od najranijeg djetinjstva imamo potrebu prebrojavati predmete: koliko smo dobili bombona, koliko dana još treba proći do važnog događaja, koliko imamo lutaka ili autića... Također i u prvim tjednima provedenima u školskoj klupi srećemo se s nizovima, jer već u prvom razredu osnovne škole učenik treba ostvariti jedan od odgojno–obrazovnih ishoda kao što je *nastaviti niz*. Naime, kao što je i navedeno u kurikulumu nastavnog predmeta Matematika, za 1. razred osnovne škole, učenici mogu uočavati pravilnosti nizanja u svakodnevnome okruženju, kao što su izmjena dana i noći, dani u tjednu, prozori na školskoj zgradi i slično, dok zadaci u kojima se od učenika zahtijeva da nastave niz potiču logičko mišljenje. Pojam niza spominje se i nadograđuje kroz školovanje, a njegova se kulminacija odvija u 4. razredu srednje škole gdje se *primjenjuje aritmetički i geometrijski niz* javlja kao odgojno–obrazovni ishod te učenici, između ostalog, trebaju ostvariti *rješavanje problema iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza, osobito složeni kamatni račun* [5, 9, 11, 12].

Kao što možemo uočiti iz prethodnih primjera i konačno se nabranje, u svakodnevnom govoru naziva *nizom*, dok se u matematici u pravilu promatraju *beskonačni nizovi* [3]. Preciznije [7, 8]:

Definicija 1.1. Funkciju $a: \{1, 2, \dots, s\} \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo konačnim nizom realnih brojeva i zapisujemo u obliku uređene liste brojeva

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_s,$$

gdje je $a(n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots, s$ opći ili n -ti član niza.

Funkciju $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ kojoj je domena skup prirodnih brojeva, a kodomena skup realnih brojeva nazivamo (beskonačni) niz realnih brojeva i označavamo s

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{ili} \quad (a_n).$$

Dakle, niz se najčešće zadaje općim članom, no osim toga uobičajeno je zadavanje niza i uz pomoć *rekurzivne formule* što znači da je taj niz zadan pravilom koje nam govori kako se iz jednog ili više prethodnih članova dobije sljedeći član [2, 7].

2 Aritmetički i geometrijski niz

Najstariji matematički izvori potječu iz staroegipatske države, dok o egipatskoj matematici postoje dva glavna izvora: Rhindov papirus i Moskovski papirus. U prvom od njih, napisanom oko 1650. g. pr. Kr. od strane pisara

Ahmesa (oko 1680.–1620. pr. Kr.), a nazvanom po škotskom egiptologu Alexanderu Henryju Rhindu, koji ga je kupio 1858. u Luxoru, mogu se naći zadaci vezani za aritmetičke i geometrijske nizove [2, str. 2].

2.1 Aritmetički niz

Još od prvih zaključivanja ocjena u osnovnoj školi, svatko se od nas susreo s pojmom *aritmetičke sredine* računajući zaključnu ocjenu. Učenici vrlo brzo nauče da će iz ocjena 3 i 5 vrlo vjerojatno dobiti zaključnu ocjenu vrlo dobar, jer je $(3 + 5)/2 = 4$, odnosno aritmetička sredina danih brojeva je upravo 4. Aritmetički niz upravo nosi takvo ime, jer je svaki njegov član (osim prvog) aritmetička sredina svojih susjeda, u što ćemo se uskoro uvjeriti, no pogledajmo najprije jedan motivacijski primjer.

Primjer 2.1 (Štednja za bicikli kao suma aritmetičkog niza). *Dunja je učenica četvrtog razreda gimnazije i stanuje u Višnjevcu, što je prigradsko naselje u sastavu Grada Osijeka. Mjesec je listopad i Dunja je odlučila do 1. ožujka uštedjeti za novi bicikli, jer će tada početi i pripreme za državnu maturu te želi ponekad i biciklom otići u školu. Na web stranici Decathlona pronašla je bicikli koji joj se sviđa i koji košta 416 eura. U listopadu je za bicikli ostavila sa strane 10 eura te je odlučila svaki sljedeći mjesec odvojiti 12 eura više nego prethodni mjesec, tj. u studenom bi odvojila 22 eura, u prosincu 34 eura i tako dalje. Hoće li u naredna 4 mjeseca uspjeti uštedjeti za bicikli s tim planom ili će joj ipak trebati malo više vremena? Kako bi Dunja došla do odgovora mogla bi plan štednje napisati na papir no ipak je lakše odgovoriti na pitanje uz pomoć poznavanja aritmetičkog niza u što ćemo se uskoro uvjeriti.*

Definicija 2.1. *Niz je aritmetički ako je razlika bilo kojeg člana (osim prvog) i člana koji mu direktno prethodi stalna i iznosi d , odnosno vrijedi*

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

Broj d naziva se razlika ili diferencija aritmetičkog niza.

Iz prethodnog slijedi da je $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, odnosno

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2,$$

što potvrđuje da je svaki član aritmetičkog niza (osim prvog), aritmetička sredina susjedna dva člana.

Također, iz jednakosti (1) možemo uočiti da je aritmetički niz zadan rekurzivno i jednostavno je izvesti formulu za opći član, kako slijedi:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 0 \cdot d, \\ a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 2.1. *Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d je dan s*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije.

- *Baza indukcije* Iz prethodnog raspisa vidimo da dana formula vrijedi za $n = 1, 2, 3, 4$.
- *Pretpostavka indukcije* Pretpostavimo da formula (2) vrijedi za prirodni broj n .
- *Korak indukcije* Koristeći definiciju (1) za $n \mapsto n + 1$, a zatim induktivnu pretpostavku, slijedi

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n - 1)d + d = a_1 + [(n - 1) + 1]d = a_1 + nd,$$

odnosno formula (2) vrijedi za prirodni broj $n + 1$. □

Primjer 2.2 (Interpolacija aritmetičkog niza). *Neka su zadani 5. i 40. član aritmetičkog niza (a_n) s $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$. Možete li odrediti koliko iznosi a_{13} ?*

Rješenje. Iz formule za opći član niza slijedi

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d = 2 \\ a_{40} &= a_1 + 39d = 142. \end{aligned}$$

Iz prethodne dvije jednačbe s dvije nepoznanice (uz pomoć neke od poznatih metoda za rješavanje sustava linearnih jednačbi) slijedi rješenje $a_1 = -14$, $d = 4$ te je stoga

$$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d = -14 + 12 \cdot 4 = 34.$$

Napomena 2.1. Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, kako bismo odredili aritmetički niz (odnosno njegov opći član) dovoljno je poznavati bilo koja dva člana niza (ne nužno dva uzastopna člana!). Problem određivanja članova niza u tom se slučaju naziva interpolacija. Naime, interpolirati (umetnuti) između dva zadana broja a i b aritmetički niz od k članova znači odrediti k brojeva, koji zajedno s a i b čine konačan aritmetički niz od $k + 2$ članova, kome je a prvi, a b posljednji član [8, str. 79].

U mnogim nam je primjenama važan i zbroj prvih nekoliko članova aritmetičkog niza [1, 12].

Teorem 2.2 (Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza). Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad (3)$$

odnosno

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d). \quad (4)$$

Dokaz. Iz iskaza teorema vidimo da smo sa S_n označili zbroj prvih n članova aritmetičkog niza, odnosno

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n;$$

dok S_n često nazivamo n -ta parcijalna suma aritmetičkog niza, niz (S_n) se naziva niz parcijalnih suma.

Primijetimo da ukoliko prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

s prvim članom a_1 i diferencijom d napišemo u suprotnom poretku

$$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$$

ponovo imamo aritmetički niz no ovaj put s prvim članom a_n i diferencijom $-d$. Zbog toga se zbroj S_n može napisati na dva načina:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n - 1)d) \end{aligned}$$

te zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

što je jednako danoj formuli (3).

Ukoliko u (3) uvrstimo formulu za opći član niza (2) odmah dobivamo (4). \square

Sada smo spremni riješiti motivacijski primjer.

Primjer 2.3 (Štednja za bicikli kao suma aritmetičkog niza, rješenje). *Dunja će u listopadu za bicikli ostaviti 10 eura što znači da je $a_1 = 10$, dok će svaki sljedeći mjesec odvojiti 12 eura više iz čega zaključujemo da je $d = 12$. Dunja planira štedjeti u studenom, prosincu, siječnju i veljači te se pita hoće li ta 4 mjeseca ($n = 4$) biti dovoljna za uštedjeti dovoljno novca. Uz danu pretpostavku $S_n = 416$, iz formule (4) možemo dobiti traženi n odnosno broj mjeseci potrebnih da bi Dunja uz svoj plan uštedjela za bicikli:*

$$416 = \frac{n}{2} (2 \cdot 10 + (n - 1) \cdot 12)$$

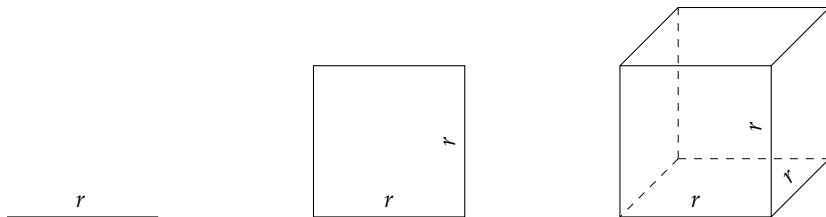
iz čega, sređivanjem, slijedi

$$416 = 6n^2 + 4n$$

te kao rješenja jednadžbe $3n^2 + 2n - 208 = 0$ dobivamo $n_1 = 8$, $n_2 = -\frac{26}{3}$. Kako n_2 nije prirodan broj, zaključujemo da će Dunji trebati 8 mjeseci da sa svojim planom uštedi za bicikli. Na sreću, prijatelj Luka će joj posuditi bratov bicikl dok je na studiju u inozemstvu, sve dok Dunja ne uštedi za vlastiti.

2.2 Geometrijski niz

Iako se samo ime niza veže uz *geometrijsku sredinu* s kojom ćemo se nešto kasnije detaljnije upoznati, ona nam nije toliko *bliska* kao aritmetička sredina te je zanimljivo spomenuti da se ponekad ime ovoga niza veže i uz činjenicu da se članovi geometrijskog niza *ponašaju* slično kao neke geometrijske veličine pri povećanju dimenzija. Naime, kao što možemo vidjeti na slici 1, dužina je jednodimenzionalna i ima, na primjer, duljinu r , u dvije dimenzije kvadrat duljine stranice r ima površinu r^2 , u tri dimenzije kocka duljine brida r ima volumen r^3 itd.



Slika 1.

Također za geometrijski niz možemo definirati pojmove koje smo spomenuli i u prethodnom poglavlju, kao što su opći član i zbroj prvih nekoliko članova, no pogledajmo najprije jedan motivacijski primjer.

Primjer 2.4 (Zrna pšenice na šahovskoj ploči i geometrijski niz). *Svatko je od nas čuo za igru šah. Šahovska literatura poznaje mnoge legende o postanku ove igre, dok je najpoznatija ona da je šah izmislio mudrac Sissa Ben Dahir u Indiji za vrijeme vladavine mladog kralja Šahrama koji je bio tiranin [6, str. 7]. Naime, da bi poučio kralja kako se bez naroda ne može vladati, Ben Dahir je uz pomoć igre šah pokazao kako i najslabija figura (pješak) može odlučiti ishod bitke na 64 polja i donijeti pobjedu. Kralj se oduševio igrom i brzo je naučio te je od mudraca zatražio da izabere nagradu. Ben Dahir je od kralja zatražio prividno skromnu nagradu: da mu se isporuči onoliko pšenice koliko se dobije kada se na prvo polje šahovske ploče stavi jedno zrno, na drugo dva, na treće četiri i tako nadalje na svako naredno polje po dva puta više nego na prethodno. Kralj je pomislio da se radi o beznačajnoj količini pa je mudracu predložio da zatraži veću nagradu, no Ben Dahir je ostao pri svojoj želji. Kasnije je kralj bio jako iznenađen kada su mu priopćili da u čitavom svijetu nema toliko pšenice da bi se udovoljilo želji mudraca. Naime, Ben Dahiru je trebalo dati 18 446 744 073 709 551 615 zrna pšenice. Kako su kraljeve sluge došle do toga broja? Odgovor ćemo lako pronaći kada se upoznamo s geometrijskim nizom.*

Definicija 2.2. *Niz je geometrijski ako je kvocijent bilo kojeg člana (osim prvog) i člana koji mu direktno prethodi stalan i iznosi q , odnosno vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5)$$

iz prethodnog dobivamo i

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Iz (5) odmah slijedi da je

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

što potvrđuje da je svaki član geometrijskog niza (osim prvog), geometrijska sredina njemu susjednih članova.

Formulu za opći član geometrijskog niza možemo naslutiti iz jednakosti

(6), uvrštavajući redom prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0, \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1, \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2, \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3, \quad \vdots \end{aligned}$$

Dakle, na sličan način kao što smo to napravili u Teoremu 2.1 zaključujemo:

Teorem 2.3. *Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q dan je s*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Pokušajte dokazati prethodni teorem metodom matematičke indukcije, za vježbu!

Na primjeru aritmetičkog niza objasnili smo primjer interpolacije. Interpolirati možemo također i geometrijski niz kao što ćemo se i uvjeriti u nastavku.

Primjer 2.5 (Interpolacija geometrijskog niza). *Umetnite tri člana između 1 i 256 tako da tih pet brojeva čini geometrijski niz.*

Rješenje. Očito je da trebamo odrediti tri člana a_2, a_3, a_4 u geometrijskom nizu

$$a_1 = 1, a_2, a_3, a_4, a_5 = 256.$$

Iz formule za opći član niza slijedi $a_5 = a_1 \cdot q^4$, odnosno $256 = 1 \cdot q^4$ iz čega zaključujemo da je kvocijent $q = 4$. Sada su traženi članovi niza

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q = 1 \cdot 4 = 4 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 = 1 \cdot 4^2 = 16 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 4^3 = 64. \end{aligned}$$



Kako bismo mogli odgovoriti na pitanje o broju zrna pšenice na šahovskoj ploči, potreban nam je i zbroj prvih nekoliko članova geometrijskog niza.

Teorem 2.4 (Zbroj prvih n članova geometrijskog niza). *Zbroj prvih n članova geometrijskog niza, s kvocijentom $q \neq 1$ dan je formulom*

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad (8)$$

dok je za $q = 1$ očito

$$S_n = n \cdot a_1. \quad (9)$$

Dokaz. Iskoristimo li formulu (7) za opći član geometrijskog niza, zaključujemo

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \end{aligned}$$

te ukoliko pomnožimo prethodnu jednakost s kvocijentom q slijedi

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n.$$

Oduzimanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n,$$

odnosno, uz pretpostavku da je $q \neq 1$ dobivamo formulu (8). Ako je $q = 1$ tada je očito

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1,$$

što je upravo jednako formuli (9). □

Sada smo spremni riješiti motivacijski primjer.

Primjer 2.6 (Zrna pšenice na šahovskoj ploči i geometrijski niz, rješenje).

U ovom se primjeru radi o geometrijskom nizu s prvim članom $a_1 = 1$ i kvocijentom $q = 2$. Na prvom polju se nalazi 1 zrno, na drugom 2 zrna, na trećem 4 i tako dalje, dok se na posljednjem mjestu šahovske ploče nalazi čak $a_{64} = a_1 \cdot q^{63} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ zrna pšenice. Ukupan broj zrna na svim poljima je

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

3 Zanimljivi primjeri vezani uz opisane nizove

Primjer 3.1. *Dunja i Luka planiraju upisati Fakultet primijenjene matematike i informatike u Osijeku (MATHOS) te su se priključili organiziranom posjetu gdje su saznali više o MATHOSu i poslušali zanimljiva predavanja. Jedno od predavanja bilo je vezano uz Buffonov pokus (vidi [10]) te su učenici dobili mali droeni štapić (koji je oponašao ulogu šibice ili igle u originalnom pokusu) kako bi sami proveli pokus. Kada su izašli s MATHOSa, Luka je od svih ostalih učenika posudio štapiće i počeo ih slagati u nizove kvadrata kao na slici 2:*



Slika 2.

Dunja se pitala koliko će mu štapića trebati da složi 12 kvadrata u jednom nizu te može li neki niz kvadrata složiti od točno 150 štapića?

Rješenje. Sa slike 2 vidimo da je prvi kvadrat složen od četiri štapića, dva su kvadrata složena od sedam štapića, za tri kvadrata Luki je bilo potrebno deset štapića te možemo uočiti da za svaki idući treba dodati točno po tri štapića, odnosno dobivene brojeve možemo zapisati u niz

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

Dakle, kako bi Dunja dobila odgovor na svoje prvo pitanje, mogla bi s Lukom slagati i brojati štapiće u svakom sljedećem koraku, dok ne dođu do 12 kvadrata u jednime nizu, ili mogu uočiti da je prethodni niz aritmetički s $a_1 = 4$, $d = 7 - 4 = 3$ te je

$$a_{12} = 4 + 11 \cdot 3 = 37,$$

odnosno, potrebno je 37 štapića za 12 kvadrata u nizu. Odgovor na drugo pitanje daje formula za opći član aritmetičkog niza (provjerite!) dok s druge strane odmah možemo zaključiti da broj $150 - 4 = 146$ nije djeljiv s 3, što znači da od točno 150 štapića ne možemo složiti niz kvadrata. ◀

Primjer 3.2. *Proljeće je i u dvorištu škole se planira izdvojiti veći dio zemljišta kako bi se zasadio vrt. Domar je zamislio taj dio zemljišta napraviti u obliku trapeza čija bi dulja stranica trebala započeti redom od 97 cigli, koje je već poslagao i na taj način potrošio sve cigle koje je imao u skladištu. Svaki red mora se smanjiti za jednu ciglu na svakom kraju, a gradnja bi se trebala zaustaviti na 25. redu. Domar se pita koliko cigli treba kupiti, a za pomoć se obratio nastavnici matematike koja je zatim problem postavila svojim učenicima.*

Rješenje. Dulja stranica trapezoidnog vrta sastoji se od 97 cigli, svaki sljedeći red se treba smanjiti za po jednu ciglu sa svakog kraja, dok se konstrukcija mora zaustaviti kada dođe do 25. reda. Zapišemo li broj cigli u svakom redu kao niz

$$97, 95, 93, \dots$$

možemo uočiti da se radi o aritmetičkom nizu s prvim članom $a_1 = 97$ i diferencijom $d = -2$ te treba izračunati S_n za $n = 25$. Prema formuli (4) je

$$S_{25} = \frac{25}{2} (2 \cdot 97 + 24 \cdot (-2)) = 1825.$$

Dakle, domaru treba 1 825 cigli, a kako je 97 cigli već poslagaio, on mora kupiti još $1\ 825 - 97 = 1\ 728$ cigli. ◀

Primjer 3.3. *Na satu Biologije učenici su učili o bakterijama -jednostaničnim organizmima, nevidljivim ljudskom oku koje je moguće vidjeti samo elektronskim ili svjetlosnim mikroskopom. Dok su neke bakterije koje se nalaze u čovjekovom tijelu korisne i nužne za normalno funkcioniranje, neke mogu izazvati i razne bolesti. U povoljnim se uvjetima bakterije razvijaju vrlo brzo. Na primjer, jedna se od poznatijih bakterija Escherichia coli u optimalnim uvjetima dijeli svakih 20 minuta. Nastavnica biologije je iskoristila prethodno stečeno znanje učenika da im postavi pitanje: koliko će se takvih bakterija u optimalnim uvjetima razviti od jedne bakterije nakon 6 sati?*

Rješenje. S obzirom na to da se bakterija dijeli svakih 20 minuta, od jedne bakterije imamo dvije za 20 minuta, 4 za 40 minuta, 8 za 60 minuta itd. Dakle, radi se o geometrijskom nizu 1, 2, 4, 8... kojemu je očito prvi član $a_1 = 1$ i kvocijent $q = 2$. Treba pronaći broj bakterija koje ćemo imati za 6 sati. Kako je 1 sat jednak 60 minuta, za 6 sati proći će $6 \times 60 = 360$ minuta. Bakterije se razmnožavaju svakih 20 minuta te će broj razmnožavanja bakterija u 6 sati biti $360/20 = 18$; preciznije, za 6 sati će se bakterija udvostručiti 18 puta (prvi put kada se udvostruči dobivamo $a_2 = 2$, drugi put dobivamo $a_3 = 4$ itd.) što znači da treba odrediti 19. član danog niza:

$$a_{19} = a_1 \cdot q^{18} = 262\ 144,$$

odnosno za 6 sati ćemo od jedne, polazne, bakterije imati čak 262 144 bakterija. ◀

Primjer 3.4. *Dunjina je obitelj odlučila štedjeti u banci koja nudi 3.5% godišnju kamatu. Dogovorili su se da će na početku svake godine na račun stavljati 533 eura i da ušteđevinu neće podizati. Koliko će iznositi njihova ušteđevina nakon 10 godina? Može li Dunja to izračunati uz pomoć znanja koje je usvojila pri obradi geometrijskog niza?*

Rješenje. Promatramo situaciju u kojoj se isti iznos $S = 533$ eura uplaćuje na početku svake godine i oročava na vrijeme od $n = 10$ godina pri čemu godišnji interes $p\%$ iznosi 3.5%. Svota uplaćena na početku prve godine

donijet će, zajedno s kamatama i kamatama na kamate iznos od $S \cdot r^n$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ kamatni faktor (vidi [4, str. 106]). Nadalje, svota uplaćena na početku druge godine donijet će iznos od $S \cdot r^{n-1}$ itd. dok će svota uplaćena na početku posljednje godine vrijediti na kraju $S \cdot r$; u tom trenutku ukupna svota iznosi

$$S_n = Sr^n + Sr^{n-1} + \dots + Sr = Sr(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = Sr \frac{r^n - 1}{r - 1}. \quad (10)$$

Dakle, ušteđevina obitelji iz našeg primjera iznosi

$$S_{10} = 533 \cdot 1.035 \cdot \frac{1.035^{10} - 1}{1.035 - 1} = 6\,471.68,$$

odnosno 6 471.68 eura. Dunja je lako mogla primijeniti formulu (10), jer je ona dobivena uz pomoć formule za zbroj geometrijskog niza (8). ◀

Napomena 3.1. *Prethodni se zadatak u vrlo sličnom obliku nalazi u Kurikulumu nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. i to u preporukama za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda, a vezan je uz složeni kamatni račun, pri čemu se primjenjuje geometrijski niz (vidi [13, str. 146]).*

Primjer 3.5. *Nastavnica matematike je na kraju obrade ovih specijalnih nizova cijelom razredu zadala zadatak da osmisle primjer koji povezuje aritmetički i geometrijski niz, pri čemu su trebali raditi u paru na način da svaki od učenika osmisli zadatak te ga da svom paru na rješavanje kako bi se uvjeriti u korektnost zadatka i njegovog rješenja. Dunja je sljedeći zadatak postavila Luki: Tri broja čiji je zbroj 124 imaju svojstvo da su prvii članovi geometrijskog niza i istovremeno prvii, jedanaesti i trinaesti član aritmetičkog niza. Koliko iznosi umnožak tih brojeva?*

Rješenje. Luka je na papir najprije zapisao: a_1, a_2, a_3 su članovi geometrijskog niza, a b_1, b_{11}, b_{13} su članovi aritmetičkog niza, dok pri tome vrijedi

$$a_1 = b_1 \quad (11)$$

$$a_2 = b_{11}, \quad \text{tj.} \quad a_1 q = b_1 + 10d \quad (12)$$

$$a_3 = b_{13}, \quad \text{tj.} \quad a_1 q^2 = b_1 + 12d. \quad (13)$$

Oduzimanjem jednakosti (13) i (12) te zatim (12) i (11) dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 q(q - 1) &= 2d \\ a_1(q - 1) &= 10d, \end{aligned}$$

odakle očito slijedi $\frac{2d}{q} = 10d$, odnosno $q = \frac{1}{5}$, uz pretpostavku da niz nije stacionaran, tj. da je $d \neq 0$. Iz uvjeta zadatka također vrijedi

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = b_1 + b_1 + 10d + b_1 + 12d = 124,$$

tj.

$$a_1(1 + q + q^2) = 3b_1 + 22d = 124.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $q = \frac{1}{5}$, iz prethodne jednakosti slijedi vrijednost prvog člana niza $a_1 = 100$. Nadalje, tada je

$$a_2 = a_1 \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 100 \cdot \frac{1}{25} = 4.$$

Traženi umnožak iznosi

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8\,000. \quad \blacktriangleleft$$

Primjer 3.6. *Kada je nastavnica čula zanimljive primjere koje su učenici osmislili, zamolila je Dunju da napravi plakat formata A3 na kojemu će zapisati nekoliko primjera. Također, zamolila je Martu da napravi nekoliko kartica formata A7, s pojedinačno zapisanim primjerima. Dunja i Marta znaju da osnovni format papira nosi oznaku A uz koju se stavljaju brojevi 0, 1, 2, ... Pri tome, početni format A0 ima dimenzije $841\text{mm} \times 1189\text{mm}$ i površina mu iznosi $999\,949\text{ mm}^2$, odnosno približno 1 m^2 ; sljedeći format A1 dobije se tako da se dulja stranica formata A0 prepolovi, format A2 dobije se tako da se dulja stranica formata A1 prepolovi i tako dalje s ostalim formatima. Koliko onda iznose dimenzije formata A3 i A7? Imaju li navedene površine veze s geometrijskim nizom?*

Rješenje. Primijetimo, s obzirom na to da se površina svakog sljedećeg formata dobije tako da se površina prethodnog formata podijeli s 2 (jer samo jednu, tj. dulju stranicu dijelimo s 2), da je $P_{A_n} = P_{A_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, odnosno površina plakata formata A3 iznositi će $P_{A_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 124\,994\text{ mm}^2$, a površina formata A7 jednaka je $P_{A_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 7\,812.1\text{ mm}^2$. Možemo primijetiti da vrijednosti površina plakata, redom, čine geometrijski niz s prvim članom P_{A_0} i kvocijentom $q = \frac{1}{2}$. \blacktriangleleft

Literatura

- [1] B. BARUNOVIĆ, *Nizovi*, Završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Osijek, 2024.
- [2] F. M. BRÜCKLER, *Povijest Matematike I – izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
- [3] F. M. BRÜCKLER, *Nizovi i redovi*
https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/mat2-pred13.pdf
- [4] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 4, Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola*, 1. izdanje, Element, Zagreb, 2001.
- [5] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 4, Zbirka zadataka za IV. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1999.
- [6] B. ĐURAŠEVIĆ, S. DOMAZET, *Šah i šahisti*, Centar za unapređivanje šaha, Sportska knjiga, Beograd, 1980.
- [7] M. CRNJAC, D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.
- [8] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.
- [9] I. MATIĆ, Lj. JUKIĆ MATIĆ, M. ZELČIĆ, M. ŠUJANSKY, T. SRNEC, T. VUKAS, Ž. DIJANIĆ, *Matematika 4 - udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje - 5, 6 i 7 sati tjedno - 1. i 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.
- [10] P. NOVAKOVIĆ, *Prošireni Buffonov pokus*, Osječki matematički list, **11** (2011), 29–38.
- [11] I. ŠUFLAJ, *Nizovi u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno–matematički fakultet, Matematički odsjek, 2022.
- [12] M. STEPIĆ, S. ANTOLIŠ, A. COPIĆ, E. ŠPALJ, *Nizovi, digitalni obrazovni sadržaj*
<https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/1875383/index.html>
- [13] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Narodne novine, 7/2019.