Osječki matematički list 25 (2025), 65–76

# Problemi pri razumijevanju razlomka kao dijela cjeline

Kristina Martić[*], Ljerka Jukić Matić[†]

**Sažetak**

Ovaj rad bavi se jednim od ključnih izazova u školskom učenju matematike – razumijevanjem razlomka kao nenegativnog racionalnog broja. Ističemo probleme koji nastaju zbog pogrešnih shvaćanja pojma razlomka kao dijela cjeline, često uzrokovanih nedostatkom raznolikosti u nastavnim metodama. Rad pruža primjere zadataka i strategija kojima se mogu razjasniti pogrešna tumačenja te potaknuti dublje razumijevanje razlomaka. Naglašava se važnost vizualizacije, praktičnih primjera i fleksibilnog pristupa kako bi se učenicima olakšao prijelaz s jednostavnih na složenije koncepte razlomaka.

**Ključne riječi**: *razlomak, dio cjeline, vizualizacija*

# Problems with understanding a fraction as part of a whole

**Abstract**

This paper addresses one of the key challenges in school mathematics education – understanding fractions as non-negative rational numbers. It highlights the problems arising from misconceptions about

[*]Osnovna škola Vladimira Nazora, Slavonski Brod, email: kristina.martic@skole.hr

[†]Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ljukic@mathos.hr

fractions as parts of a whole, often caused by a lack of diversity in teaching methods. The paper provides examples of tasks and strategies that can clarify misunderstandings and foster a deeper understanding of fractions. Emphasis is placed on the importance of visualization, practical examples, and a flexible approach to help students transition from simple to more complex concepts of fractions.

**Keywords**: *fractions, part of a whole, visualisation*

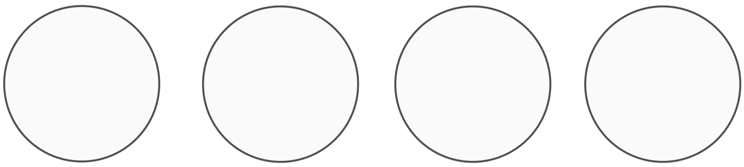
# 1 Uvod

Vizualizacija ima dugu tradiciju u matematici, a popis poznatih matematičara koji koriste ili eksplicitno zagovaraju vizualizaciju je dug. Jedan istaknuti primjer je svakako slijepi Euler, čije ograničenje nije imalo utjecaja na njegovu kreativnu snagu. Tijekom godina sljepoće, uspio je proizvesti više od 355 radova - zahvaljujući svojoj vizualnoj mašti kao i fenomenalnom pamćenju. Hadamard je isticao važnost vizualizacije pozivajući se na Einsteina i Poincaréa. Obojica su naglašavali korištenje vizualne intuicije. Na Pólyinoj listi heurističkih strategija za uspješno rješavanje problema, jedan od prijedloga je "nacrtaj sliku", što je postalo klasičan pedagoški savjet. Vizualizacija može biti moćno sredstvo za istraživanje matematičkih problema i davanje značenja matematičkim pojmovima i njihovim međusobnim odnosima. Ona smanjuje kompleksnost kad je dano mnoštvo informacija[5]. Ako učenici usvoje ovakav načina rada, mogu i sami riješiti komplicirane zadatke korištenjem vizualnih prikaza. Zbog toga je rad s vizualnim prikazima neizostavan i u procesu učenja o razlomcima.
U kurikulumu predmeta Matematika [3] razlomak kao nenegativan racionalan broj uvodi se u petom razredu osnovne škole. Proces poučavanja započinje s jednostavnim razlomcima kao što su $\frac{1}{3}$ ili $\frac{1}{4}$. Kako bi predočili i približili pojam razlomka, učitelji često koriste vizualne prikaze. No, problem se može pojaviti kada učenici trebaju promatrati više različitih likova ili objekata zajedno kao jednu cjelinu. Ovdje nastaje značajan raskorak u razumijevanju jer kroz svoje iskustvo s jednostavnim primjerima, učenici stvaraju mentalnu sliku koja sugerira da samo jedan krug, jedan pravokutnik ili jedan kvadrat predstavlja cjelinu, stoga im je velik izazov shvatiti kako različiti oblici ili likovi mogu zajedno činiti cjelinu. Razumjeti da tri različita kruga mogu zajedno činiti jednu cjelinu može biti prilično apstraktan koncept. U sljedećem odjeljku izložit ćemo primjere kojima se može razotkriti pogrešno shvaćanje ideje dio-cjelina, ali i potaknuti dublje razumijevanje. Primjere i zadatke koje ćemo predočiti rezultati su mnogobrojnih istraživanja i pokazuju značajan pozitivan učinak na učenička postignuća[1, 2, 6, 7].

## 2 Razumijevanje cjeline

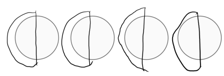
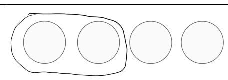
Sljedećim zadatkom ilustrirajmo način na koji se može shvatiti pojam cjeline.

**Zadatak 2.1.** *Zaokruži $\frac{1}{2}$ krugova na slici.*



U tablici 1 prikazali smo rješenja dva učenika koja smo nazvali Marko i Ana. Marku cjelinu čine sva četiri kruga zajedno, stoga je zaokružio polovinu ukupnog broja krugova u cijeloj skupini. Ana je, nasuprot tome, svaki krug doživjela kao zasebnu cjelinu te je odabrala zaokružiti polovinu svakog pojedinog kruga. Ovaj primjer jasno ilustrira koliko je ključno da učitelj, osim pojedinačnih oblika ili predmeta, kao cjelinu predstavi i skupinu koja se sastoji od više oblika ili predmeta. Kako bi učenici lakše razumjeli ovaj koncept, preporučuje se korištenje primjera iz svakodnevnog života.

Tablica 1. Primjer shvaćanja cjeline

| | |
|---|---|
| Ana |  |
| Marko |  |

Jedna mogućnost je podjela bombona iz vrećice. Ovdje učitelj raznim potpitanjima mora usmjeravati učenike kako bi sami došli do zaključka zašto sve bombone u vrećici promatramo kao jednu cjelinu. Sljedeća pitanja ilustriraju dobar način za poticanja razumijevanje:

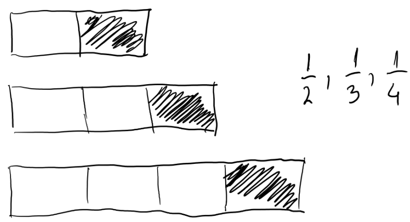
- Kako biste vi podijelili bombone iz vrećice u razredu?
- Hoćemo li svaki bombon otvoriti pa ga podijeliti na onoliko dijelova koliko ima učenika u razredu ili ćemo pogledati koliko ukupno imamo bombona pa ih pravedno podijeliti tako da svi dobijete isti broj bombona?

- Što nam ovdje predstavlja cjelinu, svaki bombon posebno ili su svi bomboni zajedno jedna cjelina?

Problem koji se može javiti jest fiksacija učenika na prvi vizualni prikaz s kojim su se susreli, kao i primjena tog prikaza cjeline u odnosu na zadani razlomak, bez dubljeg razumijevanja što cjelina predstavlja u kontekstu zadatka. Sljedeći primjer ilustrira taj problem.

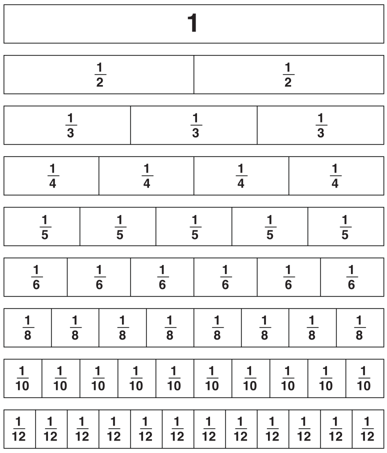
**Zadatak 2.2.** *Razlomke $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ poredaj po veličini od najmanjeg prema najvećem. Crtežom potkrijepi svoj odgovor.*

U rješenju zadatka učenik je nacrtao pravokutnik koji je podijelio na dva jednaka dijela kako bi prikazao razlomak $\frac{1}{2}$. Međutim, za prikaz drugih razlomaka nije koristio istu cjelinu, već je crtao veće pravokutnike, koje je zatim podijelio na odgovarajući broj jednakih dijelova, slika 1. Na taj način učenik je za svaki razlomak koristio unaprijed naučenu cjelinu, bez razumijevanja značenja cjeline u kontekstu uspoređivanja razlomaka.




Slika 1. Rješenje učenika

Kod zadataka uspoređivanja razlomaka, učenicima može biti od velike pomoći korištenje razlomačkih traka, slika 2. Razlomačke trake vizualno prikazuju različite dijelove veće cjeline, pri čemu svaki dio predstavlja jedinični razlomak. Njima se može lako manipulirati kako bi se pokazalo na koji način se pojedini dijelovi povezuju u cjelinu ili kako se različiti razlomci mogu usporediti. Ovaj pristup omogućuje učenicima bolje razumijevanje koncepta cjeline i odnosa među razlomcima.

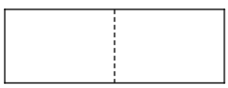



Slika 2. List s razlomačkim trakama

Na početku obrade uspoređivanja razlomaka, učitelj može pripremiti radni list za svakog učenika kako bi im pomogao u rješavanju zadataka uspoređivanja. Učenici bi trebali započeti s jednostavnim razlomcima, poput $\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{4}$, kako bi postupno shvatili kako se cjelina dijeli na jednake dijelove. Korištenjem razlomačkih traka i istraživanjem različitih načina podjele, učenici će vizualno uočiti različite veličine razlomaka te kako se one odnose prema cjelini. Ovaj pristup ne samo da im olakšava razumijevanje odnosa razlomaka i cjeline, već ih postupno uvodi u rješavanje složenijih matematičkih problema.

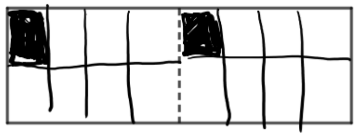
Sljedeći primjer ilustrira kako više likova ili objekata koji čine cjelinu može izazvati poteškoće u razumijevanju pojma cjeline.

**Zadatak 2.3.** *Oboji $\frac{1}{8}$ danog lika.*



Rješenje koje je dao učenik:

Prvo treba uočiti kako je dani lik unaprijed podijeljen na dva dijela te se od učenika traži da nastave podjelu koja će im omogućiti bojanje $\frac{1}{8}$ danog lika. U rješenju vidimo da je učenik obojao $\frac{1}{8}$. No, uzmemo li u obzir podjele koje je učenik napravio, vidimo da je svaka polovina lika promatrana

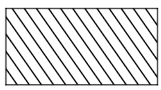


Slika 3. Rješenje učenika

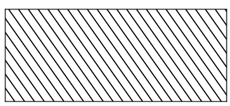
kao cjelina koja se zatim dijelila na osam dijelova. Učenik je tako obojao $\frac{1}{8}$ svake polovine lika što na kraju daje $\frac{1}{8}$ cijelog lika. Bez obzira na točno rješenje, jasno je da učenik nije shvatio što predstavlja cjelinu u ovom zadatku.

U prethodnim zadatcima promatrane su pogreške koje učenici mogu učiniti prilikom određivanja dijelova cjeline. No, učenici često imaju poteškoće kod određivanja cjeline kada im je dan dio te cjeline. Podjele su vrlo često prikazane jediničnim razlomcima stoga učenici bilo koju podjelu automatski povezuju s razlomcima tog oblika. Susret s razlomkom koji nije tog oblika može stvoriti problem prilikom određivanja cjeline što pokazujemo sljedećim zadatkom.

**Zadatak 2.4.** *Pažljivo pročitaj i riješi sljedeće zadatke.*
*a) Na slici je dana $\frac{1}{5}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.*



*b) Na slici je $\frac{6}{7}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.*



Primjer rješenja koje učenik može dati:
a) Na slici 4 je dana $\frac{1}{5}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.

Slika 4.

b) Na slici 5 je $\frac{6}{7}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.

Slika 5.

Uočimo kako je učenik podzadatak a) točno riješio jer grafičke prikaze povezuje s jediničnim razlomcima. Iz nazivnika iščitava koliko dijelova čini tu cjelinu. Kako je nazivnik 5, još su mu nedostajala četiri dijela kako bi dobio cijelu čokoladicu. Analogan način razmišljanja primijenio je u podzadatku b) što ga je dovelo do netočnog rješenja. Dani dio promatrao je kao $\frac{1}{7}$ čokoladice te je, promatrajući vrijednost nazivnika kao i u prethodnom zadatku, docrtao još šest dijelova.

Ovaj zadatak je također odličan primjer koji pokazuje kako učitelj mora učenicima ukazati i na važnost ekvivalentne podjele, odnosno da je važno crtati dijelove jednakih veličina. U podzadatku a) učenik je točno odredio koliko dijelova nedostaje da bi imali cijelu čokoladicu, ali uspoređujući veličinu nacrtanih dijelova, ne možemo reći da smo na kraju dobili cijelu čokoladicu. Naravno, s obzirom na uzrast učenika ne treba tražiti pretjeranu preciznost u mjerenju i crtanju, ali treba zahtijevati da razlike u veličinama ne budu prevelike.

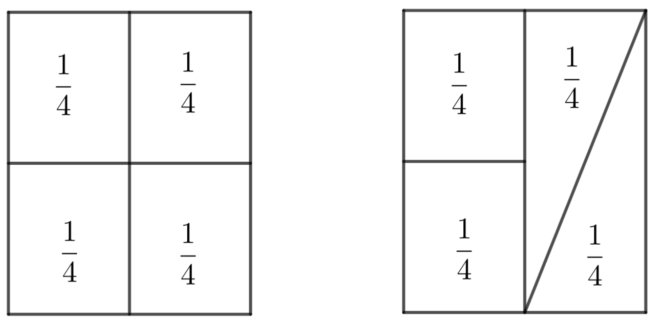
Sljedećim zadatkom pokažimo kako veličina cjeline utječe na veličinu dijelova. To je također važno pojasniti učenicima kako bi razumjeli da primjerice $\frac{1}{2}$ nečega ne predstavlja uvijek istu količinu, odnosno da ne povezuju vrijednost razlomka s fiksnom veličinom dijelova.

**Zadatak 2.5.** *Marku je ponuđena trećina pizze ili polovina pizze. Odabire polovinu jer je gladan i voli pizzu. Njegova prijateljica Ivana dobiva trećinu pizze, ali na kraju završi s većim komadom nego što ima Marko. Kako je to moguće?*

Gornji zadatak ili sličan primjer svaki bi učitelj trebao izvesti u razredu kako bi učenici uvidjeli kako veličina cjeline utječe na veličinu dijelova. Lako je uočiti da polovina pizze ne znači uvijek istu količinu pizze jer ne znamo kolika je veličina same pizze. Također, ovdje se mogu koristiti i razne aktivnosti poput izrezivanja papira kojim se dana situacija može vizualizirati.

# 3 Različiti načini podjele cjeline na jednake dijelove

Kako bi učenici zaista razumjeli razlomke, važno je da shvate kako se cjelina može podijeliti na jednake dijelove. Međutim, često nauče samo jedan ili dva načina podjele i pomisle da su oni jedini ispravni. Zato je važno da ih učitelji potaknu na istraživanje i isprobavanje različitih načina dijeljenja cjeline. Na taj način učenici razvijaju fleksibilnije razumijevanje te uče da postoji više pristupa za dobivanje dijelova jednakih veličina. Ovakvo razumijevanje ne samo da im pomaže da se lakše nose s matematičkim izazovima, već ih osnažuje da svoje znanje primjenjuju u različitim situacijama, uz više samopouzdanja i kreativnosti.



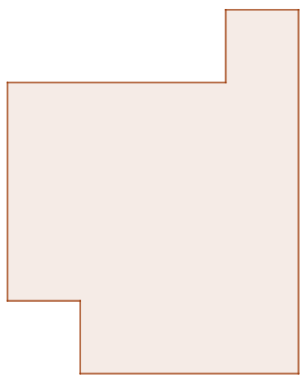

Slika 6. Podjela pravokutnika na dijelove jednake veličine

Pogledajmo sliku 6. Pravokutnik je podijeljen na dijelove jednake veličine koristeći simetrale stranica ili dijagonale pravokutnika. Ako ovakvu sliku stavimo pred učenike, bez navođenja veličine svakog dijela, najčešće ćemo dobiti odgovor da je lijevi pravokutnik podijeljen na četiri jednaka dijela, a desni nije. Uočimo kako je lijevi pravokutnik podijeljen na četiri manja pravokutnika pa je učenicima lako uočiti da su jednake veličine jer uspoređuju površine istih likova. Desni pravokutnik je podijeljen također na četiri dijela jednake veličine, ali ne i jednakog oblika stoga je učenicima teže uspoređivati veličine dijelova. Može im se činiti kako "trokuti izgledaju veće nego pravokutnici" pa tu neće uočiti ekvivalentnu podjelu.

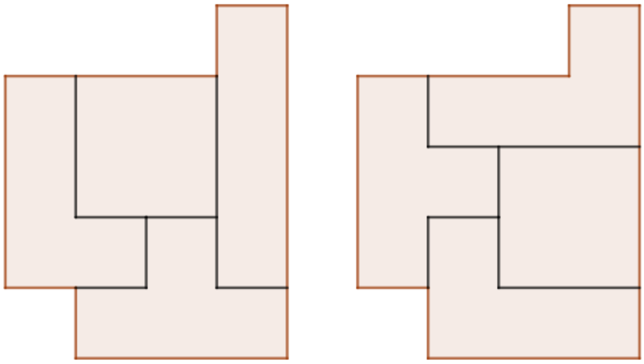
Ovakvi primjeri mogu biti izvrsna prilika kojom učenici mogu produbiti razumijevanje i suočiti se s neadekvatno izgrađenom mentalnom slikom "jednakih dijelova". Jedan korak može biti i izrezivanje tih dijelova škarama te uspoređivanje veličina dijelova tako da ih učenici međusobno preklapaju. Ovakve primjere učitelj može iskoristiti i za ponavljanje određivanja površine različitih likova. Učenici mogu odrediti duljine stranica ili visina, te izračunavanjem površine provjeriti ekvivalentnost dijelova.

Nadalje, još jedan način kako učenicima pokazati da dijelovi jednake veličine tj. površine, ne moraju biti istog oblika je korištenje zadataka s primjerima iz svakodnevnog života.

**Zadatak 3.1.** *Udruga Ljubitelji zelenog na raspolaganje je dobila 8 hektara gradskog zemljišta. Zemljište je prikazano na slici ispod. Odlučili su zemljište podijeliti na četiri dijela jednake površine, kako bi mogli saditi različite kulture povrća: kupusnjače, tikvenjače, grahorice i salate. Nacrtajte moguću podjelu 8 hektara zemljišta na četiri dijela jednake površine.*

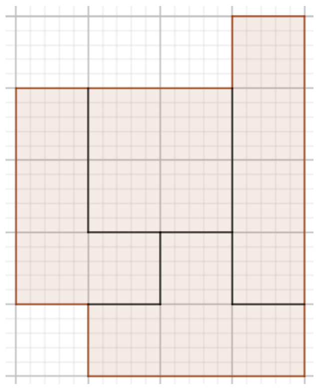


U ovakvom zadatku svaki učenik može imati drugačiju ideju za podjelu. Stoga učitelj može pokazati nekoliko primjera točno riješenog zadatka. Ideja iza zadatka jest da učenici shvate da je svaki komad zemljišta $\frac{1}{4}$ od 8 hektara, odnosno 2 hektara. Iako dijelovi nisu istog oblika, oni imaju istu površinu.



Slika 7. Primjer rješenja

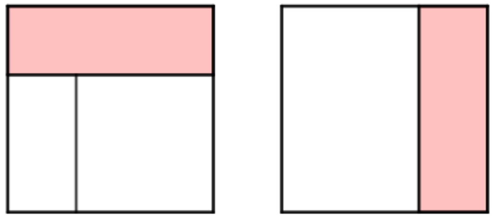
Pri radu s ovim zadatkom može se iskoristiti i neka aplikacija dinamične geometrije poput GeoGebre, kako bi učenici lako izmjerili jesu li nastali dijelovi jednake površine.



Slika 8. Podjela zemljišta pomoću GeoGebre

Nakon što učenici shvate ideju ekvivalentne podjele u kontekstu razlomaka, sljedeći korak jest provjeriti povezuju li učenici dani razlomak s dijelom cjeline kojeg on predstavlja. Analizirajmo situaciju u sljedećem zadatku.

**Zadatak 3.2.** *Provjerite je li u svakom kvadratu obojena njegova* $\frac{1}{3}$. *Objasnite svoj odgovor.*



Kada se učenik suoči s ovakvim zadatkom i zaključi da u prvom kvadratu nije obojena $\frac{1}{3}$, često to objašnjava time što kvadrat nije podijeljen na tri jednaka dijela. Takvo objašnjenje pokazuje da učenik prepoznaje ekvivalentnu podjelu samo u onom slučaju kad dijelovi imaju isti oblik i veličinu. S druge strane, ako učenik tvrdi da drugi kvadrat sadrži dva označena dijela umjesto tri, i da stoga obojeni dio ne može činiti trećinu, to može ukazivati na tendenciju fiksacije na jasno označene podjele. Takvi tipovi odgovora često su rezultat učiteljskih praksi koje se temelje na zadacima gdje su likovi uvijek podijeljeni na dijelove iste veličine i oblika, s jasnim i unaprijed naznačenim podjelama. No, kako bismo poticali razumijevanje razlomaka, važno je uključiti različite vrste zadataka. Osim tipičnih zadataka, učitelji bi trebali ponuditi i izazovnije zadatke poput onih koji smo prezentirali, kako bi provjerili učeničko razumijevanje razlomaka i sposobnost primjene u kontekstu ekvivalentnih podjela.

# 4 Zaključak

Niti jedno područje školske matematike nije tako matematički bogato, kognitivno zahtjevno i izazovno za poučavanje kao razlomci [2, 6]. Razumijevanje razlomaka razvija se tijekom vremena i putem iskustva u različitim kontekstima [7]. Razumjeti razlomke znači razumijevanje svih mogućih konceptualizacija koje razlomci mogu predstavljati. Jedno od često korištenih značenja razlomka je odnos dijela prema cjelini koje smo razmatrali u ovom članku, no, značenje pojma razlomka povezano je i s idejom mjerenja, idejom dijeljenja, idejom omjera, a razlomak se može promatrati i kao operator [4]. Zadržavanje samo na jednoj od ovih konceptualizacija izaziva fiksaciju na određeni kontekst. Također u svakoj od navedenih konceptualizacija potrebno je koristiti različite primjere jer odstupanje od tipičnih i jednostavnih primjera pomoći će učiteljima da bolje procijene razumijevanje svojih učenika i omoguće im razvoj kompetencija u tom području.

## Literatura

[1] J. Bobis, *Fractions: Best evidence and its implications for practice*, Fractions: Teaching for understanding, (urednici: J. Way & J. Bobis), AAMT, Adelaide, 2011, 11-20.

[2] S. J. Lamon, *Teaching fractions and ratios for understanding; Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*, Routledge, New York, 2020.

[3] *Kurikulum predmeta Matematika*, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Zagreb, 2019.

[4] K. Martić, *Razlomci*, diplomski rad, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2023.

[5] B. Rösken, B. & K. Rolka, *A picture is worth a 1000 words - the role of visualization in mathematics learning*, Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (urednici: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíkova), PME, Prag, 2006, 441-448.

[6] J. P. Smith, *The development of students' knowledge of fractions and ratios*, Making sense of fractions, rations and proportions, (urednici: B. Litwiller & G. Bright), National Council of Teachers of Mathematics, Reston Va., 2002.

[7] J. Van de Walle, K. Karp, K. & J. Bay-Williams, *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally, 9th Edition*, Pearson Education, Essex, 2015.