Osječki matematički list 25 (2025), 89–102

# Slaba rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Krešimir Burazin*, Maja Damjanović†

**Sažetak**

U ovom radu razmatramo pojam slabog rješenja za eliptičku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja modelira razne fenomene u prirodi, poput stacionarnog provođenja topline ili struje, te ravnoteže napete membrane. Prvo diskutiramo potrebu za uvođenjem poopćenog pojma rješenja, a zatim uvodimo pojam slabe derivacije i Soboljevljevih prostora koji omogućavaju rigorozno uvođenje pojma slabog rješenja. Korištenjem Lax-Milgramovog teorema pokazujemo postojanje i jedinstvenost slabog rješenja te ekvivalentnost varijacijske formulacije s minimizacijom funkcionala energije.

**Ključne riječi**: *slaba derivacija, slabo rješenje, rubna zadaća, Soboljevi prostori, varijacijska jednadžba, funkcional energije*

*Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: kburazin@mathos.hr

†Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mandrije@mathos.hr

Krešimir Burazin, Maja Damjanović

# Weak solutions of partial differential equations

**Abstract**

In this paper, we consider the concept of a weak solution for an elliptic partial differential equation that models various phenomena in nature, such as steady-state heat conduction, and the equilibrium of elastic membranes. First, we discuss the need for introducing a generalized concept of a solution, and then introduce the concept of weak derivatives and Sobolev spaces, which allow for the rigorous definition of a weak solution. Using the Lax-Milgram theorem, we demonstrate the existence and uniqueness of the weak solution, as well as the equivalence of the variational formulation with the minimization of the energy functional.

**Keywords**: *weak derivative, weak solution, boundary value problem, Sobolev spaces, variational equation, energy functional*

## 1 Uvod

Mnogi fizikalni problemi kao i problemi u drugim područjima znanosti modeliraju se (početno-)rubnim ili početnim zadaćama koje uključuju parcijalne diferencijalne jednadžbe. Ove jednadžbe opisuju promjene i ponašanje fizikalnih veličina u područjima kao što su mehanika kontinuuma, termodinamika, elektromagnetizam i matematička fizika općenito. U ovom radu koncentrirat ćemo se na rubne zadaće koje modeliraju procese koje se ne mijenjaju u vremenu (niže je konkretan primjer). Takve probleme možemo općenito zapisati kao:

$$\begin{cases} \text{pronaći } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tako da vrijedi} \\ Du = f, \text{ u } \Omega \\ \text{uz rubne uvjete na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ domena problema, $D$ diferencijalni operator koji djeluje na nepoznatu funkciju $u$, a $f$ nekakav vanjski utjecaj.

Željeli bismo da rješenje takve rubne zadaće bude dovoljno glatko, tj. diferencijabilno onoliko puta koliko zahtijeva red diferencijalnog operatora $D$. Ako je red diferencijalnog operatora jednak $n$, onda bismo *klasičnim ili jakim rješenjem* zadaće (1) nazvali funkciju $u \in C^n(\Omega)$ koja zadovoljava jednadžbu $Du(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ za svaki $\mathbf{x} \in \Omega$ i zadovoljava pripadne rubne uvjete. Međutim, u mnogim slučajevima klasična rješenja ne postoje ili ih je vrlo teško pronaći. To može, primjerice, biti posljedica nedovoljne glatkoće koeficijenata operatora $D$ i/ili desne strane $f$. Također, rješenja jednadžbe mogu biti "nespojiva" s danim rubnim uvjetima. Stoga je nužno proširiti pojam rješenja, uvodeći takozvana *slaba rješenja*. U ovom radu ćemo ilustrirati kako se to može napraviti na primjeru eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe koja opisuje razne fenomene u fizici.

U drugom poglavlju ćemo uvesti tu jednadžbu te na razini intuicije ilustrirati kako bi se mogao uvesti pojam slabog rješenja i to kroz varijacijski princip i minimizaciju funkcionala energije. U trećem poglavlju ćemo uvesti formalni matematički aparat slabih derivacija i Soboljevljevih prostora koji omogućuje da u četvrtom poglavlju matematički precizno uvedemo pojam slabog rješenja te korištenjem Lax-Milgramovog teorema dokažemo njegovo postojanje i jedinstvenost. U petom poglavlju ćemo dokazati ekvivalentnost varijacijske formulacije polazne zadaće kojom je uveden pojam slabog rješenja s minimizacijom funkcionala energije, te završiti rad s kratkim zaključkom.

# 2 Glatka (klasična) rješenja nisu dovoljna

Promotrimo konkretan primjer rubne zadaće

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

koja modelira širok spektar fizikalnih pojava, uključujući ravnotežne distribucije temperature, električni potencijal u elektrostatici te ponašanje elastičnih membrana pod opterećenjem. U matematičkom smislu, ona predstavlja eliptičku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje stanje sustava u stacionarnom režimu [3]. Primjerice, u kontekstu elastične membrane [2, 4], $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ predstavlja položaj tanke napete membrane bez djelovanja vanjskih sila, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gustoću vanjske poprečne površinske sile, a matrična funkcija $\mathbf{A} : \Omega \to M_2(\mathbb{R})$ (općenito anizotropna i heterogena) svojstva materijala od kojeg je membrana izrađena. Kada na membranu djeluje sila ona mijenja svoj oblik, odnosno deformira se i tada točka $\mathbf{x} \in \Omega$ deformacijom prelazi u točku $P(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, pri čemu s $u$ označavamo progib membrane i on je nepoznanica u gornjoj rubnoj zadaći. Oznake div i $\nabla$ stoje za operatore divergencije i gradijenta funkcije, a rubnim uvjetom u (2) smo rekli da je membrana učvršćena na rubu domene.

Kao što je već rečeno u uvodnom dijelu, ako su koeficijenti $\mathbf{A}$ nedovoljno glatki (npr. ako imaju prekide - situacija kada je membrana sastavljena od više različitih materijala), onda gornja rubna zadaća ne mora imati rješenje. Štoviše, upitan je smisao same jednadžbe ako $\mathbf{A}$ nije diferencijabilna (uočimo da operator div djeluje i na $\mathbf{A}$). Stoga bismo željeli poopćiti pojam rješenja uvođenjem pojma slabog rješenja, koji bi imao smisla i u tim općenitijim situacijama. Naravno, željeli bismo da se u slučaju kada su sve funkcije dovoljno glatke pojmovi slabog i klasičnog rješenja podudaraju.

U ostatku rada pretpostavljamo da je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen skup s Lipschitzovim rubom, iako neki rezultati koje ćemo prikazati vrijede i uz slabije pretpostavke. Ako pretpostavimo da su $\mathbf{A}$ i $f$ dovoljno glatke, te da je $u$ klasično rješenje te zadaće, množenjem s proizvoljnom *test funkcijom* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, gdje $C_c^\infty(\Omega)$ označava skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem, i integriranjem po $\Omega$ dobivamo

$$\int_\Omega -\mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla u)\varphi\, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi\, d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Koristeći formulu parcijalne integracije, odnosno Green-Gaussov teorem o divergenciji [3], koji kaže da za glatko vektorsko polje $\mathsf{v}$ vrijedi:

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathsf{v}\,\varphi\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathsf{v}\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \varphi\mathsf{v}\cdot\mathsf{n}\, dS,$$

uz odabir $\mathsf{v} = \mathbf{A}\nabla u$, dobivamo

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla u)\varphi\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \varphi\mathbf{A}\nabla u\cdot\mathsf{n}\, dS,$$

gdje je $\mathsf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Budući da $\varphi$ ima kompaktan nosač, tj. $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$, slijedi da zadnji integral u gornjem izrazu iščezava, što u kombinaciji s (3) daje *varijacijsku jednadžbu*

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi\, d\mathbf{x}, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Uočimo da ovaj izraz ne zahtijeva postojanje klasičnih parcijalnih derivacija drugog reda za $u$, već samo da $u$ i $\nabla u$ budu dovoljno regularni da integrali imaju smisla. Isto vrijedi za $\mathbf{A}$ i $f$. Stoga bismo slabo rješenje mogli pokušati definirati kao funkciju $u$ koja zadovoljava gornju jednakost za svaku test funkciju. Ipak, imajmo na umu da bismo željeli da je svako slabo rješenje, a koje je dovoljno glatko, ujedno i klasično. Stoga bismo trebali precizirati kakva je točno funkcija $u$, a pokazat će se potrebnim poopćiti i pojam gradijenta.

Prije nego se time pozabavimo u idućem poglavlju, promotrimo i jedan drugačiji pristup, koji proizlazi iz korištenja fizikalnog principa minimizacije energije. Prema njemu će sustav poprimiti stacionarnu konfiguraciju koja minimizira ukupnu potencijalnu energiju. Ukupna potencijalna energija sustava dana je izrazom

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} - \int_\Omega f u \, d\mathbf{x}, \tag{4}$$

gdje prvi član predstavlja elastičnu energiju deformacije, a drugi rad vanjske sile $f$. Stoga bi ravnotežni progib trebala biti funkcija $u$ koja minimizira funkcional $E$. Uočimo da ovaj funkcional ima smisla i ako $\mathbf{A}$ ima prekide, što nije slučaj s jednadžbom u (2). Pitanje je po kojem se skupu funkcija $E$ treba minimizirati. Ako bismo i dalje željeli da je $u$ glatka funkcija ($C^2(\Omega)$ ili barem $C^1(\Omega)$) onda bismo trebali raditi minimizaciju po tim prostorima funkcija (naravno, uz zadovoljen rubni uvjet). Međutim, može se pokazati da funkcional $E$, iako omeđen odozdo, na takvim skupovima neće poprimati svoj infimum, tj. minimum ne postoji.

Općenito u optimizacijskim problemima (minimizacija/maksimizacija neke funkcije) nepostojanje rješenja (minimuma/maksimuma) je uobičajena pojava kojoj se može doskočiti *relaksacijom polazne optimizacijske zadaće*. Ugrubo, ideja je proširiti funkcional $E$ na veću domenu na kojoj $E$ ima minimum koji je jednak infimumu na originalnoj domeni, i pronaći adekvatnu topologiju na proširenoj domeni uz koju je funkcional $E$ neprekinut, a originalni minimizirajući nizovi glatkih funkcija konvergiraju. To bi povlačilo da je limes minimizirajućeg niza klasičnih rješenja ujedno i točka minimuma proširenog funkcionala $E$. U terminima funkcionalne analize potrebno je pronaći adekvatno upotpunjenje originalnog prostora klasičnih rješenja u odgovarajućoj topologiji.

Ovakva situacija vodi nas na razmišljanje o novim prostorima funkcija u kojima bismo mogli tražiti rješenja pripadajućih problema. Ako pogledamo prvi sumand u (4) i uzmemo najjednostavniju situaciju kada je $\mathbf{A}$ jedinična matrica (slučaj izotropnog materijala), prirodno se nameće zahtjev da je $\nabla u$ kvadratno integrabilna funkcija. Osim toga, pokazalo se da se dodatno mora proširiti i pojam parcijalnih derivacija jer klasičan pojam derivacije nije dovoljan.

Gore navedeni problemi bili su vruće teme koje su zaokupirale dobar dio matematičke zajednice u prvoj polovici 20. stoljeća. Konkretno, sredinom 1930-ih godina ruski matematičar Sergej Soboljev[1] uveo je nove funkcijske prostore koji su bili ključni u razvoju teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

[1]Sergej Soboljev (1908. - 1989.), ruski matematičar, bavio se proučavanjem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, dinamikom elastičnih tijela, jedan od utemeljitelja teorije distribucija, uveo je pojam slabe derivacije te razvio nove funkcijske prostore - Soboljevljeve prostore

Do ideje novih prostora došao je proučavajući hiperboličke jednadžbe i razvijajući metodu za rješavanje Cauchyjeve zadaće za hiperboličke jednadžbe. Njegova temeljna motivacija bila je pronaći prostor funkcija dovoljno velik da sadrži klasična rješenja promatrane zadaće, ali istovremeno dovoljno dobro strukturiran da omogućava primjenu alata funkcionalne analize. To je postigao uvođenjem pojma slabe derivacije (više o tome u idućem poglavlju) i prostora koje danas nazivamo Soboljevljevi prostori. Iako su matematičari ranije koristili slične metode u implicitnom obliku, Soboljev je prvi koji ih je rigorozno formalizirao.

Gotovo istodobno, francuski matematičar Laurent Schwartz[2] proširio je ovaj koncept razvijajući teoriju distribucija. Iako u početku nije bio svjestan Soboljevljevog rada, Schwartz je ubrzo prepoznao njegovu važnost. Teorija distribucija omogućila je preciznije definiranje pojma slabe derivacije, što je bilo ključno za daljnji razvoj analize parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Godine 1950. Schwartz je objavio knjigu "Théorie des distributions" u kojoj je detaljno izložio svoju teoriju, dok je iste godine Soboljev u Lenjingradu objavio knjigu "Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics", u kojoj su rigorozno uvedeni Soboljevljevi prostori. Ova dva matematičara, iako radeći neovisno, postavili su temelje moderne analize parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i funkcionalne analize.

Njihov rad omogućio je primjenu funkcionalno-analitičkih metoda na parcijalne diferencijalne jednadžbe, što je dovelo do razvoja moćnih alata poput metode Galerkina, varijacijskih formulacija i teorije eliptičkih operatora. Više o povijesti razvoja ovih tema može se pročitati u [5, 6].

# 3 Slaba derivacija i Soboljevljevi prostori

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam slabe derivacije. Pretpostavljamo da je čitatelj upoznat s osnovnim svojstvima Lebesgueovih $L^p$ prostora (za osnovne informacije vidi npr. [1, 3]). Označimo s $L^1_{loc}(\Omega)$ skup svih (klasa ekvivalencije) lokalno integrabilnih funkcija, tj.

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f|_K \in L^1(K), \forall K \subseteq \Omega \text{ kompaktan}\}.$$

Prisjetimo se da za dvije funkcije $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi Gauss-Greenova formula ($n_i$ je $i$-ta komponenta jedinične vanjske normale na $\partial\Omega$):

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \partial_i u \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \partial_i (u\varphi) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \varphi n_i \, dS.$$

[2]Laurent Schwartz (1915. – 2002.), francuski matematičar, razvio teoriju distribucija, bavio se funkcionalnom analizom i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama

Kao posljedica toga što $\varphi$ poprima vrijednost nula na $\partial\Omega$ zadnji integral iščezava, odnosno vrijedi

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \partial_i u \varphi \, d\mathbf{x}. \tag{5}$$

Recimo da želimo proširiti pojam derivacije uvođenjem pojma *slabe derivacije*. Riječ *proširiti* ukazuje na dvije stvari: želimo da pojam slabe derivacije bude definiran za veću klasu funkcija nego *klasična derivacija*, te želimo da se za funkcije koje su dovoljno dobre (imaju klasičnu derivaciju ili su eventualno klase $C^1$) pojmovi klasične i slabe derivacije podudaraju. Imajući to u vidu, upravo gornja formula parcijalne integracije (5) nam može pomoći za definiciju pojma slabe derivacije.

**Definicija 3.1.** *Neka su $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ te $i \in \{1, \ldots, d\}$. Kažemo da je $v$ slaba parcijalna derivacija funkcije $u$ po $i$-toj varijabli, ako vrijedi*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega v \varphi \, d\mathbf{x}, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

**Napomena 3.1.** *Ako postoji slaba derivacija funkcije $u$, onda je ona jedinstvena u smislu da ako postoje dvije funkcije $v_1, v_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ koje zadovoljavaju uvjet*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega v_1 \varphi \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega v_2 \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

*tada mora vrijediti $v_1 = v_2$ skoro svuda u $\Omega$.*

*Zaista, iz gornjeg izraza slijedi da za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi:*

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) \varphi \, d\mathbf{x} = 0,$$

*pa iz standardnog rezultata funkcionalne analize slijedi da mora biti $v_1 - v_2 = 0$ skoro svuda u $\Omega$, tj. $v_1 = v_2$ skoro svuda u $\Omega$.*

**Napomena 3.2.** *Iz formule parcijalne integracije (5) i same definicije slabe derivacije slijedi da se za funkciju $u \in C^1(\overline{\Omega})$ i proizvoljan $i \in \{1, \ldots, d\}$ pojmovi klasične parcijalne derivacije $\partial_i u$ i slabe parcijalne derivacije funkcije $u$ po $i$-toj varijabli podudaraju. Stoga ćemo ubuduće i za slabu derivaciju koristiti oznaku $\partial_i u$.*

Definiranjem slabe derivacije otvara se put ka preciznoj definiciji Soboljevljevih prostora te teorijskim alatima koji omogućuju rigorozno proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u ovim prostorima.

**Definicija 3.2.** *Soboljevljev prostor $H^1(\Omega)$ definira se kao skup svih funkcija $u \in L^2(\Omega)$ čije su slabe parcijalne derivacije $\partial_i u$ također u $L^2(\Omega)$ za sve $i = 1, \ldots, d$. Preciznije,*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, d\}.$$

Može se pokazati da je da je $H^1(\Omega)$ Banachov prostor uz normu danu s

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definicija 3.3.** *Prostor $H^1_0(\Omega)$ definira se kao zatvarač skupa $C^\infty_c(\Omega)$ beskonačno glatkih funkcija s kompaktnim nosačem u normi $H^1(\Omega)$.*

Prema definiciji, funkcije u $H^1_0(\Omega)$ su one funkcije iz $H^1(\Omega)$ koje se mogu aproksimirati glatkim funkcijama s kompaktnim nosačem unutar $\Omega$. U tom smislu možemo reći da su to funkcije iz $H^1(\Omega)$ koje iščezavaju na $\partial\Omega$ (barem u nekom *poopćenom smislu*). Kao zatvarač skupa u Banachovom prostoru, $H^1_0(\Omega)$ je i sam Banachov prostor, te vrijedi Poincaréova nejednakost:

$$(\exists C > 0) \left(\forall u \in H^1_0(\Omega)\right) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \tag{6}$$

Za dokaze svojstava Soboljevljevih prostora pogledati npr. [1].

# 4 Slabo rješenje te njegovo postojanje i jedinstvenost

Razmotrimo kako se uvedeni pojam slabe derivacije i Soboljevljevih prostora mogu iskoristiti za poopćenje pojma rješenja rubne zadaće

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

U nastavku pretpostavljamo da je $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{A} \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ te da vrijedi *uvjet eliptičnosti*:

$$(\exists \alpha > 0) \left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d\right) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad \text{s. s. } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7}$$

Prisjetimo se da smo u drugom poglavlju pokazali, uz pretpostavku da su $\mathbf{A}$ i $f$ dovoljno glatke, da svako klasično rješenje $u$ zadovoljava varijacijsku jednadžbu

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Ovaj izraz ne zahtijeva postojanje klasičnih parcijalnih derivacija drugog reda za $u$, već samo da je $u \in H_0^1(\Omega)$, te da vrijede gornje pretpostavke na $\mathbf{A}$ i $f$ (nije potrebna ni njihova glatkoća u klasičnom smislu), što motivira sljedeću definiciju slabog rješenja.

**Definicija 4.1.** *Kažemo da je funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ slabo rješenje rubne zadaće*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

*ako vrijedi varijacijska jednadžba*

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{9}$$

**Napomena 4.1.** *Zbog gustoće $C_c^\infty(\Omega)$ u $H_0^1(\Omega)$ u gornjoj definiciji slabog rješenja je dovoljno tražiti da (9) vrijedi za svaki $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Već smo pokazali da je svako klasično rješenje ujedno i slabo, a idući teorem govori da vrijedi i obrnuto uz pretpostavku dovoljne glatkoće slabog rješenja.

**Teorem 4.1.** *Uz gornje pretpostavke na $\mathbf{A}$ i $f$, neka je dodatno $\mathbf{A}$ klase $C^1$. Ako je $u \in H_0^1(\Omega)$ slabo rješenje problema (9) i ako dodatno vrijedi $u \in C^2(\Omega)$, tada $u$ zadovoljava rubnu zadaću (8) u klasičnom smislu.*

*Dokaz.* Budući da $u$ zadovoljava varijacijsku jednadžbu

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

te je klase $C^2(\Omega)$, možemo provesti parcijalnu integraciju u obrnutom smjeru, što daje:

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u)\varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}.$$

Budući da ovaj izraz vrijedi za svaki $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, slijedi kao i prije da vrijedi identitet funkcija:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u) = f \text{ u } \Omega.$$

Kako je rubni uvjet zadovoljen zbog pretpostavke $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, slijedi da je $u$ klasično rješenje. $\square$

Za dokaz postojanja i jedinstvenosti slabog rješenja koristit ćemo klasičan rezultat iz funkcionalne analize poznat kao Lax-Milgramov teorem. Ovaj teorem osigurava postojanje i jedinstvenost rješenja za određene tipove operatornih jednadžbi u Hilbertovim prostorima.

**Teorem 4.2 (Lax-Milgramov teorem).** *Neka je $V$ Hilbertov prostor s pripadnom normom $\|\cdot\|_V$. Pretpostavimo da je bilinearan funkcional $B : V \times V \to \mathbb{R}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

- *$B$ je ograničen, tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $u, v \in V$ vrijedi*

$$|B(u,v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V.$$

- *$B$ je eliptičan, tj. postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da za sve $u \in V$ vrijedi*

$$B(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2.$$

*Nadalje, neka je $L : V \to \mathbb{R}$ linearan funkcional koji je ograničen, tj. postoji konstanta $C_L > 0$ takva da za sve $v \in V$ vrijedi*

$$|L(v)| \leq C_L\|v\|_V.$$

*Tada postoji jedinstveni $u \in V$ takav da vrijedi*

$$(\forall v \in V) \quad B(u,v) = L(v).$$

Razmotrimo varijacijsku formulaciju problema membrane (2):

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Ako definiramo bilinearan operator $B$ i linearan funkcional $L$ kako slijedi:

$$B(u,v) = \int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{10}$$

$$L(v) = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{11}$$

uz odabir $V = H_0^1(\Omega)$, očigledno je da je za dokaz postojanja i jedinstvenosti slabog rješenja dovoljno pokazati da $B$ i $L$ zadovoljavaju pretpostavke Lax-Milgramovog teorema.

**Teorem 4.3 (Egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja).** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren ograničen skup s Lipschitzovim rubom, te neka je $f \in L^2(\Omega)$ i $\mathbf{A} \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ zadovoljava uvjet eliptičnosti (7). Tada postoji jedinstveni $u \in H_0^1(\Omega)$ koje zadovoljava varijacijsku jednadžbu*

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

*Dokaz.* Pokazat ćemo da $B$ i $L$ dani s (10), odnosno (11) zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramovog teorema: njihova (bi)linearnost je očigledna, a budući da je $\mathbf{A}$ ograničena matrična funkcija, postoji konstanta $C > 0$ takva da skoro svuda na $\Omega$ vrijedi

$$|\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v| \leq C|\nabla u||\nabla v|.$$

Integriranjem po $\Omega$ i korištenjem monotonosti integrala te Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\leq C \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|\, d\mathbf{x} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

što pokazuje da je $B$ ograničen bilinearan funkcional.

Iz uvjeta eliptičnosti na $\mathbf{A}$ slijedi da za sve $u \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u\, d\mathbf{x} \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} \\ &= \alpha\|\nabla v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \geq \frac{\alpha}{1+C^2}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

gdje je $C$ konstanta iz Poincaréove nejednakosti (6), pa slijedi da je $B$ eliptičan.

Konačno, iz Cauchy-Schwarzove nejednakost je

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega fv\, d\mathbf{x}\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

pa zaključujemo da je $L$ ograničen funkcional na $H_0^1(\Omega)$.

Budući da su zadovoljeni svi uvjeti Lax-Milgramovog teorema, slijedi da postoji jedinstveno rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$ varijacijske jednadžbe. □

# 5 Ekvivalentnost varijacijske formulacije i minimizacije funkcionala energije

Povežimo sada pojam slabog rješenja s minimizacijom energetskog funkcionala.

**Teorem 5.1.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren ograničen skup s Lipschitzovim rubom i $f \in L^2(\Omega)$, te neka $\mathbf{A} \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ uz uvjet eliptičnosti (7) zadovoljava i* *uvjet simetričnosti:* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ *skoro svuda. Ako* $u \in H_0^1(\Omega)$ *minimizira energetski funkcional*

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{A}\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_\Omega f v \, d\mathbf{x},$$

*na* $H_0^1(\Omega)$*, tada zadovoljava i varijacijsku jednadžbu*

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

*Obratno, ako* $u \in H_0^1(\Omega)$ *zadovoljava ovu varijacijsku jednadžbu, tada je* $u$ *minimizator funkcionala* $E$ *na* $H_0^1(\Omega)$.

*Dokaz.* Pretpostavimo da $u \in H_0^1(\Omega)$ minimizira funkcional $E$. To znači da za svaku funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ i svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$E(u + \varepsilon v) \geq E(u).$$

Ako definiramo pomoćnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izrazom

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) := E(u + \varepsilon v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \big(\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u + 2\varepsilon \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon^2 \mathbf{A}\nabla v \cdot \nabla v\big) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_\Omega \big(f u + \varepsilon f v\big) \, d\mathbf{x} \\ &= E(u) + \varepsilon \left( \int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_\Omega f v \, d\mathbf{x} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega \mathbf{A}\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onda je očigledno da funkcija $g$ ima minimum u $\varepsilon = 0$, što znači da mora vrijediti

$$g'(0) = 0.$$

Kako je

$$g'(\varepsilon) = \int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_\Omega f v \, d\mathbf{x} + \varepsilon \int_\Omega \mathbf{A}\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x},$$

uvrštavanjem $\varepsilon = 0$ dobivamo uvjet za stacionarnu točku funkcije $g$:

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

što je upravo varijacijska formulacija, te je time pokazana jedna implikacija.

Pretpostavimo sada da funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ zadovoljava varijacijsku jednadžbu

$$\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ako definiramo funkciju $g$ kao gore, onda iz varijacijske jednadžbe slijedi da je $g'(0) = 0$, što znači da je 0 stacionarna točka funkcije $g$.

Iz izraza za drugu derivaciju funkcije g, uvjeta eliptičnosti na $\mathbf{A}$ te Poincaréove nejednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} g''(\varepsilon) &= \int_\Omega \mathbf{A}\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \alpha \|\nabla v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \geq \frac{\alpha}{1 + C^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} > 0 \end{aligned}$$

pri čemu je $C$ konstanta iz Poincaréove nejednakosti (6), a zadnja nejednakost vrijedi za $v \neq 0$.

To znači da je $g$ strogo konveksna funkcija na $\mathbb{R}$ (za $v \neq 0$), pa je njezina stacionarna točka ujedno i jedinstveni globalni minimum funkcije $g$. Stoga je za proizvoljni $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$E(u) = g(0) \leq g(\varepsilon) = E(u + \varepsilon v).$$

Zbog proizvoljnosti $v \neq 0$ slijedi da je $u$ točka minimuma od $E$ na $H_0^1(\Omega)$ i time je dokaz završen. $\square$

# 6 Zaključak

Prikazali smo motivaciju za uvođenje slabih rješenja rubnih zadaća za parcijalne diferencijalne jednadžbe. Jednostavno, klasična teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često nije dovoljna zbog neregularnosti rješenja ili nepostojanja klasičnih rješenja. Uvođenjem slabih derivacija omogućuje se formulacija problema u odgovarajućim funkcijskim prostorima, poput Soboljevljevih prostora, čime se proširuje spektar *rješivih problema* korištenjem rezultata funkcionalne analize. Ovaj pristup ima ključnu ulogu u modernoj teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, kako za teorijske rezultate, tako i za njihovo numeričko rješavanje.

# Literatura

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academis Press, 2003.

[2] M. Andrijević, *Neki linearni modeli teorije elastičnosti*, diplomski rad, Osijek 2022.

[3] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 1997.

[4] I. Aganović, K. Veselić, *Jednadžbe matematičke fizike*, Zagreb, 1985.

[5] S. S. Kutateladze, *Sobolev and Schwartz: two fates and two fames*, J. Appl. Ind. Math. 2, 301–310 (2008)

[6] J. Naumann, *Remarks on the Prehistory of Sobolev Spaces*, Preprints aus dem Institut für Mathematik, (2) 2002. https://doi.org/10.18452/26152002.