Osječki matematički list 25 (2025), 77–88

Broj π od Al-Hvārizmīja do danas

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku pratimo povijest broja π od 9. stoljeća do modernog doba. Do 18. stoljeća većina novih rezultata temeljila se na sve točnijim aproksimacijama dobivenim korištenjem varijanti Arhimedove ideje o upisivanju i opisivanju pravilnih poligona danoj kružnici, a među njima posebno ističemo rezultate koje su dobili Al-Kaši početkom 15. st. i Van Ceulen na prijelazu iz 16./17. st. Nakon 17. st. aproksimacije će se dobivati korištenjem redova, prvenstveno Gregoryjevog reda potencija za arkus-tangens (1671.) u kombinaciji s Machinovom formulom (1706.). Međutim, u praksi nisu potrebne točnije aproksimacije od van Ceulenove, te u dijelu članka koji se odnosi na razdoblje od početka 18. st. do danas glavnu pozornost posvećujemo novim rezultatima o prirodi broja π (iracionalnost i transcendentnost), te njegovoj povezanosti s rezultatima izvan geometrije (Eulerova formula, 1734. i Buffonov eksperiment, 1777.).

Ključne riječi: *π, krug i kružnica, Arhimed iz Sirakuze, Al-Hvarizmi, Al-Kaši, Ludolph van Ceulen, William Jones, Leonhard Euler, redovi*

Number π from Al-Khwārizmī until present day

Abstract

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: *bruckler@math.hr*

In this article, we describe the history of the number π from the 9th century to modern times. Until the 18th century, most of the new results were based on increasingly accurate approximations obtained using variants of Archimedes' idea of inscribing and describing regular polygons on a given circle, and among them we particularly emphasize the results obtained by Al-Kashi at the beginning of the 15th century and Van Ceulen at the turn of the 16th/17th centuries. After the 17th century, approximations will be obtained using series, primarily Gregory's series of powers for the arctangent function (1671) in combination with Machin's formula (1706). However, more accurate approximations than van Ceulen's are not needed in practice, and in the part of the article that relates to the period from the beginning of the 18th century to the present day, we devote our main attention to new results on the nature of the number π (irrationality and transcendence), and its connection with results outside geometry (Euler's formula, 1734, and Buffon's experiment, 1777).

Keywords: *π, circle, Archimedes of Syracuse, Al-Khwarizmi, Al-Kashi, Ludolph van Ceulen, William Jones, Leonhard Euler, series*

1 Uvod

Broj π od davnina fascinira ljude, a i dan danas mnogi nematematičari o njemu imaju razne predrasude i miskoncepcije — od toga da je to broj jednak 3,14, preko toga da su mu decimalne znamenke nasumične (nisu, iako ne prate nikoje pravilo, odnosno ne ponavljaju se, one jesu određene samom činjenicom da je π jednoznačno definiran broj), do raznih „bisera" poput znamenitog *Indiana Pi Bill*, pokušaja savezne države SAD-a Indiane da 1897. zakonski definira iznos π. U tom prijedlogu zakona, kojeg je pisao fizičar i amaterski matematičar E. J. Goodwin, ali je njegovo prihvaćanje spriječio profesor sveučilišta Purdue C. A. Waldo, piše: „tetiva prema luku nad pravim kutom odnosi se kao sedam prema osam, a omjer dijagonale i stranice kvadrata je deset naprema sedam". Dakle, da je taj prijedlog prošao, bilo bi „ozakonjeno" da za kružnicu opsega 32 stranica upisanog kvadrata ima duljinu 7, odnosno dijagonala kvadrata i promjer kružnice bio bi 10 — π bi bio definiran kao 3,2 (a $\sqrt{2}$ kao 0,7) [13]. Mnogi svoju memoriju vole dokazivati znanjem puno znamenaka broja π, te su poznate i mnoge mnemoničke tehnike, osobito na engleskom jeziku. Kao primjer navodimo jednu „pjesmicu" koja se pripisuje sir Jamesu Jeansu, pomoću koje možete zapamtiti prvih 24 dekadske znamenke (koje odgovaraju brojevima slova u pojedinoj riječi): *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard.* [2].

U članku [4] već smo pisali o pretpovijesti broja π u starim civilizacijama (Egipat, Babilon, Indija, Kina), a u posljednjem članku [5] pisali smo i o važnim rezultatima koje su vezano za njega dobili antički Grci. Stare civilizacije bi π doduše vjerojatno prihvatile kao broj, jer se u njima nije razmišljalo o biti broja, ali nisu imale niti smatrale da trebaju imati dokaze da se stvarno radi o konstanti proporcionalnosti između opsega i promjera kruga, nego su umjesto toga osmislile raznolike postupke za računanje površine i opsega kruga, u pravilu bez svijesti o tome da se u svim slučajevima radilo o aproksimacijama. Za razliku od njih, antički Grci su dobili vrlo precizne rezultate i *de facto* dokazali navedenu proporcionalnost, ali za njih π nije broj — samo prirodni brojevi su brojevi za antičke grčke matematičare, a sam broj π skriven je u različitim rezultatima o krugovima, kuglama, stošcima i valjcima izraženim u terminima omjera i razmjera. Podsjećamo ([5]), vjerojatno prijelomni rezultat u povijesti broja π je Arhimedov teorem o krugu: Površina kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta duljine polumjera, a druga opsega kruga. Budući da su stari Grci već prije Arhimeda znali dokazati proporcionalnost između opsega i promjera kruga (suvremeno zapisano: $o = k \cdot 2r$) te između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim polumjerom (suvremeno zapisano: $P = k' \cdot r^2$), Arhimedov rezultat znači da je $k' \cdot r^2 = \frac{r \cdot k \cdot 2r}{2}$, tj. $k = k'$ — konstanta proporcionalnosti jednaka je u obje spomenute proporcionalnosti. Danas ju označavamo s π, ali kao što ćemo vidjeti potkraj ovog članka, ta je oznaka relativno „mlada“. Arhimed je također dokazao da je ta konstanta između $3\frac{10}{71}$ i $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Suvremeno iskazano, poznata aproksimacija $\pi \approx \frac{22}{7}$ potječe od Arhimeda. Metoda kojom je Arhimed dobio taj rezultat, vidi [4], temelji se na upisivanju i opisivanju pravilnih mnogokuta u krug.

2 Broj π u Arapskom kalifatu

Kao što je dobro poznato, matematičari Arapskog kalifata fuzionirali su indijski praktični pristup matematici s egzaktnim starogrčkim, otvorivši tako put prema matematici u modernom obliku. To vrijedi i za povijest broja π. Dok će Arapi o njemu početi razmišljati kao o broju, pod utjecajem indijske neopterećenosti razlikovanjem racionalnih i iracionalnih brojeva i veličina, istovremeno će koristiti činjenicu da se radi o egzaktnoj konstanti, pod utjecajem starogrčkih rezultata. Koristeći varijante Arhimedove metode neki su arapski matematičari dobili vlastite rezultate na ovu temu. Pritom su najpoznatiji rezultati prvog i posljednjeg značajnog matematičara srednjovjekovnog arapskog svijeta, al-Hvārizmīja i al-Kašija, ali i nekih između njih [10]. Čitatelju može biti zanimljivo da ih nazivamo arapskim matematičarima iako nijedan od njih nije Arap (svi su bili iz područja Irana) i nikad nisu živjeli u Arabiji. No, matematika kao i općenito znanost srednjovjekovnog islamskog svijeta uobičajeno se naziva arapskom, jer je nastala na području Arapskog (Abasidskog) kalifata i zapisana na tamo i tada službenom arapskom jeziku.

Otac algebre, **Muhamed ibn Musa al-Hvārizmī** (oko 780.–850.) bio je prvi veliki znanstvenik Arapskog kalifata. Djelovao je u Bagdadu, pod zaštitom kalifa abasidske dinastije Al-Ma'mūna, velikog poticatelja znanosti. U matematici je najpoznatiji po opisu korištenja indijskog dekadskog pozicijskog sustava i rezultatima o linearnim i kvadratnim jednadžbama, no bavio se i astronomijom i geografijom. Surađivao je s braćom Banu Musa, koji su skupa s njim djelovali u Kući mudrosti (*Bait al-Ḣikma*, vrsta akademije) koju je 825. utemeljio Al-Ma'mūn. Oni su, metodom drugačijom od Arhimedove [11], iznova dokazali ono što danas zapisujemo kao

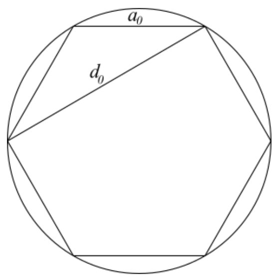
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Al-Hvārizmī je pak u svojoj *Algebri* (Kitab al-džabr wa-'l-mukabala), kojom je utemeljio matematičku disciplinu algebru, zapisao (prijevod engleskog prijevoda iz [11]):

> A za svaki krug kad pomnožiš promjer s tri sedmine dobiješ njegov opseg, (...) postoje druge dvije tvrdnje: Jedna je da se pomnoži promjer sa sobom i onda s deset, pa da se uzme korijen rezultata i to je opseg kruga. Druga, korištena od strane astronoma, je pomnožiti promjer s dvije i šezdeset tisuća i osam stotina trideset i dva, a onda podijeliti s dvadeset tisuća i rezultat je opseg, a sve ove su blizu jedna drugoj.

U izdanju *Algebre* iz 1939. urednici navode da je na margini al-Hvārizmī zapisao i komentar da se radi o aproksimaciji i da samo Allah zna točan omjer opsega i promjera kruga. Kao što vidimo, al-Hvārizmī je znao tri aproksimacije za π: $\pi \approx 3\frac{1}{7} = 3{,}\overline{142857}$, koju je znao Arhimed u 3. st. pr. Kr. [5], $\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}16227766\ldots$, koju je znao kineski astronom i filozof Zhang Heng u 2. st. [4] i $\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$, koju je znao indijski astronom Aryabhata Stariji u 6. st. [4]. Dok nismo uspjeli pronaći izvor je li te aproksimacije samo preuzeo od starijih izvora ili je neku i sam izveo, ono po čemu se u svakom slučaju al-Hvārizmī ističe je očigledna svijest o aproksimaciji — čak i da nema spomenutog komentara, samo navođenje tri različita iznosa jasno pokazuje da je bio svjestan da se ne radi o točnim vrijednostima. Usporedbom s danas poznatom vrijednosti broja π vidimo da se radi o tri aproksimacije s točnošću na dvije do tri decimale, od kojih je najpreciznija treća.

U 10. st. je matematičar, fizičar i astronom **Abu Sahl Al-Kūhī** (oko 940.–1000.) vezano za računanje centra mase za neke dijelove krugova dobio procjenu $\frac{28}{9} = 3{,}\dot{1}$ za π, koju je i eksplicitno usporedio s Arhimedovom [7, 11]. Malo kasnije, u 11. st., je **Abu 'l-Rayhan al-Bīrūnī** (oko 973.–1050.) računao opsege pravilnog 180-terokuta upisanog i opisanog kružnici te je za opseg kružnice uzeo njihovu srednju vrijednost i tako dobio aproksimaciju koju bismo danas zapisali kao $\pi \approx 3{,}14119\ldots$, točnu na tri decimale [11].



Slika 1. Al-Kāšījeva početna iteracija za određivanje 2π

Posljednji od velikih matematičara i astronoma srednjovjekovnog islamskog svijeta bio je **Džamšīd Al-Kāšī** (rođen oko 1380., umro 1429.), koji je svoja najznačajnija djela napisao u Samarkandu, tada glavnom znanstvenom centru islamskog svijeta (tada Timuridsko carstvo). Njegovi doprinosi bili su iznimni, a među najpoznatijima od njih je njegova neobično točna aproksimacija broja π, zapravo 2π, čija točnost će biti premašena tek za više od stotinu i pedeset godina kasnije. On je 1424. napisao *Pismo o opsegu*, koje sadrži originalan izračun broja π. Kao i njegovi prethodnici, i on je pošao od Arhimedove ideje upisivanja i opisivanja pravilnih mnogokuta danoj kružnici. Također, kao i Arhimed ([4]), krenuo je od upisanog pravilnog šesterokuta (kojemu je duljina stranice jednaka polumjeru, recimo 1) i tako kao prvu aproksimaciju dobio 3, a zatim udvostručavao broj stranica. No, al-Kaši je samo upisivao pravilne mnogokute u kružnice, a potrebne izračune si je olakšao otkrivši bitno jednostavniju rekurziju od Arhimedove. Al-Kaši je koristeći sličnost određenih trokuta i teorem o obodnom i središnjem kutu (za više detalja upućujemo na [12]) dobio sljedeće dvije rekurzivne relacije (koje je opisao riječima, jer matematičke formule u to doba još nisu postojale):

$$d_n^2 = 2 + d_{n-1},$$
$$a_n = \sqrt{4 - d_n^2}$$

za $n \geq 1$, pri čemu je a_n duljina stranice pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu, a d_n je duljina njegove druge po duljini dijagonale. Početna iteracija je (uz pretpostavku da je polumjer kružnice $r = 1$) $a_0 = 1$ i, kako se lako dobije iz Pitagorinog poučka, $d_0 = \sqrt{3}$, usp. sliku 1. U svakom koraku tako dobivamo aproksimaciju za 2π kao $n \cdot a_n$ (opseg trenutnog upisanog mnogokuta). Tako je u 28 iteracija došao do pravilnog $3 \cdot 2^{28} = 805.306.368$-terokuta upisanog u kružnicu. On je računao u seksagezimalnom sustavu, koji je u to doba još uvijek bio preferirani sustav za astronomske (u ono doba jedine zahtjevne) proračune, i zatim ju zapisao u dekadskom pozicijskom sustavu,

$$\pi \approx 3{,}14159265358979325,$$

koja je točna na čak 16 decimala [11, 12].

3 Broj π u renesansnoj Europi

Dobro je poznato da su se kroz prijevode i obrade arapskih originalnih tekstova kao i arapskih prijevoda antičkih grčkih tekstova tijekom srednjeg vijeka Europljani ponovno upoznali sa starogrčkim rezultatima (s kojima je izgubljen kontinuitet dijelom uslijed slabog interesa Rimljana za znanost, dijelom uslijed nestabilnih uvjeta nakon pada Zapadnog rimskog carstva) te otkrili arapsku matematiku. To je stvorilo preduvjete da u renesansi (južna, zapadna i srednja) Europa preuzme glavnu ulogu u nastavku razvoja matematike. Pod arapsko-indijskim utjecajem oslobođeni razmišljanja o prirodi broja π i opskrbljeni računski moćnim dekadskim pozicijskim sustavom, europski matematičari su počeli i sami tražiti nove, točnije aproksimacije. Ti su se računi, kao i spomenuti arapski rezultati, još uvijek temeljili na izvornoj Arhimedovoj ideji upisivanja odnosno opisivanja pravilnih mnogokuta danoj kružnici.

Razmatrajući odnose među opsezima i duljinama stranica pravilnih mnogokuta upisanih u kružnicu polumjera 1, znameniti francuski renesansni matematičar **François Viète (Vieta)** (1540.–1603.) je koristeći trigonometrijske tehnike dobio jedan od najstarijih poznatih prikaza broja π pomoću beskonačnih suma i produkata.[1] Taj je rezultat poznat kao Vietin produkt:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

[1] Dva starija prikaza preko beskonačnih suma, tj. redova, dobio je oko 1400. indijski matematičari Madhava.

Viète je taj produkt objavio u *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* (1593.), gdje je objavio i aproksimaciju broja π točnu na 10 decimala, dobivenu korištenjem pravilnog $6 \cdot 2^{16} = 393216$-terokuta. Iste je godine flamanski matematičar **Adriaan van Roomen** (1561.–1615.) dobio aproksimaciju broja π točnu na 15 decimala [1, 10].

Najpoznatija od renesansnih aproksimacija broja π i ujedno prva aproksimacija u povijesti koja je bila točnija od Al-Kāšījeve (iako se za nju u renesansnoj Europi vjerojatno još nije znalo) potječe od nizozemsko-njemačkog učitelja mačevanja i matematičara **Ludolpha van Ceulena** (1510.–1610.). On je 1596. u svojoj knjizi *Van den Circkel* (*O krugu i kružnici*) objavio rezultat dobiven s mnogokutom od $15 \cdot 2^{31} = 32.212.254.720$ stranica — aproksimaciju točnu na 20 decimala. Taj je rezultat kasnije popravio koristeći mnogokute s $2^{62} = 4.611.686.018.427.387.904$ stranica i tako dobio aproksimaciju

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950\,29$$

točnu na 35 decimala. Aproksimacija točna na 33 decimale je objavljena u posthumnom izdanju njegovog djela *De arithmetische en geometrische fondamenten* (*O aritmetici i temeljima geometrije*) (1615.), a spomenuta aproksimacija točna na 35 decimala objavljena je tek 1621. u *Cyclometricus* (*Mjerenje kruga*) Willebrorda Snella. No, Van Ceulen je 1611. pokopan u grobu u crkvi Pieterskerk u Leidenu, na čijem nadgrobnom spomeniku su uklesane njegova donja i gornja ograda za π, 3,14159265358979323846264338327950 288 i 3,14159265358979323846264338327950289. Izvorni nadgrobni spomenik je nestao oko 1800., a 2000. je postavljena replika.[2] Van Ceulenu u čast je sve do 19. stoljeća, osobito na njemačkom i nizozemskom govornom području, bilo uobičajeno π nazivati Ludolphovim brojem [9, 10].

4 Broj π u 17. stoljeću

Postrenesansna Europa svijetu je dala logaritme i analitičku geometriju, a zatim i temelje infinitezimalnog računa. Tako će tijekom 17. stoljeća ne samo biti dobivene nove aproksimacije Arhimedovom metodom, nego i dokazani novi rezultati tehnikama koje su ili neposredni prethodnici infinitezimalnog računa ili njegovi rani primjeri. Pritom se tijekom 17. stoljeća ističu ponajviše doprinosi matematičara s Britanskog otočja.

Jedan od najvažnijih prethodnika utemeljenja infinitezimalnog računa i ujedno najznačajniji engleski matematičar prije Newtona, **John Wallis** (1616.–1703.) je u svom znamenitom djelu *Arithmetica infinitorum* (1656.)

[2] Sliku možete vidjeti na stranici `https://www.atlasobscura.com/places/ludolph-van-ceulen-memorial-leiden`.

objavio uz Vietinu drugu najpoznatiju reprezentaciju broja π kao beskonačnog produkta:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

Otkrio ju je pri izračunu površine jediničnog kruga svojom metodom koja je bila neposredni prethodnih modernog integriranja. Irski matematičar lord **William Brouncker** (1620.–1684.) uspio je, navodno manipuliranjem Wallisovog produkta, 1658. dobiti prvi u povijesti verižni razlomak za π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\ldots}}}.$$

Prvi egzaktan izvod Brounckerove formule dao je preko 100 godina kasnije Euler, o čijem doprinosu povijesti broja π ćemo više reći malo kasnije. U ovo doba susrećemo i prvo korištenje slova π vezano za krugove: William Oughtred (1574.–1660.), jedan od Wallisovih učitelja, koristio je u *Clavis Mathematicae* (1631.) π za poluopseg kruga, a δ za polumjer i pokazao da je $\pi : \delta$ (tj. današnji π) između $22 : 7$ i $355 : 113$, a na sličan način je 1669. π koristio i Newtonov profesor Isaac Barrow [1, 10].

Moderni izračuni aproksimacija broja π ne temelje se više na Arhimedovoj metodi, nego na korištenju redova. O povijesti redova više ćemo reći u sljedećem članku našeg serijala, ali već ovdje ističemo da je ona začeta u drugoj polovici 17. st. doprinosima N. Mercatora, I. Newtona, G. W. Leibniza i J. Gregoryja [3]. Sir **Isaac Newton** (1643.–1727.) kao glavnu tehniku infinitezimalnog računa, kojeg su on i Leibniz utemeljili neovisno jedan od drugog, uveo korištenje redova potencija. Pritom je intenzivno koristio binomne redove.[3] Tako je polukružnicu $y = \sqrt{1-x^2}$ razvio u red potencija i integrirao član po član te koristeći parcijalne sume tako dobivenog novog reda potencija 1665. godine dobio aproksimaciju π točnu na 16 decimala. Dok, kao što smo vidjeli, to nije bila posebno impresivna točnost za to doba, Newtonov doprinos je značajan jer je postavio temelje novog pristupa računanju broja π [1, 10].

Škotski matematičar **James Gregory** (1638.–1675.) je 1671. otkrio razvoj u red za arkus-tangens.[4] Nije poznato kako je došao do tog reda, a i opisao ga je na drugačiji način od današnjeg, no uz prilagodbu modernom stilu Gregoryjevo otkriće zapisujemo kao π:

[3]Podsjećamo, radi se o poopćenju binomne formule na realne eksponente: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, uz $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$. Binomni redovi konvergiraju za $|x| < 1$.

[4]Zapravo ga je prvi otkrio već spomenuti Madhava oko 1400., no to u 17. st. u Europi nije bilo poznato.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Uvrštavanjem 1 u taj red dobiva se red za $\frac{\pi}{4}$ kojeg je neovisno o Gregoryju izveo **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.–1716.):π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Napomenimo ovdje da je ovaj prikaz broja π pomoću reda vrlo jednostavan, ali i neprikladan za računanje aproksimacija kao parcijalnih suma jer vrlo sporo konvergira.

Gregoryjev red na inovativan način za računanje aproksimacije broja π iskoristio je engleski matematičar i astronom **Abraham Sharp** (1653.–1742.). Uzevši da je u redu za arkus-tangens $x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dobio je brže konvergentan red π:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^2 \cdot 7} + \dots\right).$$

kojeg je 1699. iskoristio da bi dobio novu rekordno točnu aproksimaciju broja π — točnu na 71 decimalu. Arkus-tangens je tako poprimio istaknutu ulogu u lovu na broj π i tu će ulogu zadržati sve do 1973. godine [1].

5 π u 18. stoljeću

Početkom 18. stoljeća, 1706., engleski matematičar i astronom **John Machin** (1680.–1751.) otkrio je relaciju π:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

U kombinaciji s razvojem u red potencija za arkus-tangens uspio ju je iskoristiti za novi rekord, aproksimaciju broja π točnu na 100 decimala. Time su Sharp i Machin otvorili novu eru lova na znamenke broja π i kroz sljedeća desetljeća i stoljeća njihov broj se ubrzano povećavao: Prvi sljedeći rekord postavio je Francu Thomas Fantet de Lagny 1719. (127 decimala, od čega 112 točno), zatim Slovenac Jurij Vega 1794. (140 decimala, od čega 136 točno). No, lov na sve točnije aproksimacije je s vremenom poprimio karakter natjecanja na rekord bez stvarne važnosti — ta čak i NASA danas ne koristi više od 16 decimala, a proračun veličine svemira na točnost veličine atoma vodika ne zahtijeva više 39 decimala [10, 1]. Ukratko, realno nikom ili skoro nikom ne treba točnost veća od van Ceulenove, te nastavak priče o poznatom broju znamenaka nećemo dalje pratiti. To naravno ne znači da je povijest broja π postala dosadna.

U 18. stoljeću će se naime konačno uvesti i moderna oznaka i započeti rasprava o prirodi ovog broja. Naime, do 18. st., realno već od renesanse, broj π je prihvaćen kao broj, iako definicija broja još nije dana. Iste godine kad je Machin otkrio svoju formulu, velški matematičar **William Jones** (1675.–1749.) prvi je u rečenici „u krugu, odnos promjera prema opsegu je kao 1 prema [...] 3.14159... = π" koristio slovo π na način na koji ga danas koristimo. Pritom se za sve rezultate koje navodi Jones poziva na Machina, tako da je vrlo vjerojatno i ideja simbola π za omjer opsega i promjera kruga Machinova. Ipak, simbol nije odmah šire prihvaćen, nego se proširio u upotrebi nakon što ga je 1736. u svom djelu *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* koristio Euler [1], kome posvećujemo glavninu ostatka ovog članka.

Znameniti švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707.–1783.), jedan od najproduktivnijih i najsvestranijih matematičara u povijesti, bio je toliko utjecajan da je njegovo korištenje simbola π odmah populariziralo tu oznaku, osobito nakon što ga je koristio u svom najutjecajnijem djelu *Introductio in analysin infinitorum* (1748.). No, daleko od toga da je to jedini njegov doprinos povijesti ove znamenite matematičke konstante. On je izveo više formula koje uključuju π, među kojima se ističe formula (iz 1734., kad je još koristio p za današnji π) koju mnogi smatraju najljepšom matematičkom formulom:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Ona je specijalni slučaj općenitije Eulerove formule koja povezuje kompleksnu eksponencijalnu funkciju sa sinusom i kosinusom, a njome je π po prvi puta povezan i s kompleksnim brojevima (usput budi rečeno, upravo je Euler uveo simbol i za imaginarnu jedinicu). Riješivši znameniti Baselski problem Euler je dobio znameniti red π:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Godine 1755. Euler je osmislio način kako ubrzati izračune znamenaka broja π na temelju svoje ranije formule, slične Machinovoj, i modifikacije reda potencija za arkus-tangens i tako uspio u manje od sat vremena izračunati 20 decimala broja π. Spomenuli smo i da je Euler, 1775., prvi sustavno izveo raniji Brounckerov verižni razlomak za π [1].

Druga polovina 18. st. obilježena je i konačnim razjašnjenjem prirode broja π. Dok su još od 15. stoljeća mnogi matematičari nagađali da je π iracionalan, to je dokazano tek u 18. st.: Godine 1766. švicarski matematičar **Johann Heinrich Lambert** (1728.–1777.) dokazao je tu tvrdnju kao korolar svog teorema da ni za koji racionalan broj $x \neq 0$ broj $\operatorname{tg} x$ ne može biti racionalan (pa jer je $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbb{Q}$ slijedi da π nije racionalan). Godine 1794. A. M. Legendre je dokazao da je i π^2 iracionalan [1].

Za kraj spomenimo još i da je 1777. **George Louis Leclerc, Comte de Buffon** (1707.–1788.) sa svojim znamenitim vjerojatnosnim eksperimentom otkrio pojavu broja π i u vjerojatnosti: Ako u ravnini imamo mrežu paralelnih jednako razmaknutih pravaca i iglu koja je duga točno koliki je razmak dvaju susjednih pravaca, te ako iglu nasumično bacamo na ravninu, vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca je $\frac{2}{\pi}$. Ubrzo zatim P. S. Laplace je uočio da se taj rezultat može iskoristiti za stohastičko određivanje broja π, praćenjem relativnih frekvencija uspjeha u opisanom slučajnom pokusu. Ipak, tim pristupom nećemo prelako dobiti dobru aproksimaciju — dosad najbolji poznat rezultat tim načinom dobio je Mario Lazzerini 1901. On je iz rezultata 3408 bacanja, s modificiranim odnosom duljine igle i razmaka pravaca (5 : 6 umjesto izvornih 1 : 1), uspio odrediti 6 decimala broja π [1, 3, 6].

Tako je do kraja 18. stoljeća većina bitnog, a svakako svog „školskog“, znanja o π kompletirana. Ipak, π je do danas zadržao fascinaciju za matematičare i čak i danas postoje neriješeni problemi vezani za njega.

6 Kraj članka, iako priči nije kraj

Lambert je ne samo dokazao da π nije racionalan, nego je postavio i hipotezu da je „jako“ iracionalan — transcendentan. Podsjećamo, transcendentni realni brojevi su oni koji nisu rješenja nikoje polinomijalne jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima. Primjerice, $\sqrt{2}$ nije transcendentan jer je rješenje jednadžbe $x^2 - 2 = 0$. Da je Lambert bio u pravu dokazao je 1882. njemački matematičar **Ferdinand von Lindemann** (1852.–1939.). Tim svojim dokazom von Lindemann je konačno razriješio jedan od tri klasična problema: Nakon njega, kad susretnemo tvrdnju, kakva se uvijek iznova zna susresti u medijima i komunikaciji, da je netko riješio antički problem kvadrature kruga (vidi npr. [5]), znamo da to sigurno nije moguće [10, 1].

S otkrićem računala i novih algoritama rekordni brojevi otkrivenih znamenaka broja π počeli su se ubrzano nizati, a trenutni rekord je $3 \cdot 10^{14}$ znamenaka postignut u travnju 2025. [8]. No, iako zbog iracionalnosti broja π znamo da njegov dekadski zapis nije periodičan, sama precizna određenost broja π znači da nije ni nasumičan. Vezano za eventualne moguće pravilnosti u dekadskom zapisu broja π tako i danas imamo nekoliko otvorenih problema, od kojih je najpoznatiji pitanje pojavljuje li se svaki konačan niz znamenaka u njegovom beskonačnom zapisu u nekoj bazi s istom frekvencijom. Takvo svojstvo zove se normalnost broja te se ovaj put opraštamo od Vas s pitanjem na koje trenutno nitko ne zna odgovor:

Je li π normalan?

Literatura

[1] J. Arndt, C. Haenel, *Pi Unleashed*, Springer-Verlag, 2006.

[2] A. Bellos, *Alex's Adventures in Numberland: Dispatches from the Wonderful World of Mathematics*, Bloomsbury, 2010.

[3] F. M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*, Berlin: Springer Spektrum, 2018.

[4] F. M. Brückler, *π prije nego se za njega znalo*, Osječki matematički list 21(2) (2021) 151–161.

[5] F. M. Brückler, *Eudoksova metoda iscrpljivanja*, Osječki matematički list 24(1) (2024) 133–146.

[6] F. M. Brückler, *Povijest matematike*, Online-skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2024. `https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a` (pristupljeno 11. prosinca 2025.)

[7] Y. Dold-Samplonius, (2016). Al-Qūhī (or Al-Kūhī), In: Selin, H. (eds) Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures. Springer, Dordrecht. `https://doi.org/10.1007/978-94-007-7747-7_9325`

[8] Guiness World Records, *Most accurate value of pi*, 2025. `https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/66179-most-accurate-value-of-pi` (pristupljeno 11. prosinca 2025.)

[9] C. J. Huffman, *Mathematical Treasure: Van Ceulen's Vanden Circkel*, 2020. `https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-van-ceulen-s-vanden-circkel` (pristupljeno 10. prosinca 2025.)

[10] MacTutor Histoy of Mathematics Archives, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/` (pristupljeno 6. prosinca 2025.)

[11] M. Mawaldi, *Glimpses in the History of a Great Number: Pi in Arabic Mathematics*, 2008. `https://muslimheritage.com/pi-in-arabic-mathematics/` (pristupljeno 6. prosinca 2025.)

[12] G. Van Brummelen, *Jamshīd al-Kāshī: Calculating Genius*. Mathematics in School, Vol. 27, No. 4, History of Mathematics (1998), 40–44.

[13] A. Wilkins, *The Eccentric Crank Who Tried To Legislate The Value Of Pi*, 2012. `https://gizmodo.com/the-eccentric-crank-who-tried-to-legislate-the-value-of-5880792` (pristupljeno 8. prosinca 2025.)