 Šumarski list br. 7–8, CXXX (2006), 331-343

RASTE LI DRVEĆE U ŠUMI PO PRAVILIMA ZLATNOG REZA I FIBONACCIJEVOG NIZA?

DO TREES IN A FOREST GROW BY THE RULES OF THE GOLDEN SECTION AND THE FIBONACCI SERIES?

Juraj ZELIĆ*

*SAŽETAK: Na osnovi analize biometrijskih parametara rasta (prirasno-prihodne tablice) šumskih sastojina bukve EGT-II-D-11 (bukva sa šašem, Bezak et all, 1989) i hrasta lužnjaka (*Quercus robur *L.), Bezak, 2004, razmatra se mogući odgovor na pitanje: "Raste li drveće u šumi po pravilima zlatnog reza i Fibonaccijevog niza"?*

Zlatni rez ili božanski omjer otkriven je u starim kulturama i civilizacijama, primjenjivan kao idealna proporcija u umjetnosti i graditeljstvu, a otkriva se u živom materijalnom svijetu prirodnih zakonitosti rasta i razvoja biljaka i životinja. Izražen brojem dekadskog sustava iznosi:

$\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2 = 1{,}6180339...$

S omjerom zlatnog reza u uskoj je vezi Fibonaccijev niz, skup realnih brojeva čiji je član u nizu jednak zbroju dvaju prethodnih, primjerice 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Utvrđeno je da po pravilima zlatnog reza i Fibonacijevog niza drveće u šumi raste u debljinu, to jest raste prsni promjer, kružna ploha ili temeljnica, opseg stabla i promjer krošnje stabla kao linearno zavisna varijabla prsnog promjera.

Rast prsnog promjera stabla može se izraziti linearnom funkcijom oblika: $d = a + b\,t$, *u kojoj je zavisna varijabla prsni promjer a nezavisna starost stabla. Regresijski koeficijent* b *pokazje brzinu rasta stabla ili prirast, različit za pojedine vrste drveća i okolišne uvjete pod kojim stablo raste.*

Izražava se kao b*-modul, koji zajedno s regresijskom konstantom* a *predstavlja geometrijski rast jednakokutne spirale unutar tzv. vrtložnog pravokutnika s odnosom stranica zlatnog reza. Tjekom životne dobi stablo u sastojini "teži" prosječnom prirastu (brzini rasta) iskazanom vrijednošću* b*-modula.*

Brzina rasta ili debljinski prirast predstavljen matematički derivacijom linearne funkcije daje konstantu b*, kao izraz jednolikog gibanja, pozitivnog predznaka. Pomoću* b*-modula mogu se numerički iskazati boniteti za vrste drveća ili odrediti ekološko-gospodarski tipovi šuma.*

Modelom je pretpostavljeno da sila rasta stabla u debljinu nije ometana silom otpora rastu, kao unutarnjom strukturom rasta, a oscilacije u rastu (prirastu) uvjetovane su vanjskim, prisilnim silama.

Rast stabla u visinu predstavljen matematičkom funkcijom drugog stupnja nema tijekom vremena zakonitost zlatnog reza i Fibonaccievog niza jer je sila rasta ometana prigušenom silom, silom otpora rastu, koja se tijekom životne

* Juraj Zelić, Hrvatske šume, Milke Trnine 2, 34 000 Požega

dobi stabla povećava te završava maksimumom visine stabla, kada je sila otpora rastu u visinu jednaka sili rasta.

Brzina rasta u visinu svojstvena je svakoj vrsti drveća, a uvjetovana je i vanjskim utjecajima, bonitetom staništa, toplinom, svjetlošću, strujanjem zraka, gustoći sastojine...

Volumen rasta stabla je funkcija rasta prsnog promjera, visine i obličnog broja, uvjetovana unutarnjom strukturom rasta dviju suprotnih sila i vanjskim, prisilnim silama rasta te ne pokazuje rast po pravilu zlatnog reza i Fibonaccijevog niza. Zlatni rez volumena stabla, kao idealnu točku uravnoteženja proporcija vanjskog habitusa stabla i podzemnog dijela (korijena), treba tražiti drugom metodologijom.

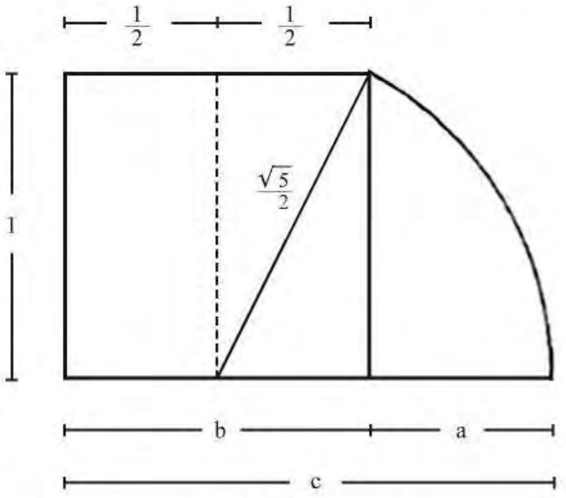
Ključne riječi: zlatni rez, Fibonaccijev niz, rast prsnog promjera stabla i promjera krošnje, visinski i volumni rast, jednadžbe rasta, sile rasta, sile otpora rastu, prigušena i prisilna gibanja, jednakokutna spirala, vrtložni pravokutnik.

UVOD – Introduction

Zlatni rez (zlatni broj) ili božanski omjer bio je već poznat starim kulturama i civilizacijama. Iskazan dekadskim sustavom i označen simbolom grčkog slova ϕ jednak je sljedećem omjeru:

$\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2 = 1{,}6180339...$

R. A. Schwaller de Lubicz, 2004 u knjizi "Hram u čovjeku" predstavlja geometrijske konstrukcije za zlatni broj ϕ, kako je to vidljivo na slici 1.



$$c = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \phi$$

Slika 1. Geometrijska konstrukcija zlatnog broja $\phi = 1{,}6180339...$

Picture 1 The geometric construction of gold number $\phi = 1{,}6180339...$

Za $c = 1$, $b = 1 / 1{,}618 .... = 0{,}618...$,
$a = 1 / (1{,}618...)^2 = 0{,}382...$

Iako se spominje kako se "zlatni broj može pronaći posvuda", praksa pokazuje da se uloga zlatnog broja očitava u živom i neživom svijetu samo u slučajevima gdje se pokazuje uravnoteženo, stabilno stanje ili gibanje.

Zvijezda (petokraka) upisana u pravilan peterokut ima isti odnos u presjecištima krakova.

Tako je za AC = 1, AB = 0,618..., BC = 0,381...

Prenoseći ovu geometriju u prirodu, može se zamijetiti kako veliki broj cvjetova ima pet latica smještenih zvjezdasto u pentagram, poput cvijeta jabuke, čiji presječeni plod u jezgri pokazuje također sliku pentagrama.

Astronomi su otkrivali pravilo zlatnog reza i u formiranju tzv. spiralnih galaktika, a biolozi u spiralnom rasporedu listova oko stabljike ili primjerice u dinamičkom rasporedu listića češera smreke.

Nema sumnje da na području biologijskih i biotehničkih znanosti postoje stanja i procesi čije se zakonitosti mogu formulirati matematički. Da li se u pojam rasta i razvoja stablo – šuma može "ugurati" pravilo zlatnog broja? Pokušat će se odgovoriti na to pitanje, no prije toga valja razmotriti matematičko pravilo Fibonaccijevog niza, koje je u uskoj vezi s pravilom zlatnog reza (broja).

Matematičar Leonardo iz Pise, zvan Fibonacci godine 1202. postavio je pitanje: Koliko se pari zečeva može dobiti godišnje od jednog para na početku prvog mjeseca pod pretpostavkom da svaki par okoti svakog mjeseca novi par koji postaje plodan od drugog mjeseca života? Ako se pretpostavi da su svi parovi zečeva besmrtni, broj na koncu svakog mjeseca tvori sljedeći niz:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377....

Jednostavno pravilo porasta vrijednosti članova u nizu glasi: Svaki član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova. Tako će član 144 biti zbroj dvaju prethodnih članova, to jest 144 = 89 + 55.

Škotski matematičar Robert Simson utvrdio je 1753. godine da omjeri uzastopnih članova teže ka granici, koja je ϕ, zlatni rez, primjerice 233 /144 = 1,618055...

Matematičari Euler i nešto kasnije Binet (1843) dali su opću formulu za izračunavanje vrijednosti n – tog člana Fibonaccijevog niza.

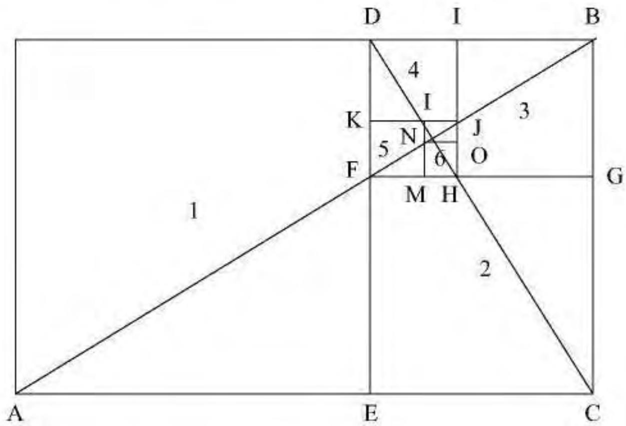
$F_n = 1 / 5 * ((1 + \sqrt{5}) / 2))^n$

Tako je, primjerice, dvanaesti član Fibonaccijeva niza $F_{12} = 1 / 5 * ((1 + \sqrt{5}) / 2))^{12} = 144$

Za rast i prirast biljnog i životinjskog svijeta, kao materijalne žive strukture u prostoru i vremenu značajno je pravilo zlatnog broja i Fibonaccijevog niza.

Za naše razmatranje u otkrivanju pravila zlatnog broja, odnosno Fabonacijevog niza za rast i prirast stabla u debljinu, visinu i po volumenu značajno je pravilo rasta po spirali kako to pokazuje grafička konstrukcija tzv. vrtložnog pravokutnika na slici 2.

Stranice pravokutnika odnose se prema zlatnom broju, to jest stranica b pravokutnika jednaka je $1 / \phi$, to jest 0, 618... od stranice $a = 1$.



Slika 2. Konstrukcija vrtložnog pravokutnika (spirale) po pravilu zlatnog reza

Picture 2 The construction of whirling rectangles (spirals) along the rule of gold section

Pravokutnik kojemu je odnos stranica po zlatnom rezu može se podijeliti na kvadrat sa stanicom b i još jedan sličan prvokutnik. Postupak se može ponavljati "ad infinitum". U seriji pravokutnika može se konstruirati spirala. Spiralu tvore serija lukova četvrtina krugova, a luk teži prema jedinstvenoj točki u kojoj se sijeku dijagonale svih zlatnih pravokutnika pod istim kutem (jadanakokutna spirala).

Jednakokutna spirala ogleda se u rastu i razvoju životinjskog svijeta, kako je to primjerno prikazano na slici 2. za rast školjke iz roda *Nautilus*.

Raspored listića češera ima spiralni uzorak, gdje su listići jedan prema drugom raspoređeni pod kutom 137,5°. Evolucija je izabrala najdjelotvorniji način na koji se može smjestiti najviše listića na češer, a navedeno pravilo ima zlatni omjer, to jest

$137{,}5° / 360° = 1 / \phi^2 = 1 / 2{,}618... = 0{,}381.$

Zašto biljke rastu na taj način nema jasnog objašnjenja. Jedno od objašnjenja jest kemijsko sputavanje rasta, to jest da se primordij ili primitivni pup lista razvija na mjestu najvećeg raspoloživog razmaka u odnosu na prethodni.

Shwaller de Lubitz zaključuje da "zlatni broj nije proizvod matematičke imaginacije, već prirodni princip zakona ravnoteže" te dodaje da je fenomen života sposobnost reagiranja, to jest da bi se reakcija ostvarila potreban je otpor koji je iste prirode kao i akcija.

O estetskim principima egzaktnih znanosti raspravlja Vladimir Špiranec, 2005. u knjizi "Sklad" ističući temeljne principe pojavnog živog i neživog svijeta, simetričnost, koherenciju, logos, adaptilnost i dinamičnost, te među ostalim, i "posebne brojeve" koji se očituju i u pravilima zaltnog reza i Fibonaccijevog niza.

O zlatnom omjeru, kao "posebnom broju" otkrivenom u svjetu prirode piše Wells, 2005 u "Rječniku zanimljivih i neobičnih brojeva".

"Kako priroda preoblikuje našu tehnologiju" istražuje Peter J. Bentley, 2004 u knjizi "Digitalna biologija" te navodi niz primjera iz prirode koji sljede estetsku logiku oblikovanjem najsvrsishodnijih struktura živog svijeta. Otkrivena estetska logika prenosi se u "digitalne svemire" kompjuterskih simulacija evolucije, rasta i razvoja živih bića temeljenih na reprodukciji, odabiru i varijacijama.

Stvarni svijet, kako ga doživljava čovjek, traži uvijek kvantitativnu logiku u kojoj se usporedbom najmanje dvaju elemenata definira treći kvantitativnom jednadžbom.

SVRHA RADA – Purpose of paper

Svrha rada je traženje odgovora na pitanje: Da li se temeljem poznatih egzaktno mjerljivih biometrijskih parametara rasta i prirasta šumskog drveća može utvrditi sklad, mjera proporcije i dinamička ravnoteža rasta i prirasta, primjenom "posebnih brojeva", pravila zlatnog reza i Fibonccijevog niza?

METODA RADA – Working method

a) Kvantificiranje mjerila

Za kvantificiranje zakonitosti koje proizlaze iz pravila zlatnog reza i Fibonaccijevog niza potrebno je za postavljeno pitanje rasta i prirasta stabla u šumi razmotriti pojam veličine mjerila za kvantificiranje vrijednosti.

Racionalni, materijalistički um za mjeru duljine puta izveo je mjernu jedinicu 1 metra, kao četrdesetmilijuntnog dijela ekvatorske kružnice, no postavlja se pitanje prave vrijednosti mjere, to jest da li je to mjera izražena metrom ili odnos, odnosno proporcija mjere.

Koristeći se pravilom zlatnog reza može se zaključiti kako tu mjera pripada proporciji, to jest proporcija je usporedba veličina. U razmatranju mjere rasta i prirasta debljine, visine i volumena stabla u šumi koristit će se mjera metričkog decimalnog sustava i proporcija kao usporedba veličina.

Međutim, utvrđeno je da princip proporcija podliježe promjenljivosti, modulu specifičnom za svaku vrstu živog svijeta, ovisno o uvjetima u kojima se živo biće raste i razvija. Pridružujući specifičan modul mjere svakoj vrsti drveća ili stabala, bilo bi moguće odrediti njegove specifične proporcije u određenim uvjetima rasta i razvoja.

Kao mjerna jedinca za debljinski rast primjenjen je stoti dio 1m, to jest 1 cm. Mjerna jedinica je dakle jedinični razlomak (1/100) ili 1 cm, jer ta mjerna jedinica korespondira u određenoj dobi stabla s članovima Fibonaccijevog niza, odnosno zlatnog reza.

Rast stabla u visinu u šumskim uvjetima je promjenljiv tijekom životne dobi, za svaku dob postoji proporcija rasta između djelova stabla, to jest korjena, debla i krošnje po visini i širini, a mjerna jedinica 1 m ne korespondirira sa članovima Fibonaccijevog niza, odnosno zlatnog reza, te bi mjerilo proporcije i ravnoteže trebalo tražiti primjenom drugih, "posebnih brojeva".

b) Razmatranje nekih aktualnih teorija o rastu i prirastu

Činjenica je da kod stabala drveća postoji mogućnost povećanja širine, debljinskog pa time i volumnog prirasta do granica fiziološke i fizičke starosti.

Stablo drveta određene vrste dosiže u određenoj dobi vrsti svojstvenu visinu te dalje nema visinskog prirasta. Mjerenjem je utvrđeno da je prirast u visinu stabla promjenljiv, te da u određenoj dobi kulminira, a potom se smanjuje.

Kovačić, 1993 navodi za rast stabla u visinu: "Od stote godine pa naviše prirast iznosi svega desetak centimetara, a nedugo zatim i niže. Time je numerički potvrđena izjava D. Klepca da u hrastovini od 100. godine pa nadalje prirašćuje samo kvaliteta".

Razmatrajući pak Levakovićevu funkciju rastenja stabla: $Y = a/((1 + b/x^d))^c$, Kovačić zaključuje kako se rast prsnog promjera "teoretski proteže u beskonačnost", no stvarnost pokazuje da se rast promjera primjerice, stabla hrasta zaustavlja s granicom fizičke starosti stabala. Parametar (a) u jednadžbi rastenja predstavlja granicu rasta promatranog obilježja, parametar (b) je regresijski koeficijent koji pokazuje brzinu promjene rasta. Koeficijenti (c) i (d) su neimenovani brojevi, a Levaković sluti da su korektiv parametara (a) i (b).

Analizom i potrkrepom eksperimentalnih rezultata rasta i prirasta stabla Levakovićeve funkcije rastenja Kovačić jednako zaključuje da je sili rastenja u debljinu i visinu (S_1) suprostavljena sila-otpora rastu (S_2).

Za rast stabla u visinu i debljinu Kovačić navodi kulminaciju tečajnog visinskog i debljinskog prirasta (u točki I infleksije S krivulje rasta) i točku poprečnog dobnog prirasta (u točki K, diralištu tangente na S krivulju rasta). Tečajni prirast jednak je poprečnom u točki rasta, kad ovaj posljednji kulminira. Autor razmatra debljinski rast i prirast "srednjeg sastojinskog stabla" određene vrste drveća i na određenom bonitetu staništa a sa ciljem numeričkog bonitiranja sastojina.

Bezak, 2004 pak rast i prirast stabla u sastojini promatra kao kvaziperiodično gibanje te pokazuje kako prirasti sastojinske debljinske i visinske strukture imaju različit period maksimalnih oscilacija. Rast i prirast stabla i šume iskazuje se diferencijalnim jednadžbama prigušenih i prisilnih gibanja. Prigušeno gibanje očituje se u debljinskom rastu stabla, prigušeno i prisilno gibanje u visinskom rastu stabla. Prigušenom gibanju debljinskog rasta imanentna je "unutrašnja struktura stabla uzrokovana energijom kao ekvivalentu umnoška koeficijenta pulsacija (ω_p) i konstante fine strukture (α), $\alpha = 1/137$, a na koje djeluje sila otpora (k). Visinski rast ima karakteristike prigušenog (ω_{ph}) i prisilnog gibanja, to jest slobodna gibanja remeti i neka "vanjska sila (f_t)".

Razmatrajući "proporcije" stabla u šumi Bezak navodi: " Svako stablo u šumi i na svakom staništu ima svoju matematičku i mehaničku strukturu, atraktor kojem teži. Atraktor je dio faznog pomaka (ω) kojemu svaka točka koja je započela gibanje blizu njega, sve više se približava. Kako prolazi vrijeme bliska područja stežu se prema stablu".

Konačno, kao brzinu promjene periodičkog gibanja (brzinu promjene brzine periodičkih oscilacija, titraja) rasta i prirasta šume u dvama bliskim trenucima (t), Bezak predstavlja općim formulama, kao (ψ), što je druga derivacija puta (s) po vremnu (t):

$\psi_d = A\, e^{-kt} \sin(\omega_{pd}\, t - \varphi)$, rast debljinske strukture,

$\psi_h = A\, e^{-kt} \sin(\omega_{ph}\, t - \varphi) - A \sin(\alpha^2 t)$, za rast visinske strukture.

c) Odabiranje modela rasta stabla po pravilu zlatnog reza i Fibonaccijevog niza

Za razmatranje modela rasta stabla u šumi po pravilu zlatnog reza i Fibonccijevog niza, nezavisno o bonitetu i distribuciji prsnih promjera, uzimajući u obzir naslućeni trend rasta stabla u debljinu (do beskonačnosti) i prigušeni trend rasta stabla u visinu, prikazat će se debljinski rast linearnom funkcijom (pravac), a visinski rast funkcijom drugog stupnja (parabola), dakle matematičkim funkcijama u kojima se ne uvažava periodičko gibanje.

$d = a + b\,t$, za rast u debljinu,

$h = a + b\,t + c\,t^2$, za rast u visinu,

d – prsni promjer (cm), h – visina (m), t – vrijeme (godina) a, b, c – konstante funkcije.

Prirast stabla (brzina promjene debljinskog rasta) u debljinu tretirat će se kao prva derivacija linearne funkcije, što znači da je debljinski prirast jednolik i jednak redukcijskom koeficijentu (b), a druga derivacija linearne funkcije (kao brzina promjene brzine rasta) bit će $k = 0$.

Kao mjerna jedinca za debljinski rast primjenjuje se stoti dio 1m, to jest 1 cm. Mjerna jedinica je dakle jedinični razlomak (1/100).

Modeliranje rasta u debljinu linearnom funkcijom pretpostavlja da je pri debljinskom rastu unutarnja sila rasta harmoničnog gibanja, jer sila otpora rastu (k), kao komponenti prigušenih gibanja teži prema nuli ($k \to 0$), a prisilno gibanje uzrokovano je vanjskim utjecajima, primjerice promjeni širine i dužine krošnje pod utjecajem elektromagnetskog zračenja (svijetlosti, topline). Dakle, kod debljinskog rasta, koeficijent otpora rastu $k = 0$. Rast stabla u debljinu očitava se kao rast linearne funkcije rasta u vremenu, odvija se jednoliko po pravilu zlatnog reza (ϕ = 1,618...) i Fibonaccijevog niza, no u tome se ne očituje prigušeno gibanje (otpor rastu) već je uvjetovano unutarnjom strukturom stabla.

Prirast stabla u visinu (brzina visinskog rasta) tretirat će se kao prva derivacija funkcije drugog reda (parabole), imat će oblik linearne funkcije, a druga derivacija kvadratne funkcije (kao brzina visinskog prirasta) bit će konstanta (2 c).

Modeliranje pretpostavlja da pri visinskom rastu stabla, osim sile rasta postoje i sile otpora rastu (prigušene sile) koje su imanentne svakom stablu, te imaju otpor rastu $k = 2\,c$.

Oscilacije u visinskom rastu svake vrste drveća tijekom životne dobi stabla uzrokovane su vanjskim, prisilnim silama.

Očitovanje prigušenih gibanja visinskog i volumnog rasta stabla po Bezaku može se tretirati, primjerice, iskazom koeficijenta pulsacije (ω_{ph}) i koeficijenta otpora rastu (k). Budući da je koeficijent pulsacije izraz periodičnog gibanja mase (m) u vremenu (t), s mogućnošću titraja proizvoljno male mase (m), proizvoljno visoke frekvencije u proizvoljno kratkom vremenu, to će njegovo "prigušenje" izraženo koeficijentom otpora (k) također "oscilirati" sukladno koeficijentu pulsacije (ω_{ph}).

Iako i kod debljinskog rasta postoji u fiziološkom genetskom kodu sekvenca izražena koeficijentom pulsacije (ω_{pd}), koeficijent otpora (k) jednak je nuli, te se ne očituje kao prigušeno gibanje. Njegovo periodičko gibanje rasta očituje se posredno, putem visinskog prigušenog gibanja rasta, "prigušenim" volumnim rastom stabla.

Prisilna gibanja, kao očita stvarnost djelovanja na debljinski, visinski i volumni rast, uzrokovana primjerice elektomagnetskim zračenjem, gravitacijom, strujanjem zraka, količinom vode i minerala, bit će modelom relativizirana.

Volumni rast i razvoj stabla, kao prostorno-vremenska funkcija rasta stabla u debljinu i visinu, reducirat će se samo na temeljno načelo svojstveno živom biću, uzrokovano njegovom unutarnjom strukturom. Zelić, 2000, ovo temeljno načelo rasta naziva "koeficijentom unutarnje strukture rasta" (r), koji se kreće između vrijednosti 1 i 4.

Prisilna gibanja u rastu stabla su rezultat okolišnih faktora i ne leže u temelju unutarnje strukture rasta. Eksperimentalno se može utvrditi neke od najvažnijih parametara prisilnih sila rasta (vrsta, bonitet staništa, klimatski faktori, svijetlo, toplina, distribucija prsnih promjera stabala u određenoj dobi sastojine) koji se mogu uvrstiti u "kompleksnu jednadžbu" rasta i razvoja.

Za rast volumena stabla, kao "sintetskog" pokazatelja debljinskog i visinskog rasta izraženog jezikom matematike može se reći da je volumen unija skupova debljinskog rasta bez prigušenih gibanja i visinskog rasta s prigušenim gibanjima. Volumni rast i prirast poprima dakle karakteristike jednog od skupova, prigušenog visinskog rasta, te ima također prigušeni rast i prirast. Od drugog skupa vrijednosti rasta u debljinu poprima karakteristike omjera rasta, te kao unija skupova u prostor-vremenu konstantno uspostavlja životnu ravnotežu.

Za određivanje funkcija debljinskog i visinskog rasta za model pravila zlatnog reza ili Fibonaccijevog niza korištene su prirasno-prihodne tablice Bezak *et all.*, 1989, EGT-II-D-11 (šuma bukve sa šašem). Podaci u prirasno-prihodnim tablicama odnose se na "srednje sastojinsko stablo glavne sastojine".

Za razvijanje modela debljinskog, visinskog i volumnog rasta i prirasta stabla u šumi, po pravilu zlatnog reza, odnosno Fibonaccijevog niza, nije korišteno tzv. "srednje sastojinsko stablo" ni klasifikacija stabala po Kraftu, odnosno tzv. atraktor srednje fenotipskog modela oblika krošanaja stabala (Dubravac, 2002) nego je pretpstavljeno da sva stabla određene dobi rastu pod jednakim uvjetima na površini 1 hektar, međusobno udaljeni po trokutnom rasporedu (Pranjić i Lukić, 1997).

d) Primjenjene matematičke funkcije

Korištenjem podataka iz prirasno-prihodnih tablica Bezak *et all.*, 1989, EGT-II-D-11 (šuma bukve sa šašem) izračunate su sljedeće funkcije debljinskog i visinskog rasta:

$d = -0,2682 + 0,3759\,t,$

$h = 2,1382 + 0,4316\,t - 0,0014\,t^2$

Iz istih tablica izjednačen je koeficijent širine krošnje (b) po dobi (t) funkcijom:

$b = 22,3364 - 0,0363\,t, \quad D = d \cdot \frac{b}{100}$

Oblični broj (f) izračunat je iz poznatih veličina tarifnog niza (Zelić, 2005) po formuli Špiranca:

$v = a * d^{b} * h^{c},$

$f = 0,4001 + 0,002\,d + 0,00001361\,d^2,$

Temeljnica stabla po dobi izračunata je po formuli:

$g = d^2\,\pi/4,$

Volumen stabla po dobi izračunat je po formuli:

$v = d^2\,\pi/4 * h * f,$

Broj stabala (N) trokutnog rasporeda na površini 1 ha izračunat je po formuli:

$N = 1000 / b^2 * 0,866,$

Temeljnica po hektaru (G) izračunata je kao umnožak broja stabala po ha (N) s temeljnicom jednog stabala određene dobi (g) po formuli:

$G = N * g,$

Volumen po hektaru (V) izračunat je kao umnožak broja stabala po ha (N) s temeljnicom jednog stabala određene dobi (v) po formuli:

$V = N * v,$

REZULTATI – Results

Primjenom odabranog modela i matematičkih funkcija po opisanoj metodi rada izračunavanjem su dobiveni rezultati prikazani u Tablici 1.

Tablica 1. Biometrijski parametri debljinskog, visinskog i volumnog rasta stabla bukve u šumi
Table 1 Biometrical parameters of breast height diameter, height growth, volume growth of beech in the forest

Starost *Age* t godina *year*	Prsni promjer *Breast diameter* d cm	Visina *Heigh* h m	Oblični broj *Form factor* f	Koef. šir. krošnje *Crown width coeff.* b	Širina krošnje *Crown width* D m	Temeljnica *Basal area* g m^2	Volum. *Volume* v m^3	Broj stabala *No of trees* N	Temelj. po ha *Basal area per ha* G m^2	Volum. po ha *Volume per ha* V m^3
1	2	3	4	5	6	7	8	5	10	11
5	1,61	4,26	0,443	22,28	0,359	0,00020	0,00030	89636	18,268	34,518
10	3,49	6,31	0,447	22,21	0,775	0,00096	0,00270	19215	18,381	51,908
15	5,73	8,30	0,451	22,14	1,189	0,00226	0,00848	8169	18,494	69,242
20	7,25	10,21	0,455	22,07	1,600	0,00413	0,01918	4510	18,609	86,510
25	9,13	12,05	0,459	22,01	2,009	0,00654	0,03623	2862	18,724	103,703
30	11,01	13,83	0,464	21,94	2,415	0,00951	0,06100	1980	18,841	120,812
35	12,89	15,53	0,468	21,87	2,818	0,01304	0,09479	1454	18,959	137,827
40	14,77	17,16	0,473	21,80	3,219	0,01712	0,13886	1114	19,078	154,738
45	16,65	18,73	0,477	21,73	3,618	0,02175	0,19438	882	19,198	171,532
50	18,53	20,22	0,482	21,66	4,014	0,02694	0,26248	717	19,319	188,196
55	20,41	21,64	0,487	21,60	4,407	0,03269	0,34422	595	19,441	204,717
60	22,29	22,99	0,491	21,53	4,798	0,03899	0,44056	502	19,564	221,079
65	24,17	24,28	0,496	21,46	5,186	0,04584	0,55241	430	19,689	237,266
70	26,04	25,49	0,501	21,39	5,551	0,05325	0,68059	372	19,815	253,260

75	27,92	26,63	0,507	21,32	5,954	0,06121	0,82583	326	19,942	269,042
80	29,80	27,71	0,512	21,25	6,335	0,06973	0,98875	288	20,070	284,593
85	31,68	28,71	0,517	21,19	6,713	0,07880	1,16990	256	20,200	299,890
90	33,56	29,64	0,523	21,12	7,088	0,08843	1,36971	230	20,330	314,910
95	35,44	30,51	0,528	21,05	7,461	0,09861	1,58850	208	20,462	329,631
100	37,32	31,30	0,534	20,98	7,831	0,10934	1,82647	188	20,596	344,026
105	39,20	32,02	0,539	20,91	8,198	0,12063	2,08369	172	20,730	350,068
110	41,08	32,67	0,545	20,85	8,563	0,13248	2,36011	158	20,866	371,728
115	42,96	33,26	0,551	20,78	8,926	0,14448	2,65553	145	21,003	384,977
120	44,84	33,77	0,557	20,71	9,286	0,15783	2,96960	134	21,142	397,783
125	46,72	33,77	0,563	20,64	9,643	0,17134	3,30182	124	21,282	410,112
130	48,60	34,21	0,569	20,57	9,998	0,18540	3,65152	116	21,423	421,930
135	50,48	34,89	0,576	20,50	10,350	0,20002	4,01785	108	21,566	433,199
140	52,36	35,12	0,582	20,44	10,700	0,21520	4,39978	101	21,710	443,880
145	54,24	35,29	0,589	20,37	11,047	0,23092	4,79608	95	21,856	453,935
150	56,12	35,38	0,595	20,30	11,391	0,24720	5,20534	89	22,003	463,319

a) Rast stabla u debljinu po pravilu zalatnog reza i Fibonaccijevog niza razvojem jednakokutne spirale

Za dokaz postojanja pravila zlatnog reza i Fibonaccijevog niza u rastu stabla u debljinu tijekom životne dobi razmatraju se podaci u stupcima 1 i 2, Tablice 1., uz primjenu linearne jednadžbe, $d = -0,2682 + 0,3759\,t$, kojom je moguće iskazati vrijednosti prsnog promjera stabla za cijelobrojne vrijednosti godina i cijelobrojne vrijednosti Fibonaccijevog niza.

Rezultati su prikazani u Tablici 2.

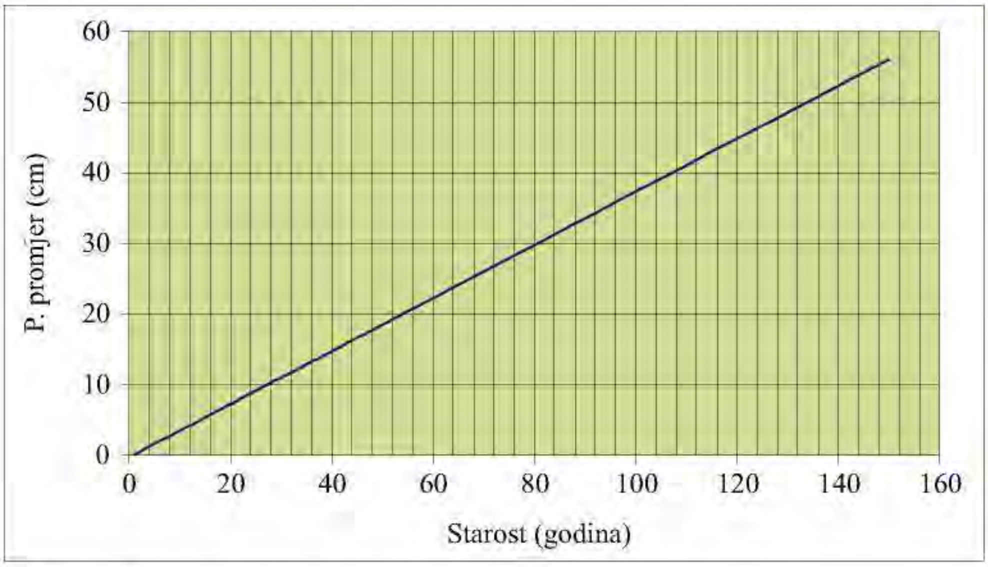
Tablica 2. Rast prsnih promjera stabla bukve u debljinu po pravilu zlatnog reza i Fibonaccijevog niza
Table 2 Growth of beech breast diameters in thickness according to the golden section rule and the Fibonacci series

Starost stabla (godina) *Tree age (year)*	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Prsni promjer (cm) *Breast diameter*	0,86	1,61	2,74	4,62	7,63	12,51	20,41	33,19	53,86
Fibonaccijev niz *Fibonacci series*	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Zlatni rez (P. promjer) *Golden section (bd)*	1,61/0,86 = 1,872	2,74/1,61 = 1,702	4,62/2,74 = 1,686	7,63/4,62 = 1,652	12,51/7,63 = 1,639	20,41/12,51 = 1,631	33,19/20,41 = 1,626	53,26/33,19 = 1,623	
Zlatni rez (Fibonacci – niz) *Golden section (Fibonacci series)*	5/3 = 1,667	8/5 = 1,600	13/8 = 1,625	21/13 = 1,615	34/21 = 1,619	55/34 = 1,618	89/55 = 1,618	144/89 = 1,618	
Zlatni rez (ϕ = 1,618...) *Golden section*	(ϕ = 1,618...)								

Kako je vidljivo u Tablici 2., zlatni rez (ϕ) teži k vrijednosti 1,618..., analogno i Fibonaccijev niz nakon para članova 34/21. Omjer parova prsnih promjera 53,86/33,19 = 1,623 poslije 89 godina rasta doseže pribižno točan omjer zlatnog reza odnosno pravila Fibonaccijevog niza. Zakonitost rasta stabla bukve u debljinu pokazuje da bi točan omjer bio u dobi fizičke starosti stabla (oko 377 godina).

Ako se linearna funkcija rasta stabla bukve u šumi prikaže geometrijski dobit će se razvoj debljinskog rasta adekvatan razvoju jednakokutne spirale unutar vrtložnog pravokutnika, kako to pokazuju Slika 2. i Grafikon 1.

Grafikon 1., linearne jednadžbe rasta stabla u debljinu, $d = -0,2682 + 0,3759\,t$, ima iste karakteristike kao i vrtložni pravokutnik, odnosno jednakokutna spirala konstuirana na Slici 2.



Grafikon 1. Linearni trend rasta stabla u debljinu po dobi (d = - 0,2682 + 0,3759 t), po pravilu zlatnog reza

Graph 1 Linear trend of growth of tree in thickness by age (d = - 0,2682 + 0,3759 t) along the rule of gold section

Dijagonala AB vrtložnog pravokutnika (Slika 2.) siječe pravokutnik BCDE u točki F koja je točka zlatnog reza. Ista dijagonala siječe pravokutnik BDFG u točki J, koja ja točka zlatnog reza tako "ad finitum", jednakokutnom spiralom do jedne točke u kojoj se sijeku dijagonale svih "zlatnih pravokutnika".

Povezujući lukove četvrtina kružnice, promjera jednakih stranicama "zlatnih kvadrata" unutar "zlatnih pravokutnika", konstruira se jednakokutna spirala, slična onoj na školjki iz roda *Nautilus*.

Analizom linearne funkcije debljinskog rasta stabla bukve $d = -0{,}2682 + 0{,}3759\,t$ potvrđuje se postojanje pravila zlatnog reza i Fibonaccijevog niza.

Koeficijent $b = 0{,}382...$ (tangens kuta nagiba dijagonale pravokutnika na Slici 2.) jednak je vrijednosti dužine $EC = a = 1/\phi^2 = 0{,}382$, ako je $AC = c = 1{,}000$, $a = 1/\phi = AE = 0{,}618$.

Ako se regresijski koeficijent ($b = 0{,}3759$) linearne funkcije rasta prsnih promjera $d = -0{,}2682 + 0{,}3759\,t$ prikaže kao brzina rasta, to jest kao godišnji prirast, $i_d = \Delta d / \Delta t$ ili trigonometrijski, kao tangens kuta što ga pravac zatvara s osi ($x = t$), tada je $tg\,\alpha = 0{,}3759$. Godišnji prirast je dakle 0,3759 cm. Za 100 godina prsni promjer trebao bi biti 37,59 cm, no on je reduciran regresijskom konstantom $\alpha = -0{,}2682$, te iznosi 37,32 cm.

Tijekom životne dobi prosječna brzina debljinskog rasta stabla (debljinski prirast) "teži" uvjetno nazvanoj vrijednosti, b_{modul}.

Na rast stabla u debljinu, osim sile rasta, utječu vanjske, prisilne sile koje mijenjaju brzinu i smjer rasta. Za svaku vrstu drveća postoji karakterističan "modul rasta", koji se kao veličina mijenja pod vanjskim utjecajima. "Modul rasta" je zapravo regresijski koeficijent linearne funkcije (b), koji mjenja smjer i brzinu za svaku vrstu drveća uzrakovanu vanjskim utjecajima, no promjene ne utječu na proporcije rasta stabla u vremenu. Omjer zlatnog reza, koji geometrijski slijedi razvoj jednakokutne spirale ostaje isti, iako su veličine spirala različite za vrste drveća pod utjecajem vanjskih faktora rasta.

Ako se, primjerice, Š p i r a n č e v e (1975), prirasnoprihodne tablice rasta prsnog promjera po dobi za bukvu od I. do IV. boniteta izravnaju linearnim jednadžbama oblika: $d = a + b\,t$,

$d_I = -0{,}2046 + 0{,}4055\,t$,
$d_{II} = -1{,}3002 + 0{,}3639\,t$,
$d_{III} = -0{,}3734 + 0{,}3105\,t$,
$d_{IV} = 0{,}1264 + 0{,}2744\,t$,

tada je za I- bonitet $b_{modul} = 0{,}4055$,
za za II- bonitet $b_{modul} = 0{,}3639$,
za III- bonitet $b_{modul} = 0{,}3105$,
za IV- bonitet $b_{modul} = 0{,}2744$.

Lošiji bonitet pokazuje manji b_{modul}, a on je pokazatelj vanjskih, prisilnih sila koje djeluju na debljinski rast stabla.

Ako se usporedi rast prsnog promjera bukve za EGT-II-D-11 (bukva sa šašem, B e z a k *et all*,1989) sa Š p i r a n č e v i m bonitetima za bukvu može se zaključiti da odgovara I/II bonitetu.

(Špiranec je izravnavao rast prsnog promjera funkcijom parabole, primjerice za bukva II. bonitet, $d = -5{,}8733 + 0{,}5027\,t - 0{,}0008\,t^2$).

Rast prsnog promjera, po pravilu zlatnog reza hrasta lužnjaka na prvom bonitetu za srednje (kodominantno) sastojinsko stablo (S_{III}), može se pokazati linearnom funkcijom: $d = - 2,632 + 0,5158$.

Rezultati su prikazani u Tablici 3.

(Podaci su korišteni iz Prirasno-prihodne tablice za hrast lužnjak (*Quercus robur* L., Bezak, 2004).

Tablica 3. Rast prsnih promjera stabla hrasta lužnjaka na I. bonitetu u debljinu po pravilu zlatnog reza i Fibonaccijevog niza
Table 3 Growth of breast diameters of common oak in thickness by the rules of golden section and the Fibonacci series

Starost stabla (godina) *Tree age (year)*	21	34	55	89	144	233	377	600
Prsni promjer (cm) *Breast diameter*	8,20	14,91	25,74	43,27	71,64	117,55	191,83	306,85
Fibonaccijev niz *Fibonacci series*	21	34	55	89	144	233	377	600
Zlatni rez (P. promjer) *Golden section (bd)*	14,91/8,20 = 1,818	25,74/14,91 = 1,726	43,27/25,74 = 1,681	71,64/43,27 = 1,656	117,55/71,64 = 1,641	191,83/117,55 =1,632	306,85/191,83 = 1,600	
Zlatni rez (Fibonacci – niz) *Golden section (Fibonacci series)*	34/21 = 1,619	55/34 = 1,618	89/55 = 1,618	144/89 = 1,618	233/144 = 1,618	377/233 =1,618	600/377 = 1,618	
Zlatni rez *Golden section* (ϕ = 1,618)	(ϕ = 1,618)							

Kako je vidljivo iz Tablice 3., rast prsnih promjera hrasta lužnjaka doseže omjer zlatnog reza, odnosno Fibonaccijevog niza u odmakloj dobi. To je i prirodna granica njegove fizičke starosti.

Koeficijent smjera (b = 0,5158) u jednadžbi rasta hrasta lužnjaka na I. bonitetu također predstavlja brzinu rasta prsnog promjera ili debljinski prirast (i_d).

Bezak, 2004 iskazuje prosječni debljinski prirast hrasta lužnjaka s korom, i_d = 5,197 mm, od dvadesetpete do stopedesetpete godine starosti stabla, a debljinski prirast je gotovo istovjetan između šestdesetpete i stopedesetpete godine, 5,100 mm.

Potvrđuje se dakle "tendencija" linearnog rasta stabla u debljinu. I Kovačić, (1993) navodi kako Klepčeve (1976) prirasno-prihodne tablice za hrast lužnjak pokazuju "u 150. godini debljinski prirast svega 10 % manji od linearnog trenda rasta...". Isti autor također navodi: "izravnate krivulje rasta srednjeg promjera za Špirančev (1975) I. i II. bonitet hrasta lužnjaka međusobno su ekvidistantne, čak i u tristotoj godini..."

b) Rast stabla u visinu u sastojinskim uvjetima

Za matematički model visinskog rasta stabla u visinu bilo koje vrste drveća u stvarnim sastojinskim uvjetima izabrana je funkcija parabole oblika:

$h = a + b\,t + c\,t^2$.

Funkcija parabole dobro pokazuje brzinu i smjer sile rasta stabla u visinu iskazanu koeficjentom (+b), koju ometa (prigušuje) sila otpora rastu, iskazana koeficijentom (- c). Jednu i drugu silu rasta korigira regresijska konstanta ($\pm a$).

U stvarnim uvjetima rasta stabla u visinu na sile unutarnjeg rasta svojstvene vrsti drveća utječu i vanjske sile (okolišni uvjeti, bonitet staništa, kretanje vjetra, svjetlost, toplina, elektromagnetska zračenja...).

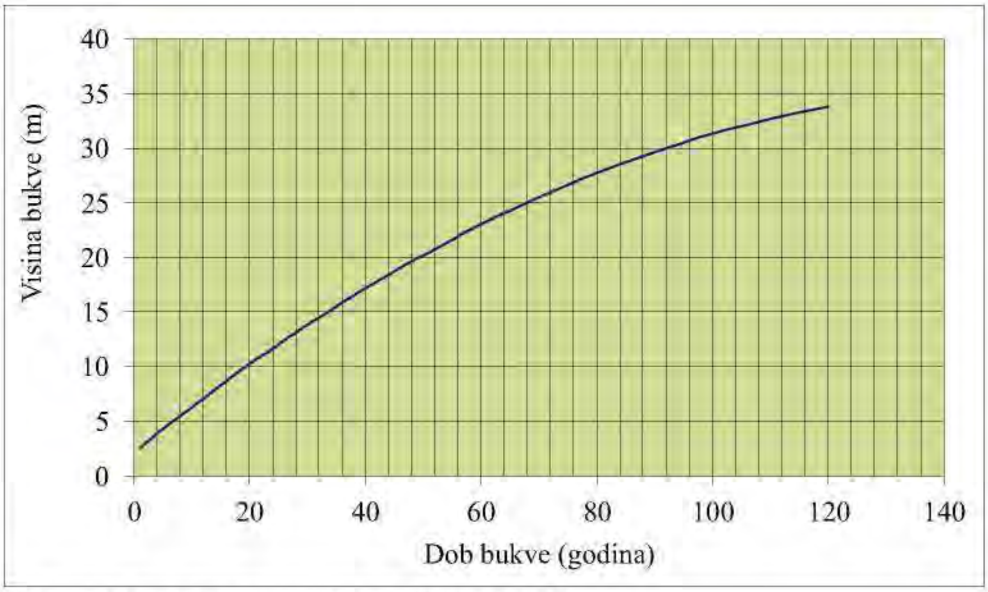
Iako funkcija parabole iskazana vrijednostima svih triju koeficijenata pokazuje u konkretnom slučaju sintezu djelovanja svih sila rasta, prigušenih i vanjskih sila, ipak parametrima b i c, pokazuje se smjer i brzinu rasta.

Rast stabla bukve u visinu (Tab. 1) prikazan je funkcijom drugog stupnja, parabolom,

$h = 2,1382 + 0,4316\,t - 0,0014\,t^2$, kako pokazuje Grafikon 2.

Kako je vidljivo na Grafikonu 2. brzina rasta stabla ili prirast smanjuje se povećanjem starosti. To smanjenje se matematički očituje koeficijentom (- c) u jednažbi parabole.

U gornjoj funkciji koeficijent c = - 0,0014 regulira brzinu rasta stabla u visinu. Brzina rasta ili prirast može se izraziti kao prva derivacija funkcije parabole, a promjena brzine rasta kao druga derivacija funkcije rasta u



Grafikon 2. Rast stabla u visinu iskazan funkcijom parabole
Graph 2 Growth of trees in height expressed with the parabola function

visinu. Koeficijent c ima negativnu vrijednost u funkciji rasta stabla u visinu, kao koeficijent otpora rastu.

Derivacijom gornje funkcije parabole dobiva se linearna funkcija: $h' = 0{,}4316 - 0{,}0028\ t$.

Regresijski koeficijent, b = - 0,0028, u gornjoj jednadžbi je negativan, što znači da će se povećanjem starosti (t) brzina rasta u visinu ili visinski prirast smanjivati.

Opadanje brzine rasta (prirast) u visinu povećanjem starosti stabla prikazuje Tablici 4.

Tablica 4. Linearni trend pada visinskog prirasta (m) povećanjem dobi (godina) bukve
Table 4 Linear decrease of height increment (m) per age of beech

Starost *Age*	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Prirast *Increment*	0,404	0,376	0,348	0,320	0,292	0,264	0,236	0,208	0,180	0,152	0,124	0,096

Na rast stabla bukve u visinu, osim sile rasta, utječu prigušene sile rasta koje tijekom životne dobi stabla linearno zaustavljaju prirast stabla u visinu.

Zbog djelovanja dviju suprotnih sila, sile rasta i sile otpora rastu, u procesu rasta stabla u visinu nije ugrađeno pravilo zlatnog reza ili Fibonaccijevog niza.

Š p i r a n e c , 1975 je također za izjednačavanje rasta u visinu po dobi srednjeg stabla stabla bukve na bonitetima I. do IV. koristio jednadžbu parabole. Tako se primjerice jednadžba za rast stabla bukve u visinu na II. bonitetu može prikazati jednadžbom:

$h = -1{,}3215 + 0{,}5015\ t - 0{,}0018\ t^2$.

Budući da je u gornjoj jednadžbi koeficijent ($-c$) regulator brzine rasta stabla u visinu, odnosno prirasta, kao unutarnjeg svojstva stabla (prigušena sila rasta ili sila otpora rastu) moguće je dokazati da je u korelaciji s unutarnjom silom rasta stabla u visinu. To znači, ako je veća sila rasta, veća je i sila otpora rastu. Pravilo potvrđuje rast stabala bukve u visinu po dobi i bonitetima iz (I. – IV.) Š p i r a n č e v i h (1975), prirasno-prihodnih tablica. Tako je, primjerice, sila otpora rastu

$c = -0{,}0021$ na I. bonitetu,

$c = -0{,}0018$ na II. bonitetu,

$c = -0{,}0016$ na III. bonitetu,

$c = -0{,}0014$ na IV. bonitetu.

Proporcija sile rasta i sile otpora rastu ostaje ista bez obzira na bonitet staništa i ostale okolišne uvjete, kao vanjske, prisilne sile rasta.

Ako bi se prirast stabla u visinu matematički izrazio kao prva derivacija funkcije parabole, tada bi u linearnom trendu pada rasta stabla u visinu gornje vrijednosti koeficijenta (c) poprimile dvostruke vrijednosti ($h' = 0{,}5015 - 2\ (0{,}0018\ t)$). Upravo sila otpora rastu stabla u visinu zaustavlja u određenoj dobi svaki rast, stablo dosiže limit moguće visine na staništu određenog boniteta. Istovjetna ograničenja imaju stabla u sastojini po visinskoj strukturi rasta (glavna, podstojna, pomoćna etaža, Kraftova klasifikacija stabala).

Zlatni omjer između visine stabla i neke točke na stablu (deblu) uspostavlja se tijekom životne dobi, vjerojatno omjerom dužine i širine krošnje stabla i dužine i promjera debla, dužine i promjera korjena.

Brži rast (prirast) stabla u visinu u određenoj životnoj dobi pripada njegovoj unutarnjoj strukturi, jer omjerom širine i dužine krošnje, korjenovog sustava, promjera i duljine debla stablo uravnotežuje svoju unutarnju strukturu rasta, koja teži nekoj idealnoj točki proporcije. Kovačić, (1993) kulminaciju visinskog rasta (prirasta) nalazi u točki (K) kao najvećem omjeru $\Delta h / \Delta t$ na S –visinskoj krivulji rasta Levakovićeve funkcije rastenja.

Iako postoji uska veza između prsnog promjera i visine stabla te je u određenoj dobi stabla promjer (cm) jednak visini (m), nakon toga prsni promjer povećanjem dobi stabla ima linearni trend rasta (cm), a trend rasta u visinu (m) se smanjuje. Brojčani omjer zlatnog reza kod rasta stabla u visinu se povećanjem starosti gubi jer ga "prigušuje" sila otpora rastu u visinu. Raskorak, između brojčanog iskaza rasta prsnog promjera stabla (cm) po pravilu zlatnog reza i Fibonaccijevog niza i visine stabla (m) koji ne sljedi ta pravila, postaje sve veći.

Bezak, 2004 navodi da je rast širine krošanja u odnosu na prsni promjer linearan, te ga za srednje sastojinsko stablo izražava funkcijom $D_S = 1{,}3336 + 0{,}1668\ d_s$, a za odnos dužine debla i dužine krošnje navodi se omjer 0,5331 : 0,4669, što ga određuje amplituda visinskog rasta $A_h = 8{,}759$ i feigenvrijednost (4,669).

RASPRAVA I ZAKLJUČCI – Discusion and conclusions

Utvrđeno je da rast prsnog promjera stabla tijekom vremena slijedi odnose parova Fibonaccijevog niza, te u dobi koja je bliska fizičkoj starosti stabla postiže omjer zlatnog reza $\phi = 1{,}618...$

Ako se promjer krošnje (Tablica 1.) stabla bukve (D) izrazi kao funkcija prsnog promjera (d) linearnom jednadžbom, $D = 0{,}2079 + 20{,}2456$ d, tada će parovi promjera krošnje određene starosti slijediti pravilo Fibonaccijevog niza i pokazivati omjer zlatnog reza. Primjerice, $\phi = (D_{144} / D_{89}) = (11{,}15 / 6{,}93) = 1{,}609...$

Temeljnica ili kružna ploha stabla je izvedenica iz prsnog promjera, kao kvadrat polumjera i broja π te je s povećanjem starosti stabla zadržan omjer zlatnog reza ili Fibonaccijevog niza. Tako se, primjerice, pravilo zlatnog reza za stablo starosti 89 i 55 godina može izračunati po formuli,

$$\phi = (g_{89} / g_{55})^{1/2} = (0{,}08646 / 0{,}03269)^{1/2} = 1{,}626...$$

Isto pravilo potvrđuje se se usporedbom opsega stabla, $\phi = (o_{89} / o_{55}) = (104{,}21 / 64{,}08) = 1{,}626...$

Međutim, pravilo zlatnog reza ili Fibonaccijevog niza gubi se usporedbom volumena stabla za parove volumena iste starosti kao u gornjem primjeru.

Rast stabla u debljinu po pravilu zlatnog reza i Fibonacijevog niza definiran je kod sastojinskog rasta, rasta stabala u šumi. Za sastojinski model primijenjen je trokutni raspored stabala, kojim se omogućava najveća zastrtost tla u bilo kojoj dobi sastojine. Prirodne sastojine pak teže sa starošću zakonitoj distribuciji prsnih promjera, tzv. beta – distribuciji (Zelić, 2005).

Modelna sastojina, u kojoj su za istu dob jednaki prsni promjeri, visne stabala i širine krošnje, upućuje na minimalan prsni promjer stabla, temeljnicu i volumen po hektaru (Tablica 1.) glavne sastojine EGT-II-D-11 (šuma bukve sa šašem). Tako primjerice glavna satojina bukve poslije prorede u osamdesetoj godini ne bi trebala biti ispod 29,80 cm prsnog promjera srednjeg sastojinskog stabala, temeljnice 20,07 m^2 i volumena 284,59 m^3/ha.

Rast stabla u debljinu može se geometrijski prikazati kao rast jednakokutne spirale. Jednakokutne spirale mogu biti različite veličine s obzirom na veličine b - modula, no omjer stranica zlatnog reza

(a = 0,618, b = 0,382) pravokutnika ostaje isti.

Pomoću b - modula moguće je numerički iskazati bonitete za vrste drveća ili odrediti ekološko-gospodarski tipove šuma.

Za različite vrste drveća u različitim okolišnim uvjetima vrijednost koeficijenta (b) izražava se svojstvenim modulom, primjerice vezano za određene ekološko-gospodrske tipove šuma i bonitete staništa. Za EGT-II-D-11 (šuma bukve sa šašem),

$b_{modul} = 0{,}3759$,

a za za hrast lužnjak na I. bonitetu,

$b_{modul} = 0{,}5158$.

Veća vrijednost koeficijenta b – modula pokazuje veću brzinu rasta stabla u debljinu.

Rast stabla u visinu, uvjetovan unutarnjom strukturom, osim sile rasta i silom otpora rastu, nema veličine visine u paravima Fibonaccijevog niza, sukladno omjeru zlatnog reza. Isti je slučaj i s volumnim rastom, kao sintezom rasta stabla u debljinu i visinu.

Omjer zlatnog reza ili nekog drugog "posebnog broja" volumnog rasta, kao točke ravnoteže rasta i razvoja stabla (nadzemnog i podzemnog dijela) idealnih proporcija, treba istražiti u drugim veličinama atraktora stabla.

LITERATURA – References

Bezak, K. *et all.*, 1989: Uputstva za izradu karte ekološko-gospodarskih tipova brdskog i planinskog područja (II9 SR Hrvatske, Institut za šumarska istraživanja, Radovi broj 79, Jastrebarsko str. 1–119.

Bezak, K., 2004: Kompleksne jednadžbe rasta i razvoja šuma, Hrvatske šume, d.o.o., interno.

Bentley, P. J., 2004: Digitalna biologija, kako priroda preoblikuje našu tehnologiju, Izvori, Zagreb.

Dubravac, T., 2002: Zakonitosti razvoja strukture krošanja hrasta lužnjaka i običnog graba ovisno o promjeru i dobi u zajednici "*Carpino betuli-Quercetum roboris* Anić et Rauš, 1969", Disertacija, pp: 1–196, Zagreb.

Levaković, A., 1938: Fiziološko-dinamički osnovi funkcija rastenja, Glasnik za šumske, pokuse, Šumarski fakultet Zagreb.

Kovačić, Đ., 1993: Zakon rasta i numeričko bonitiranje šume, Glasnik za šumske pokuse 29, Šumarski fakultet Zagreb.

Pranjić, A., N. Lukić, 1997: Izmjera šuma, Sveučilište u Zagrebu, Šumarski fakultetet, Zagreb.

Schwaller, R. A., de Lubitz, 2004: Hram u čovjeku, sveta arhitektura i savršeni čovjek, Teledisk, Zagreb.

Špiranec, M., 1975: Prirasno prihodne tablice, Poslovno udruženje šumsko privrednih organizacija, Radovi br. 25, Zagreb, str. 1–109.

Špiranec, V., 2005: Sklad, Sveučilišna knjižnica Zagreb.

Wells, D., 2005: Rječnik zanimljivih i neobičnih brojeva, Sveučilišna knjižara, Zagreb.

Zelić, J., 2000: Prilog raspravi o teoriji rast, prirasta i održivog razvoja, Šumarski list br. 9–10, str. 515 –531.

Zelić, J., 2005: Prilog modeliranju normaliteta regularnih srednjodobnih bukovih sastojina (EGT-II-D-10), Šumarski list, br. 1–2, str. 51–62.

Zlatni rez, geometrija prirode ili prirodna geometrija, omjeri i razmjeri..., www.uazg.hr

*SUMMARY: The analysis of biometric parameters of growth (yield tables) of forest stands of beech EGT-II-D-11 (beech with sedge, Bezak et al, 1989) and pedunculate oak (*Quercus robur *L.), Bezak, 2004, provides a possible answer to the question: "Do trees in a forest grow by the rules of the Golden section and the Fibonacci series?"*

The Golden section or the Divine proportion was discovered in ancient cultures and civilizations. It has always been applied as the ideal proportion in art and construction. It is revealed in the live material world of natural patterns of plant and animal growth and development. Expressed with the number of the decade system, it is as follows: $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2 = 1{,}6180339 \ldots$

Closely related with the Golden section proportion is the Fibonacci series, a set of real numbers whose member in a series equals the sum of two previous ones, e.g. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 144, ...

It was found that growth of forest trees in diameter follows the rules of the Golden section and Fibonacci series; this relates to the growth of breast diameter, basal area, tree circumference and crown width as a linear dependent variable of breast diameter.

The growth of a tree's breast diameter can be expressed with a linear function of the following shape: $d = a + b\,t$*, in which breast diameter is a dependent variable and tree age an independent one. Regression coefficient b shows the rate of tree growth or increment, which is different for particular tree species and environmental conditions in which a tree grows.*

It is expressed as a b-module, which together with the regression constant a represents geometric growth of an equilateral spiral within the so-called square whirl in relation to the golden section sides. During its life, a tree in a stand "tends" towards the average increment (growth speed) expressed with the value of the b-module.

Speed of growth or diameter increment, represented mathematically with a derivation of linear constant, provides the constant b as an expression of har-

monious motion with a positive prefix. The b-module may be used to make a numerical expression of site classes for tree species or determine ecological-management forest types.

The model presupposes that the force of tree growth in diameter is not inhibited by the force of resistance to growth as an internal structure of growth, whereas oscillations in growth (increment) are caused by external forces.

Tree growth in height, represented by a mathematical function of the second degree, does not assume the patterns of the Golden section and the Fibonacci series because the force of growth is inhibited by a suppressed force, the force of resistance to growth. This force increases with ageing of trees and ends with the maximum of tree height, when the force of resistance to height growth equals the force of growth.

The speed of height growth is individual for each tree species and is conditioned by external influences, site class, warmth, light, air circulation, stand density, etc.

The volume of tree growth is the function of growth of breast diameter, height and form factor. It is caused by the internal structure of growth of two opposing forces and by external forces of growth and does not manifest growth according to the rules of the Golden section and the Fibonacci series. The Golden section of tree volume, as an ideal point of balancing the proportions of external tree habitus and underground part (root) should be sought with another methodology.

Key words: the Golden section, the Fibonacci series, growth of tree breast diameter and crown diameter, height and volume growth, growth equation, growth forces, forces of resistance to growth, suppressed and forced motions, equilateral spiral, square whirl.