ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.8 (2025) 23–37
https://doi.org/10.32817/amssd.8.2

Zaprimljen: 19. studenog 2024.
Prihvaćen: 29. siječnja 2025.

Afine geometrije u igri SET

Snježana Braić, Josipa Matotek

Sažetak

Igra **SET** je zanimljiva kartaška igra namijenjena djeci i odraslima. Ta igra, osim što je iznimno zabavna, u sebi sadrži i povezuje čitav niz elemenata iz područja afine geometrije, linearnih prostora i kombinatorike. U ovom radu ćemo pokazati kako se igra **SET** može matematički modelirati afinom geometrijom $AG(4,3)$ u kojoj su točke te geometrije karte, a pravci su tražena rješenja igre. Ako fiksiramo dva svojstva, od četiri koja se u igri promatraju, dobit ćemo karte koje čine Hesseovu konfiguraciju $AG(2,3)$, a rješenja igre su pravci te ravnine.

Ključni pojmovi: igra SET, afina ravnina, afina geometrija

Abstract

The game **SET** is an interesting card game intended for children and adults. This game, besides being extremely fun, contains and connects a whole series of elements from the fields of affine geometry, linear spaces and combinatorics. In this paper, we will show how the game **SET** can be mathematically modeled by the affine geometry $AG(4,3)$ in which the points of this geometry are the maps, and the lines are the required solutions of the game. If we fix two properties, out of the four observed in the game, we will get the maps that form the Hesse configuration $AG(2,3)$, and the solutions of the game are the lines of this plane.

Keywords: game SET, affine plane, affine geometry

1. Uvod

Mnogi praktični zadaci i problemi mogu se matematički modelirati u različitim geometrijama. U proučavanju konačnih i beskonačnih geometrija posebno su zanimljive afine geometrije, a među njima važno mjesto zauzimaju afine ravnine. Poznata Euklidova ravnina primjer je jedne beskonačne afine ravnine nad realnim prostorom. Da bi opisali igru **SET** u modelu afine geometrije, upoznat ćemo se najprije s afinom ravninom i afinom geometrijom općenito, potom ćemo opisati glavne karakteristike igre **SET** i na kraju opisati vezu između pravaca u afinoj ravnini $AG(2,3)$, pravaca u afinoj geometriji $AG(4,3)$ i karata koje predstavljaju rješenja igre **SET**.

2. Afina ravnina

Afine ravnine su incidencijske strukture koje imaju i određena geometrijska svojstva, pa krenimo stoga od definicije incidencijske strukture.

Definicija 1. *Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{B}$ neprazni disjunktni skupovi i $I \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{B}$ binarna relacija na skupovima $\mathcal{T}$ i $\mathcal{B}$. Uređenu trojku $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ nazivamo* ***incidencijskom strukturom****. Elemente skupa $\mathcal{T}$ nazivamo* ***točkama****, elemente skupa $\mathcal{B}$* ***pravcima****, a relaciju I relacijom* ***incidencije****.*

Kažemo da točka $A \in \mathcal{T}$ **leži** na pravcu $p \in \mathcal{B}$ ili da pravac p **prolazi** točkom A, odnosno da je pravac p **incidentan** s točkom A, ako je $(A,p) \in I$.
Incidencijska struktura $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ je **konačna** ako su skupovi $\mathcal{T}$ i $\mathcal{B}$ konačni. Nama će u ovom radu biti važne konačne incidencijske strukture kojima su pravci neprazni podskupovi skupa točaka, dakle $\mathcal{B} \subset 2^{\mathcal{T}}$, a relacija incidencije je relacija pripadanja. Stoga, točka $A \in \mathcal{T}$ leži na pravcu $p \in \mathcal{B}$ ako i samo ako je $A \in p$.

Definicija 2. *Za tri različite točke incidencijske strukture $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ kažemo da su* ***kolinearne*** *ako sve tri leže na istom pravcu. U protivnom kažemo da su* ***nekolinearne****. Za dva pravca $p, q \in \mathcal{B}$ kažemo da su* ***paralelna****, i pišemo $p \parallel q$, ako je $p = q$ ili $p \cap q = \emptyset$.*

Relacija paralelnosti je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{B}$. Klase ekvivalencije po relaciji paralelnosti su klase paralelnih pravaca, a svaku tu klasu nazivamo **smjerom**.

Definicija 3. *Incidencijsku strukturu $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ nazivamo* ***afinom ravninom*** *ako vrijedi:*

(A1) *za svake dvije različite točke $A, B \in \mathcal{T}$ postoji točno jedan pravac koji prolazi tim točkama; taj pravac označavamo s AB;*

(A2) *za svaki pravac $p \in \mathcal{B}$ i svaku točku $C \in \mathcal{T}$ koja ne leži na pravcu p postoji točno jedan pravac $q \in \mathcal{B}$ koji prolazi točkom C i paralelan je s pravcem p;*

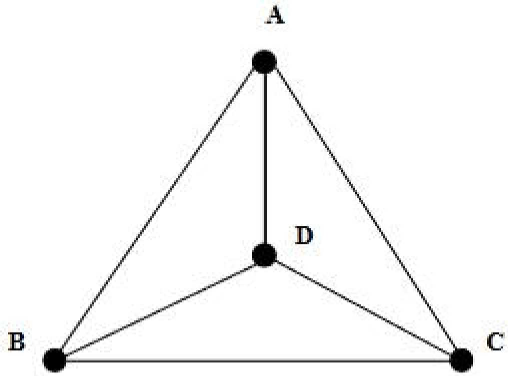
(A3) *postoje barem tri različite nekolinearne točke.*

Iz Aksioma (A1) direktno slijedi da dva različita pravca ili imaju jednu zajedničku točku ili ih nemaju uopće (ili se sijeku u točno jednoj točki ili su paralelni). Aksiom (A2) je u euklidskoj geometriji poznat pod nazivom Euklidov peti postulat o paralelama, a Aksiom (A3) osigurava da afina ravnina sadrži više od jednog pravca.

Ako je afina ravnina konačna incidencijska struktura, odnosno ako ima konačan broj točaka i pravaca, nazivamo je **konačnom afinom ravninom**. Postavlja se pitanje koliko točaka i pravaca sadrži najmanja konačna afina ravnina. Ta ravnina opisana je u sljedećem primjeru.[7]

Primjer 1. *Po Aksiomu (A3), u afinoj ravnini postoje barem tri različite točke koje ne leže na istom pravcu. Neka su to točke A, B i C. Po Aksiomu (A1), kroz svaki par točaka prolazi točno jedan pravac pa imamo tri različita pravca: AB, BC i AC. Svaka dva para tih pravaca sijeku se u točno jednoj točki (pravci AB i BC se sijeku u točki B, pravci AB i AC u točki A, a pravci AC i BC u točki C), pa ti pravci nisu međusobno paralelni. Sada, po Aksiomu (A2), za svaki od ta tri pravca postoji jedinstveni pravac kroz treću nekolinearnu točku paralelan polaznom (kroz točku C postoji jedinstveni pravac paralelan s pravcem AB, kroz točku B pravac paralelan s AC i kroz točku A pravac paralelan s BC). Zbog tranzitivnosti relacije paralelnosti, ni ta nova tri pravca nisu međusobno paralelna, što znači da se sijeku barem u jednoj točki, nazovimo je D. Ova konstrukcija dovela nas je do najmanje konačne afine ravnine. Ona sadrži četiri točke i šest pravaca, na svakom pravcu leže točno dvije različite točke i svaka točka leži na točno tri različita pravca. Ima tri klase ekvivalencije po relaciji paralelnosti, odnosno tri smjera: $\{AB, CD\}, \{AC, BD\}, \{AD, BC\}$. (slika 1)*

Primijetimo da u najmanjoj afinoj ravnini svaka dva pravca imaju jednak broj točaka. U nastavku ćemo pokazati da to svojstvo vrijedi u svakoj konačnoj afinoj ravnini. Iz gornje konstrukcije najmanje afine ravnine slijedi da na svakom pravcu afine ravnine leže barem dvije točke. Naime, po Aksiomu (A3), u afinoj ravnini postoje barem tri nekolinearne točke, označimo ih s A, B i C. Neka na pravcu p leži samo jedna od tih točaka, na primjer točka A. Tada, po Aksiomu (A1), postoji jedinstveni pravac kroz točke B i C. Ako pravac BC nije paralelan s pravcem p, onda se ta dva pravca sijeku u točki različitoj od točke A (inače bi sve tri točke ležale na jednom pravcu, a pretpostavka je da su nekolinearne), pa pravac p sadrži još barem dvije točke. Ako su pravci p i BC paralelni,



Slika 1. Najmanja afina ravnina [7].

onda po Aksiomu (A2) postoji pravac q koji prolazi točkom C i paralelan je s pravcem AB. Budući da pravci AB i p nisu paralelni (sijeku se u A), to ne mogu biti ni pravci q i p, pa se pravci q i p sijeku u točki koja nija A. Dakle, na svakom pravcu afine ravnine leže barem dvije točke, a to da je na svakom pravcu konačne afine ravnine jednak broj točaka garantira nam sljedeća propozicija. [4]

Propozicija 4. *U konačnoj afinoj ravnini na svakom pravcu leži jednak broj točaka.*

Dokaz. Neka su p i g različiti pravci konačne afine ravnine. Razlikujemo dva slučaja:

- pravci p i q nisu paralelni,
- pravci p i q su paralelni.

Pretpostavimo najprije da pravci p i q nisu paralelni, odnosno da se sijeku u jednoj točki i označimo tu točku s A. Po Aksiomu (A1), na svakom pravcu nalaze se barem dvije točke pa, osim zajedničke točke A, postoji još jedna točka na pravcu p različita od A i još jedna točka na pravcu q različita od A; označimo ih redom s $B \in p$ i $C \in q$. U Primjeru 1 smo pokazali da najmanja afina ravnina sadrži 4 točke, odnosno da postoji barem još jedna točka koja ne leži na pravcima p i q; označimo je s D. Po Aksiomu (A1) postoji novi pravac koji prolazi točkama A i D, označimo ga sa s. Trenutno imamo tri pravca, i na svakom po dvije točke. Dodajmo sada na pravac p točku E. Kako pravci p i q nisu paralelni to, po Aksiomu (A2), postoji pravac kroz točku E paralelan s q, označimo ga s q'. Zbog tranzitivnosti relacije paralelnosti, pravci q' i s nisu paralelni ($s \nparallel q$ i $q \parallel q'$ pa $s \nparallel q'$) već se sijeku u točki koju ćemo označiti s F. Sada ponovno zbog (A2) postoji pravac koji je paralelan s pravcem p i prolazi točkom F, takav pravac označimo s p'. Nadalje, sjecište pravaca p' i q označimo s G (to sjecište postoji jer ti pravci nisu paralelni što slijedi opet iz tranzitivnosti relacije paralelnosti). Ovim postupkom smo dodali po jednu točku na početna dva pravca p i q i sada svaki taj pravac sadrži po tri točke. Postupak možemo ponavljati konačan broj puta i u svakom trenutku broj točaka na pravcu p je veći ili jednak od broja točaka na pravcu q. Cijeli postupak smo mogli započeti i s pravcem q. Tada bi u svakom trenutku broj točaka na pravcu q bio veći ili jednak od broja točaka na pravcu p, pa zbog konačnosti skupa točaka zaključujemo da je broj točaka na pravcima p i q jednak.

Pretpostavimo sada da su pravci p i q paralelni. Odaberimo na pravcima p i q po jednu točku i označimo ih s $A \in p$ i $B \in q$. Pravac koji prolazi točkama A i B označimo s m. Primijetimo da m nije paralelan niti sa p niti sa q. Neka je C točka na pravcu p koja ne leži na pravcu m i neka je m' pravac paralelan s pravcem m koji sadrži točku C. Pravac m' siječe pravac q. Označimo to sjecište s D. Ovim postupkom smo dodali po jednu točku na pravce p i q i sada svaki taj pravac sadrži po dvije točke. Postupak možemo ponoviti konačan broj puta i uz iste argumente koje smo koristili u prethodnom slučaju zaključujemo da pravci p i q imaju jednak broj točaka. $\square$

Tom broju ćemo dati posebno ime.

Definicija 5. *Konačnu afinu ravninu u kojoj na svakom pravcu leži točno q točaka nazivamo* ***afinom ravninom reda*** *q i označavamo s $AG(2,q)$, a broj q nazivamo* ***redom*** *te ravnine.*

Primijetimo da je afina ravnina iz Primjera 1 reda 2, odnosno to je $AG(2,2)$ ravnina. Nama će od posebnog značenja biti afina ravnina $AG(2,3)$ i nju ćemo sada detaljno opisati. Afinu ravninu $AG(2,3)$ često nazivamo i Hesseovom konfiguracijom.

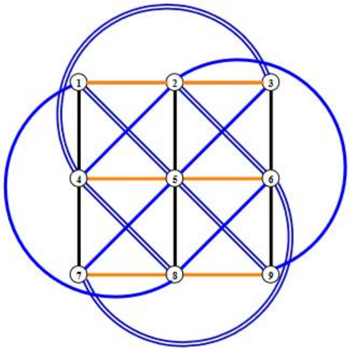
Primjer 2. *[7] Afina ravnina $AG(2,3)$ sadrži devet točaka i dvanaest pravaca, na svakom pravcu leže točno tri različite točke (reda je 3) i svaka točka leži na točno četiri različita pravca. Jedan model te ravnine prikazan je na slici 2. U tom modelu, skup točaka je*

$$\mathcal{T} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

a skup pravaca je

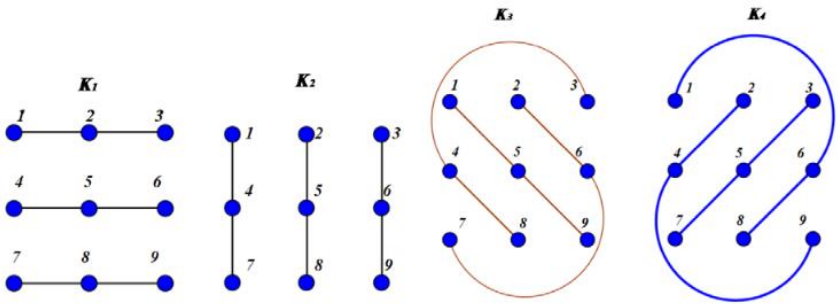
$$\mathcal{B} = \{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8,p_9,p_{10},p_{11},p_{12}\},$$

gdje su
$p_1 = \{1,2,3\}$, $p_2 = \{4,5,6\}$, $p_3 = \{7,8,9\}$, $p_4 = \{1,4,7\}$, $p_5 = \{2,5,8\}$,



Slika 2. Afina ravnina $AG(2,3)$ [7].

$p_6 = \{3,6,9\}$, $p_7 = \{1,5,9\}$, $p_8 = \{2,6,7\}$, $p_9 = \{3,4,8\}$, $p_{10} = \{1,6,8\}$, $p_{11} = \{2,4,9\}$, $p_{12} = \{3,5,7\}$. *Ima četiri klase paralelnih pravaca, odnosno četiri smjera: (slika 3):*
$K_1 = \{p_1,p_2,p_3\}$, $K_2 = \{p_4,p_5,p_6\}$, $K_3 = \{p_7,p_8,p_9\}$
i $K_4 = \{p_{10},p_{11},p_{12}\}$.



Slika 3. Klase paralelenih pravaca (smjerovi) [7].

Iz prethodna dva primjera vidimo da u afinim ravninama $AG(2,2)$ i $AG(2,3)$, osim što na svakom pravcu leži jednak broj točaka, i svaka točka leži na jednakom broju pravaca. Sljedeći teorem nam pokazuje da sve konačne afine ravnine imaju to svojstvo i daje nam još neka važna svojstva.

Teorem 6. [*10*], [*11*] *Za konačnu afinu ravninu $AG(2,q)$ reda q vrijedi:*

(1) *svaka točka leži na točno $q+1$ pravaca;*

(2) *ima točno* $q+1$ *smjerova, odnosno klasa paralelnih pravaca;*

(3) *ima točno* q^2 *različitih točaka;*

(4) *ima točno* q^2+q *različitih pravaca.*

Dokaz. (1) Neka su A i B dvije različite točke afine ravnine $AG(2,q)$. Zbog (A3) postoji točka C koja je različita od A i B i ne leži na pravcu AB. Zbog (A2) postoji pravac kroz točku C koji je paralelan s pravcem AB, označimo ga s c. Kako je $AG(2,q)$ ravnina reda q, to na pravcu c leži točno q točaka, označimo ih redom s $A_1, A_2, ..., A_q$. S obzirom da se na pravcu c nalazi i točka C, ona mora biti jednaka nekoj od točaka A_i za neki $i \in \{1, ..., q\}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $C = A_1$. Zbog (A1) postoji q pravaca AA_i, $i = 1, ..., q$. Uočimo da niti jedan od tih pravaca nije paralelan s početnim pravcem AB (zbog paralelnosti pravaca AB i c). Stoga kroz točku A prolazi barem $q+1$ pravaca. Kad bi kroz točku A prolazio još neki pravac, onda bi on morao sijeći pravac c u nekoj točki koja je različita od točaka A_i, $i = 1, ..., q$ pa bi na pravcu c ležalo više od q točaka što je nemoguće jer je ravnina reda q.

(2) Svaki pravac koji prolazi kroz neku čvrstu točku afine ravnine $AG(2,q)$ određuje jedan smjer pa zbog (1) postoji točno $q+1$ smjerova.

(3) Neka je A proizvoljna točka u $AG(2,q)$. Zbog (1), točkom A prolazi točno $q+1$ pravaca. Kako je afina ravnina reda q, na svakom od tih pravaca leži točno q točaka. S obzirom da im je svima zajednička točka A, preostali broj točaka na svakom od tih pravaca je $q-1$. Stoga je broj točaka na pravcima koji prolaze točkom A jednak

$$(q+1)(q-1)+1 = q^2-1+1 = q^2.$$

No, to je ujedno i broj svih točaka ravnine $AG(2,q)$ jer za svake dvije različite točke postoji jedinstveni pravac koji njima prolazi, pa svaka točka različita od A leži na nekom od pravaca kroz A.

(4) Budući da afina ravnina reda q ima q^2 točaka i da kroz svaku točku prolazi točno $q+1$ različitih pravaca, a na svakom pravcu leži točno q točaka, ukupan broj pravaca je

$$\frac{q^2(q+1)}{q} = q^2+q.$$

□

Pokažimo sada kako konačnu afinu ravninu možemo konstruirati pomoću konačnog polja (konstrukcija bi bila analogna i za beskonačna polja, ali nam to ne treba). Podsjetimo se da konačno polje reda q postoji ako i samo ako je q potencija prostog broja.
Neka je $\mathbb{F}$ konačno polje reda q. Ako za skup točaka uzmemo 2-dimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{F}^2$ nad $\mathbb{F}$, tj. ako je $\mathcal{T} = \mathbb{F}^2$, a za pravce skupove oblika $\{a + bk : k \in \mathbb{F}\}$, $a, b \in \mathbb{F}^2$, te ako definiramo relaciju incidencije $\mathcal{I}$ na način da točka $A \in \mathcal{T}$ leži na pravcu $p \in \mathcal{B}$ ako i samo ako je $A \in p$, onda je incidencijska struktura $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ afina ravnina $AG(2, q)$. Tu afinu ravninu nazivamo **2-*dimenzionalnim afinim prostorom*** ili ***afinom ravninom nad poljem*** $\mathbb{F}$.
Afina ravnina nad poljem $\mathbb{F}$ je samo specijalni slučaj afine geometrije nad tim poljem, a definiramo je pomoću n-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$. Kao i prije, pretpostavit ćemo da je polje konačno, a analogno se definira i za bilo koje polje.

Definicija 7. *Neka je $\mathbb{F}$ konačno polje i $k < n$. Za svaki k-dimenzionalni vektorski potprostor $L < \mathbb{F}^n$ i za svaki $b \in \mathbb{F}^n$, skup $L+b = \{a+b : a \in L\}$ nazivamo* ***translatom*** *od L za vektor b.*

Definicija 8. *Neka je $\mathbb{F}$ konačno polje reda q i $n \geq 2$.* ***Afina geometrija*** *ili* ***n-dimenzionalni afini prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$, u oznaci $AG(n, q)$, je skup koji se sastoji od vektora prostora $\mathbb{F}^n$ koje nazivamo* ***točkama*** *i translata vektorskih potprostora od $\mathbb{F}^n$ koje nazivamo* ***ravninama*** *afine geometrije. Svaki translat k-dimenzionalnog vektorskog potprostora od $\mathbb{F}^n, k < n$, nazivamo* ***k-ravninom***. *Specijalno, 1-ravnine nazivamo* ***pravcima***, *2-ravnine* ***ravninama***, *a $(n-1)$-ravnine* ***hiperravninama***.

Sljedeći teorem govori o broju točaka i pravaca u konačnoj afinoj geometriji.

Teorem 9. *Za afinu geometriju $AG(n, q)$ nad poljem reda q vrijedi:*

(1) *ima točno q^n točaka;*

(2) *ima točno $q^{n-1}(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1)$ pravaca;*

(3) *svaka točka leži na točno $q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1$ pravaca;*

(4) *na svakom pravcu leži točno q točaka.*

Znamo da su svaka dva konačna polja istoga reda izomorfna, a kako je $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ najjednostavnije konačno polje (polje ostataka) prostog reda p, prirodno je sva konačna polja reda p identificirati s poljem $\mathbb{Z}_p$. Binarna operacija zbrajanja na skupu $\mathbb{Z}_p$ definirana je na način da svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ pridruži ostatak pri dijeljenju cijelog broja $x + y$ s brojem p, dok binarna operacija množenja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ pridružuje ostatak pri dijeljenju cijelog broja $x \cdot y$ s brojem p. Uz ovako definirano zbrajanje i množenje $\mathbb{Z}_p$ je polje. Rezultati zbrajanja i množenja na $\mathbb{Z}_3$ dani su u tablicima 1 i 2.

$+$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tablica 1. Zbrajanje.

$\cdot$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Tablica 2. Množenje.

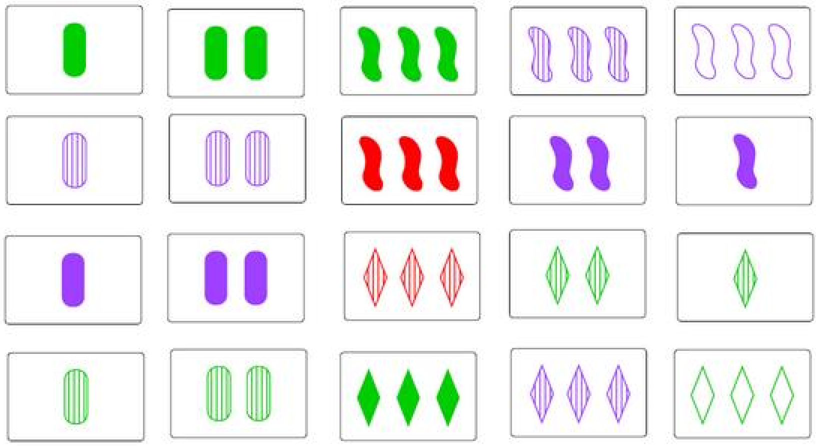
Pokazat ćemo da je igra **SET** povezana s afinom geometrijom $AG(4, 3)$ nad poljem $\mathbb{Z}_3$. Po prethodnom teoremu, afina geometrija $AG(4, 3)$ ima 81 točku, 1080 pravaca, svaka točka leži na točno 40 pravaca i na svakom pravcu leže točno 3 točke.

3. Igra SET

Igra **SET** je zabavna kartaška igra namijenjena gotovo svim uzrastima (od šest godina pa nadalje). Osmislila ju je Amerikanka Marsha Jean Falco 1974. godine i tijekom godina usavršavala, da bi 1990. igra ugledala svjetlo dana i od tada postala vrlo popularna, kako unutar matematičke zajednice, tako i izvan nje [3].
Igra se sastoji od špila posebno osmišljenih karata. Na karti su nacrtani jedan, dva ili tri ista oblika (romb, oval ili nepravilni lik) koji su svi iste boje (crvene, zelene ili ljubičaste) i čija je nutrina svima jednako ispunjena (prazna, iscrtkana ili puna). Dakle, svaka karta jednoznačno je određena sljedećim svojstvima:

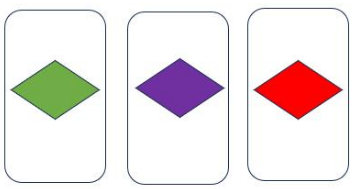
1. **oblikom** objekata nacrtanih na karti (romb, oval ili nepravilni),
2. **brojem** tih objekata (jedan, dva ili tri ista objekta),
3. **bojom** (crvena, zelena ili ljubičasta),
4. **ispunjenjem** (prazno, iscrtkano ili puno).

Na slici 4 dani su primjeri nekih **SET** karata.
Kako imamo četiri različita svojstva, a za svako svojstvo imamo po tri mogućnosti, to je ukupno 3^4 različitih mogućnosti, što znači da u špilu imamo 81 kartu. Cilj igre je pronaći što više takozvanih SET-ova. SET se sastoji od tri karte na kojima je svako pojedino svojstvo ili na sve tri

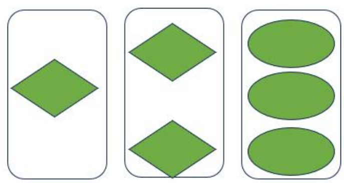


Slika 4. Primjeri SET karata [9].

karte isto ili je na sve tri karte različito. Na primjer, ako tri karte imaju po jedan puni romb u različitim bojama, onda te tri karte čine SET jer su im broj, oblik i ispunjenje isti, a boja im je svima različita (slika 5a). No, ako tri karte imaju zelene pune oblike, ali je na prvoj karti jedan romb, na drugoj dva romba, a na trećoj tri ovala, onda te karte ne čine SET jer oblici nisu niti svi isti niti svi različiti (slika 5b).



(a) Primjer SET-a.



(b) Primjer koji nije SET.

Slika 5. Primjer SET-a i ne SET-a.

Igra započinje otvaranjem 12 karata tako da svi igrači vide njihovo lice. Igrači istovremeno, po principu tko će prije, traže SET među otvorenim kartama. Nakon što jedan od igrača prvi uoči SET, izgovara riječ SET i uzima te tri karte, a iz preostalog špila karata se dodaju nove tri karte i postupak traženja SET-a se nastavlja. Ako u 12 otvorenih karata nema SET-a nadodaju se još tri karte. Ako ni među tih 15 karata nema SET-a, podijele se još tri karte i tako sve dok se među kartama ne pojavi barem jedan SET. Dokazano je da je broj 20 najveći broj karata među kojima ne mora nužno biti SET-a (primjer jednog takvog skupa karata je na slici

4), drugim riječima, u igri **SET** dovoljno je otvoriti 21 kartu da bismo bili sigurni da se među njima nalazi barem jedan SET [1]. Igra završava kada su podijeljene sve karte iz špila i kada u otvorenim kartama više nije moguće pronaći nijedan SET. Pobjednik je onaj igrač koji je skupio najviše SET-ova.

Pokažimo sada kako opisanu igru možemo matematički modelirati. Ako svakom svojstvu na karti pridružimo jednu koordinatu onda kartu možemo shvatiti kao uređenu četvorku kojoj svaka koordinata može poprimiti tri različite vrijednosti (jer svako svojstvo ima tri različite mogućnosti). Stoga svaku kartu možemo prikazati kao vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) u 4-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ nad poljem $\mathbb{Z}_3$, pri čemu prva komponenta vektora označava broj, druga boju, treća oblik, a četvrta ispunjenje oblika, na način prikazan u tablici 3.

Svojstvo - komponenta vek.	**Mogućnosti**		
Broj - x_1	jedan	dva	tri
Boja - x_2	crvena	zelena	ljubičasta
Oblik - x_3	oval	romb	nepravilni
Ispunjenje - x_4	iscrtkano	prazno	puno
Vrijednosti komponenti	**1**	**2**	**0**

Tablica 3. Vrijednosti komponenti vektora.

Tako, na primjer, vektor (1,0,1,2) predstavlja kartu na kojoj je jedan ljubičasti prazni oval, a vektor (0,2,2,0) kartu na kojoj imamo tri zelena puna romba. Karte iz Primjera 5a koje čine SET zapisane u vektorskom obliku su redom $(1, 2, 2, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 1, 2, 0)$. Primijetimo da ti vektori zbrojeni daju nul vektor. Naime,

$$(1, 2, 2, 0) + (1, 0, 2, 0) + (1, 1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Pokazat ćemo sada da to nije slučajno, štoviše, tri će karte činiti SET ako i samo ako im je zbroj pripadnih vektora nul vektor.

Neka su dane tri karte koje čine SET. Tada je, po definiciji SET-a, svako pojedino svojstvo na sve tri karte ili isto ili je na sve tri karte različito, što znači da njima pripadni vektori na svakoj pojedinoj koordinati imaju ili istu vrijednost (koja iznosi ili 0 ili 1 ili 2), ili sva tri vektora na toj koordinati imaju različite vrijednosti (jedan od njih ima 0, drugi 1 i treći 2). Dakle, razlikujemo dva slučaja:

(a) Ako je promatrano svojstvo na sve tri SET karte **isto** i ima vrijednost x, $x \in \{0, 1, 2\}$, onda je vrijednost zbroja pripadnih vektora na toj koordinati jednaka

$$x + x + x = 3x \equiv 0 \pmod 3.$$

(b) Ako je promatrano svojstvo na sve tri SET karte **različito**, onda su im na toj koordinati sve tri različite vrijednosti, pa je vrijednost zbroja pripadnih vektora na toj koordinati, do na poredak, jednaka

$$0 + 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Time smo dokazali da je zbroj pripadnih vektora triju SET karata uvijek nul vektor (jer je zbroj na svakoj koordinati jednak 0). No, vrijedi i obrat, tj. ako je zbroj triju različitih vektora iz $\mathbb{Z}_3$ na nekoj koordinati jednak 0, onda su vrijednosti tih vektora na tim koordinatama ili sve jednake ili sve različite. Naime, iz $x + y + z = 0$ slijedi $x = y = z$ ili je $x \neq y$, $x \neq z$, i $y \neq z$, za sve $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$, pa na toj koordinati sve karte imaju ili isto ili različita svojstva. Time smo dokazali da tri karte čine SET ako i samo ako im je zbroj pripadnih vektora jednak nul vektoru, odnosno ako su ti vektori linearno zavisni. Iz ovog odmah slijedi i da svake dvije karte jedinstveno određuju treću kartu koja s njima tvori SET. Naime, ako pripadne vektore triju SET karata označimo $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_3^4$, onda iz $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ slijedi $k_3 = -k_1 - k_2$, pa je karta k_3 jednoznačno određena kartama k_1 i k_2. Ovim je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 10. *Tri karte čine SET ako i samo ako je zbroj njima pripadnih vektora jednak nul vektoru. Također, dvije karte jedinstveno određuje treću kartu koja s njima tvori SET.*

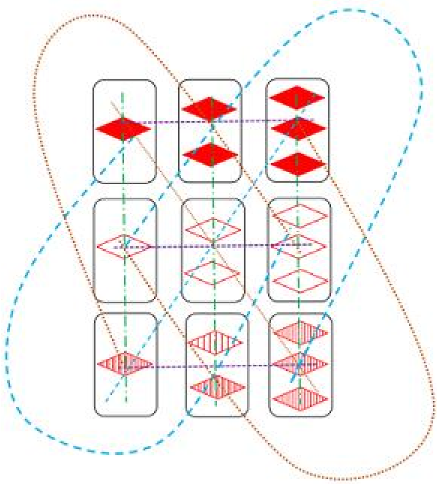
Pokazali smo da svaku kartu možemo shvatiti kao jedan vektor vektorskog prostora $\mathbb{Z}_3^4$ nad poljem $\mathbb{Z}_3$ i da će tri karte činiti SET ako i samo ako su ti vektori linearno zavisni. Kako je svaki vektorski prostor ujedno i afini prostor nad istim poljem, tako je i vektorski prostor $\mathbb{Z}_3^4$ ujedno i 4-dimenzionalni afini prostor nad poljem $\mathbb{Z}_3$, odnosno afina geometrija $AG(4,3)$ kojoj su točke elementi iz $\mathbb{Z}_3^4$, a pravci 1-ravnine, tj. translati oblika $\{v + kw : k \in \mathbb{Z}_3\}$, $v, w \in \mathbb{Z}_3^4$. Karte su točke te geomerije, a linearna zavisnost vektora čije karte čine SET ekvivalentna je kolinearnosti tih točaka. Naime, točke $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_3^4$ tvore SET ako i samo ako je $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, što se može zapisati i u obliku $k_3 = -k_1 - k_2 = k_1 + 2(k_2 - k_1)$, pa točke k_1, k_2, k_3 leže na pravcu $\{k_1 + k(k_2 - k_1) : k \in \mathbb{Z}_3\}$. Stoga gornji teorem možemo iskazati u obliku:

Teorem 11. *[6] Tri karte tvore **SET** ako i samo ako su njima pripadne točke kolinearne u AG(4,3).*

Kako pravci u $AG(4,3)$ prolaze kroz točno tri točke zaključujemo da su pravci te geometrije ustvari SET-ovi naše igre, drugim riječima da SET-ova ima onoliko koliko ima pravaca u $AG(4,3)$. Iz teorema 9 slijedi da u $AG(4,3)$ ima 1080 pravaca [2], pa imamo isto toliko mogućnosti za

SET.

Značajno ćemo pojednostavniti traženje SET-ova ako od četiri moguća svojstva fiksiramo dva, na primjer, gledamo crvene rombove. Karte koje imaju ta dva fiksna svojstva možemo, umjesto kao četvorke, promatrati kao uređene parove (x, y), za $x, y \in \mathbb{Z}_3$. Takav špil ima $3^2 = 9$ karata (umjesto polaznih 81). Na slici 6 vidimo jedan takav špil s fiksiranom bojom (crvena) i oblikom (romb). Karte koje tvore SET su spojene pravcima.



Slika 6. SET-ovi.

Ako karte zamijenimo točkama s koordinatama (x, y) u $\mathbb{Z}_3^2$ i spojimo točke koje tvore SET, dobivamo afinu ravninu $AG(2, 3)$ opisanu u Primjeru 2 kojoj su točke svakog pravca upravo karte koje čine SET. Ukupno imamo 12 SET-ova jer je toliko pravaca u $AG(2, 3)$.

Fiksiramo li samo jedno svojstvo, umjesto četvorki promatramo uređene trojke prostora $\mathbb{Z}_3^3$, a igra se može modelirati afinom geometrijom $AG(3, 3)$ u kojoj je 27 točaka i 57 pravaca, odnosno 27 karata i 57 SET-ova.

Igra **SET** može se i drugačije promatrati. U toj igri je cilj skupiti što više SET-ova. No, što ako to promijenimo na način da želimo baš izbjeći SET-ove i pronaći skup karata koji ne sadrži niti jedan SET. S tim ciljem, uvodi se pojam ANTI-SET-a koji označava upravo takav skup karata. Pitamo se koliki je najveći mogući ANTI-SET i kako ga pronaći. Geometrijski, tražimo najveći skup točaka afine geometrije $AG(4, 3)$ u kojem nikoje tri točke nisu kolinearne. Do odgovora se dolazi postupno. Pokaže se najprije da je iz kompleta karata s točno dva različita svojstva (takvih je 9) moguće podijeliti najviše 4 takve karte, odnosno da u afinoj ravnini $AG(2,3)$ postoji skup od najviše četiri točke od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. U kompletu karata s tri različita svojstva je najviše 9 takvih karata (od 27 koliko ih u tom kompetu ima), odnosno u afinoj geometriji $AG(3,3)$ postoji skup od najviše devet točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. I konačno, u kompletu **SET** karata (četiri različita svojstva) je maksimalno 20 karata među kojima nema nijednog SET-a, odnosno u $AG(4,3)$ postoji skup od najviše dvadeset točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. [1]

4. Zaključak

Matematički model igre **SET** je afina geometrija $AG(4,3)$. Svaka točka toga prostora predstavlja jednu kartu, pa je ukupan broj karata jednak ukupnom broju točaka u $AG(4,3)$, dakle 3^4. Svaki SET odgovara pravcu u $AG(4,3)$, pa je ukupan broj SET-ova jednak ukupnom broju pravaca u $AG(4,3)$. Stoga postoji 1080 različitih SET-ova. Fiksnom točkom prolazi točno 40 različitih pravaca, što u terminima SET-a znači da 40 različitih SET-ova sadrži jednu fiksnu kartu.

Ravninu u $AG(4,3)$ čini skup od 9 točaka koje predstavljaju karte s dva različita svojstva (dva svojstva su fiksirana). To je afina ravnina $AG(2,3)$. Ona sadrži 12 pravaca, što znači da među tim kartama ima točno 12 SET-ova. Fiksnom točkom ravnine prolaze točno 4 različita pravca te ravnine, odnosno svaka od tih 9 karata (iz skupa karata s dva različita svojstva) nalazi se u 4 različita SET-a.

Literatura

[1] B. Davis, D. Maclagan, *The card game set*, 2024., https://web.archive.org/web/20130605073741/http://www.math.rutgers.edu/~maclagan/papers/set.pdf

[2] H. Fairbanks, *The Game SET as* $\mathbb{F}_4^3$, 2024., https://www.math.ucdavis.edu/~anne/WQ2023/set_game.pdf

[3] M. Meehan, Interview with game designer Marsha Jean Falco, kolovoz, 2020., dostupno na https://www.entertainmentvine.com/games/interview-with-game-designer-marsha-jean-falco/

[4] J. Morris, *Affine Planes - Mathemtaics LibreTexts*, 2024., https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics_and_Discrete_Mathematics/Combinatorics_(Morris)/04%3A_Design_Theory/18%3A_More_Designs/18.03%3A_Affine_Planes

[5] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, *skripta*, ak. god. 2012./2013.

[6] H. Tucker, *Geometric models of the card game SET*, Rose-Hulman Undergradu- ate Mathematics Journal, 8, br. 1, 2007.

[7] O. Zaka, K. Filipi, *An applicattion of finite affine plane of order n, in an experiment planing*, International Journal of Science and Research, 2016.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_geometry, 2024.

[9] https://brilliant.org/wiki/set-game/, 2024.

[10] https://ericmoorhouse.org/handouts/affine_planes.pdf, 2024.

[11] https://www.sfu.ca/~mdevos/notes/comb_struct/geometry.pdf, 2024.

Snježana Braić
Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split
E-mail: sbraic@pmfst.hr

Josipa Matotek
Doktorski studij *Istraživanje u edukaciji u području prirodnih i tehničkih znanosti*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split
E-mail: jmatotek@pmfst.hr