ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.8 (2025) 39–88
https://doi.org/10.32817/amssd.8.3

Zaprimljen: 7. siječnja 2025.
Prihvaćen: 27. kolovoza 2025.

Razna poopćenja i karakterizacije kompaktnosti

Andrea Mikelić, Dino Peran

Sažetak

U ovom radu bavimo se prvenstveno poopćenjem kompaktnih topoloških prostora. Motivirani opće poznatom karakterizacijom kompaktnosti u metrizabilnim prostorima u terminima gomilišta nizova, odnosno skupova, te omeđenosti neprekidnih preslikavanja s kompaktnom domenom, poopćavamo pojam kompaktnosti preko prebrojive, gomilišne, nizovne, odnosno pseudokompaktnosti. Pokazat ćemo odnose među navedenim poopćenjima te navesti odgovarajuće protuprimjere. Kratko ćemo komentirati standardni dokaz da su sva navedena poopćenja ekvivalentna kompaktnosti u klasi metrizabilnih prostora, ali i u klasi Lindelöfovih prostora. Međutim, nisu svi kompaktni prostori i metrizabilni, niti su svi metrizabilni prostori Lindelöfovi. Motivirani time, navodimo klasu prostora koji simultano poopćavaju kompaktne, ali i metrizabilne te regularne Lindelöfove prostore, te pokazujemo da u navedenoj klasi vrijedi analogon karakterizacije kompaktnosti kao kod metrizabilnih prostora.[1].

Ključni pojmovi: topološki prostori, kompaktnost, prebrojiva kompaktnost, gomilišna kompaktnost, nizovna kompaktnost, pseudokompaktnost, Lindelöfovi prostori, topološka dimenzija, metakompaktnost, parakompaktnost, metrizabilnost, ireducibilni pokrivači, ireducibilni prostori, regularni prostori, normalni prostori

[1]Ovaj rad se temelji na diplomskom radu A. Mikelić (vidi [16])

Abstract

In this paper, we deal primarily with the generalization of compact topological spaces. Motivated by the well-known characterization of compactness in metrizable spaces in terms of accumulation points of sequences, or sets, and the boundedness of continuous mappings with a compact domain, we generalize the concept of compactness via countable, sequential, accumulation point, or pseudocompactness. We show the relationships between the mentioned generalizations and provide corresponding counterexamples. We briefly comment on the standard proof that all the above generalizations are equivalent to compactness in the class of metrizable spaces, but also in the class of Lindelöf spaces. However, not all compact spaces are also metrizable, nor are all metrizable spaces Lindelöf. Motivated by this, we state a class of spaces that simultaneously generalize compact, but also metrizable and regular Lindelöf spaces, and we show that, in the specified class, the analogue of the characterization of compactness as for metrizable spaces is valid.

Keywords: topological spaces, compactness, countable compactness, accumulation point compactness, sequential compactness, pseudocompactness, Lindelöf spaces, topological dimension, metacompactness, paracompactness, metrizability, irreducible covers, irreducible spaces, regular spaces, normal spaces

Sadržaj

Uvod

Kompaktni (ili sažeti) prostori predstavljaju jako važnu klasu topoloških prostora kod kojih se, na neki način, beskonačnost svede na konačnost. Naime, za svaku množinu otvorenih podskupova koji pokrivaju kompaktan prostor možemo odabrati njezinu konačnu podmnožinu koja također pokriva cijeli prostor ([4], [18]). Iz navedene definicije kompaktnosti može se dokazati njena sljedeća karakterizacija: svaka množina zatvorenih podskupova koja ima svojstvo da je presjek svake njezine konačne podmnožine neprazan i sama ima neprazan presjek ([4], [18], [24]). Navedeno svojstvo također pokazuje kako svojstvo konačnih podmnožina implicira isto svojstvo na cijelu množinu koja može potencijalno biti beskonačna. Navedena svojstva će kao posljedicu imati činjenicu da je u kompaktnom prostoru presjek svakog silaznog niza nepraznih zatvorenih podskupova isto neprazan, zatim da svaki niz (ili beskonačan podskup) ima barem jedno gomilište ([4], [15]). Ovo zadnje svojstvo je posebice zanimljivo jer pokazuje zašto takve prostore nazivamo kompaktnima. Naime, za svaki odabir niza različitih točaka u prostoru, beskonačno mnogo točaka se *grupira* ili *gomila* oko neke točke prostora (takozvanog gomilišta). Isto tako, može se pokazati da je svako neprekidno realno preslikavanje s kompaktnom domenom omeđeno ([3], [4]). Zanimljivo je da navedena zadnja tri svojstva ne karakteriziraju općenito kompaktne topološke prostore, već predstavljaju samo nužne uvjete za kompaktnost. Međutim, na klasi metrizabilnih topoloških prostora, gdje je topologija inducirana nekom metrikom, može se pokazati da navedena tri svojstva u potpunosti karakteriziraju kompaktnost ([2], [12], [22]). Pokazat ćemo da su navedena tri svojstva ekvivalentna s prebrojivom kompaktnošću na klasi normalnih prostora. Prebrojiva kompaktnost je svojstvo da svaka prebrojiva množina otvorenih podskupova koja pokriva prostor ima konačnu podmnožinu koja pokriva prostor, a klasa normalnih prostora je jedna važna prava nadklasa metrizabilnih prostora. Međutim, navedena prebrojiva kompaktnost nije ekvivalentna kompaktnosti u klasi normalnih prostora, ali jest na njezinoj podklasi svih metrizabilnih prostora te podklasi normalnih Lindelöfovih prostora ([4], [15]). No nisu svi metrizabilni prostori i Lindelöfovi. Stoga ćemo pokazati da postoji klasa prostora koja sadrži sve metrizabilne prostore i u kojoj je prebrojiva kompaktnost ekvivalentna kompaktnosti. To će biti klasa prostora koji imaju svojstvo da svaka množina otvorenih podskupova koja pokriva prostor dopušta ireducibilnu množinu koja se sastoji od otvorenih podskupova koji pokrivaju prostor i koja *profinjuje* danu množinu ([6]). Ireducibilnost se očituje u tome da je navedena množina minimalna množina (u smislu inkluzije) koja pokriva prostor. Pokazat ćemo da navedena klasa prostora u sebi sadrži konačnodimenzionalne (u smislu topološke dimenzije), metakompaktne i parakompaktne prostore ([1], [3], [4], [21], [18], [23]) kao prave podklase, od kojih su parakompaktni prostori posebice važni kod karakterizacije metrizabilnosti, kao što je to primjerice u Smirnovljevom teoremu ([18], [21]).

Zanimljivo je kako tokom razvoja topologije nije uvijek bilo jasno koja bi trebala biti definicija kompaktnosti ([4], [7], [10]). Štoviše, postavljalo se pitanje zašto neka od današnjih poopćenja kompaktnosti ne bi postala definicija kompaktnosti. Naime, kao i mnogo apstraktnih pojmova u matematici kompaktnost je bila motivirana određenim zanimljivim svojstvima koja ima segment kao podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}$. Svako od tih svojstava predstavlja jednu moguću apstrakciju segmenta. Spomenimo svakako *Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove* ([9], [11]) u kojem se dokazuje da svaki omeđeni niz euklidskog prostora ima barem jedno gomilište. Međutim, navedeno svojstvo je imalo smisla samo za metričke prostore. Razvojem topologije, javila se potreba za definicijom koja neće uključivati pojam metrike. Jedan način na koji se omeđenost može izostaviti je da se zahtijeva da svaki niz u prostoru ima konvergentan podniz, što dovodi do pojma nizovne kompaktnosti koja je posebice praktična kada se manipulira s nizovima ([1], [15]). Frechét je 1906. godine pokušao uvesti topologiju u terminima konvergencije nizova, ali se pokazalo da je njegova definicija prerestriktivna. Između ostalog, Frechét je uveo pojam prebrojive kompaktnosti. Da bismo motivirali pojam prebrojive kompaktnosti, objasnimo povijesni kontekst. Naime, 1894. godine Borel dokazuje da svaki prebrojiv pokrivač segmenta otvorenim podskupovima ima konačan potpokrivač. Tako se kompaktnost mogla zapravo definirati kao današnja prebrojiva kompaktnost. Međutim, Lebesgue je primijetio da navedeno svojstvo vrijedi za proizvoljne pokrivače otvorenim podskupovima segmenta. Navedeno je svojstvo 1903. Borel pokazao za sve zatvorene i omeđene podskupove euklidskog prostora. Očito su navedeni razlozi, kao i restriktivnost Frechétovog *nizovnog pristupa*, doveli do toga da se odustane od nizovne i prebrojive kompaktnosti i da se za definiciju kompaktnosti uzme navedeno svojstvo pokrivača. Tome je svakako potpomogla činjenica da je 1914. Hausdorff uveo pojam topologije pomoću otvorenih skupova koji je općeprihvaćen i danas stoji u raznim udžbenicima iz opće topologije te koji je učinio ovu definiciju u terminima pokrivača praktičnom. Još jedan razlog za napuštanje prebrojive kompaktnosti je zasigurno činjenica da se ona ne *ponaša dobro* prema produktu i aksiomima separacije. Na primjer, poznato je da je svaki kompaktan Hausdorffov prostor i normalan ([4]), što nije općenito slučaj kod prebrojive kompaktnosti. Spomenimo da Vietoris 1921. uvodi koncept regularnih kompaktnih prostora, dok su prvu modernu definiciju kompaktnosti, neovisno o Vietorisu, uveli Aleksandrov i Urysohn 1923. Zanimljivo je da je tek 1948. Hewit uveo definiciju pseudokompaktnosti, a da su definiciju Lindelöfovih prostora uveli 1929. Aleksandrov i Urysohn u čast Lindelöfu koji je 1903. dokazao da svaki pokrivač euklidskog prostora otvorenim podskupovima ima prebrojiv potpokrivač. Do definicije parakompaktnosti došlo je tek 1944. od strane Dieudonnéa. Naime, parakompaktnost je pokušaj apstrahiranja već ionako apstraktnih pojmova, jer je nastala kao pokušaj poopćenja svojstava koja, s jedne strane imaju kompaktni Hausdorffovi prostori, a s druge strane metrizabilni prostori. Više o povijesnom razvoju topologije možete pročitati u [4], [7], [10].

Rad je podijeljen u pet odjeljaka a za razumijevanje potrebno je da je čitatelj upoznat s osnovnim pojmovima *Zermelo-Fraenkelove teorije skupova* ([19], [13], [20], [25]) te da poznaje pojmove kao što su: topologija, metrika, otvoreni i zatvoreni skupovi, zatvorenje, nutrina, okolina,... Najprije navodimo osnovne pojmove i tvrdnje korištene u radu što se tiču opće topologije te napominjemo da ih čitatelj, koji je upoznat s opće-topološkim osnovama, može preskočiti. U drugom odjeljku dokazujemo karakterizaciju kompaktnosti u klasi metrizabilnih prostora koristeći isključivo metrizabilnost prostora. U idućem odjeljku poopćavamo kompaktnost na temelju raznih karakterizacija kompaktnosti u metrizabilnim prostorima i promatramo njihov međuodnos. Zatim, u četvrtom odjeljku definiramo ireducibilne pokrivače i klasu ireducibilnih prostora u kojoj je prebrojiva kompaktnost ekvivalentna kompaktnosti. U zadnjem odjeljku se bavimo topološkom dimenzijom prostora, metakompaktnim i parakompaktnim prostorima te pokazujemo da su to nadklase metrizabilnih prostora i prave podklase ireducibilnih prostora. Na koncu dobivamo karakterizaciju kompaktnosti u metrizabilnim prostorima (koju smo dokazali u drugom odjeljku koristeći metrizabilnost) direktno koristeći isključivo topološke argumente bez metrike.

1. Osnovni pojmovi i tvrdnje iz opće topologije

Najprije ćemo navesti definiciju kompaktnosti, a za to nam treba definicija otvorenih pokrivača te relacija profinjenja. Potom ćemo se prisjetiti osnovnih pojmova i tvrdnji koji se tiču aksioma separacije, konvergencije nizova i aksioma prebrojivosti. Napomenimo da se od čitatelja očekuje poznavanje pojmova kao što su: topologija, metrika, zatvoreni i otvoreni skupovi, zatvorenje, nutrina, okolina[2] i sl. (vidite primjerice [3], [4], [11], [17], [18]).

[2]Dopuštamo da *okolina* ne mora nužno biti i otvoren skup.

Definicija 1. *Neka je X neki skup i $\mathcal{U}$ neka množina njegovih podskupova. Reći ćemo da je množina $\mathcal{U}$* pokrivač skupa X *(ili da množina $\mathcal{U}$* pokriva X*) ako je $X = \bigcup \mathcal{U}$.*

Svaku podmnožinu od $\mathcal{U}$ koja je ujedno i pokrivač skupa X nazivamo potpokrivačem *pokrivača $\mathcal{U}$.*

Definicija 2. *Neka je X skup, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ pokrivači skupa X. Reći ćemo da $\mathcal{U}$* profinjuje $\mathcal{V}$ *(ili da je $\mathcal{U}$* profinjenje *od $\mathcal{V}$) ako za svaki element $U \in \mathcal{U}$ postoji $V \in \mathcal{V}$ tako da je $U \subseteq V$.*

Pojam profinjenja se može definirati općenito za po volji odabrane množine podskupova prostora, ali u našem kontekstu profinjenje će uvijek biti i pokrivač tog prostora.

Definicija 3. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{U}$ neki njegov pokrivač. Reći ćemo da je $\mathcal{U}$* otvoreni *(*zatvoreni*)* pokrivač *prostora X ako su svi elementi pokrivača $\mathcal{U}$ otvoreni (zatvoreni) u prostoru X.*

Definicija 4. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* kompaktan *ako svaki otvoreni pokrivač prostora X ima konačno otvoreno profinjenje.*

Očito je prostor X kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač prostora X ima konačan potpokrivač.
Kako bismo karakterizirali kompaktnost, uvest ćemo pojam centrirane množine.

Definicija 5. *Neka je X skup i $\mathcal{F}$ neprazna množina podskupova od X. Kažemo da je množina $\mathcal{F}$* centrirana *ako svaka njezina konačna neprazna podmnožina ima neprazan presjek.*

Teorem 6. *Neka je X topološki prostor. Tada je X kompaktan ako i samo ako svaka centrirana množina njegovih zatvorenih podskupova ima neprazan presjek.*

Dokaz. Dokažimo nužnost. Neka je $\mathcal{F}$ po volji odabrana centrirana množina zatvorenih podskupova od X. Pretpostavimo da je presjek množine $\mathcal{F}$ prazan skup. Neka je $\mathcal{U} := \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač prostora X, pa postoji njegov konačan potpokrivač $\{X \setminus F_1, \ldots, X \setminus F_n\}$, za $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$. Sada je

$$\emptyset = X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) \Big) = \bigcap_{i=1}^{n} F_i,$$

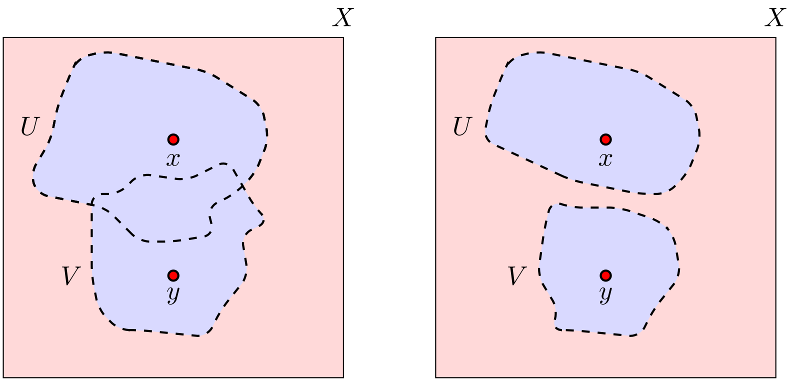
što je kontradikcija sa centriranošću množine $\mathcal{F}$.

Dokažimo dovoljnost. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora X. Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ nema konačan potpokrivač i definirajmo $\mathcal{F} := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$. Tada je $\mathcal{F}$ množina zatvorenih podskupova prostora X. Budući da $\mathcal{U}$ nema konačan potpokrivač, slijedi da je $\mathcal{F}$ centrirana množina. Po pretpostavci slijedi da $\mathcal{F}$ ima neprazan presjek, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathcal{U}$ pokrivač prostora X. Time smo dokazali da $\mathcal{U}$ ima konačan potpokrivač. Dakle, prostor X je kompaktan. $\square$

Može se pokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. O tome govori Tihonovljev teorem čiji se dokaz može pronaći primjerice u [18].

Sada ćemo ponoviti neke osnovne koncepte vezane za aksiome separacije.

Definicija 7. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X:*
• T_1-prostor *ako za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoje redom njihove okoline $U, V \subseteq X$, takve da $x \notin V$ i $y \notin U$;*
• Hausdorffov prostor *(ili T_2-prostor) ako za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoje njihove disjunktne okoline.*



Slika 1. Prikaz T_1-prostora (lijevo) i Hausdorffovih prostora (desno), [15].

Primijetimo da je svaki Hausdorffov prostor T_1-prostor, dok obrat ne vrijedi općenito (vidi [15], [23]). Hausdorffovi prostori imaju jedno jako bitno svojstvo, a to je da svaki konvergentan niz u takvom prostoru ima jedinstveni limes, što nije općenito slučaj u općim topološkim prostorima.

Definicija 8. ([23]) *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Reći ćemo da je točka $x \in X$:*
• gomilište skupa A *u prostoru X ako svaka okolina točke x u prostoru*

X sadrži barem jednu točku skupa $A \setminus \{x\}$;
• ω-gomilište skupa *A u prostoru X ako svaka okolina točke x u prostoru X sadrži beskonačno mnogo točaka skupa A.*

Nijedan konačan podskup topološkog prostora nema nijedno ω-gomilište, ali može imati gomilišta. Dakle, pojam ω-gomilišta nema smisla za konačne podskupove prostora. Primijetimo da je svako ω-gomilište podskupa i njegovo gomilište, ali nije općenito svako gomilište i ω-gomilište čak ni u slučaju beskonačnih podskupova prostora. Primjerice, za svaki $a \in \mathbb{R}$ neka je $\langle \cdot, a\rangle := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ te promotrimo prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$, gdje je $\mathcal{T}_{lz} := \{\langle \cdot, a\rangle : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ *topologija lijevih zraka* (vidite [18], [14]). Točka 2 je gomilište beskonačnog podskupa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ koje nije njegovo ω-gomilište u $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$. Međutim, u T_1-prostorima je gomilište ekvivalentan pojam s ω-gomilištem.

Teorem 9. *Neka je X topološki prostor. Tada je X T_1-prostor ako i samo ako je gomilište svakog podskupa od X ujedno i njegovo ω-gomilište.*

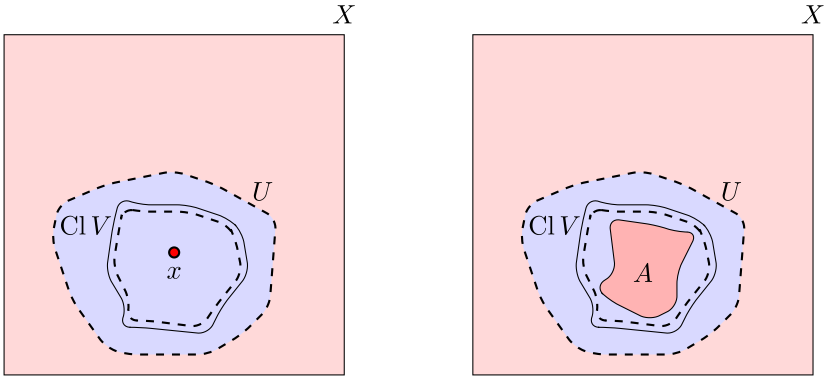
Dokaz. Neka je X T_1-prostor i $A \subseteq X$ po volji odabran podskup od X koji ima barem jedno gomilište u prostoru X. Neka je $x \in X$ po volji odabrano gomilište skupa A u prostoru X i V njegova po volji odabrana okolina. Pretpostavimo da je $V \cap A$ konačan, tj. $V \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ za koji je $x \neq x_i$, postoji okolina U_i točke x, tako da je $x_i \notin U_i$. Ako za neki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $x_i = x$, onda stavimo da je $U_i := X$. Neka je $U := V \cap (\bigcap_{i=1}^{n} U_i)$. Tada je U okolina točke x koja ne siječe $A \setminus \{x\}$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je x gomilište skupa A. Time smo dokazali da je x ω-gomilište skupa A.

Pretpostavimo da je gomilište svakog podskupa od X ujedno i njegovo ω-gomilište. Pretpostavimo da su x i y različite točke prostora X, takve da svaka okolina točke x sadrži y. Tada je x gomilište skupa $\{y\}$ koje nije njegovo ω-gomilište, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, X je T_1-prostor. □

Neka je (x_n) niz u prostoru X i x_0 ω-gomilište skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (primijetimo da je tada $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nužno beskonačan). Tada svaka okolina U točke x_0 sadrži beskonačno mnogo točaka skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji prirodni broj $n' > n$ takav da je $x_{n'} \in U$, što je definicija gomilišta niza (vidite primjerice [9], [15], [18]), pa slijedi da je x_0 i gomilište niza (x_n). Dakle, u T_1-prostoru je gomilište skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ujedno i gomilište niza (x_n).

Sada definiramo T_1-prostore s nekim posebnim svojstvima koja će se pokazati *jačima* od svojstva Hausdorffovosti.

Definicija 10. *Neka je X T_1-prostor. Reći ćemo da je prostor X:*
• regularan *ako za svaku točku $x \in X$ i njezinu okolinu U postoji njezina*



Slika 2. Prikaz regularnih (lijevo) i normalnih prostora (desno), [15].

okolina V*, takva da je* $\operatorname{Cl} V \subseteq U$*;*
• normalan *ako za svaki zatvoren podskup* $A \subseteq X$ *i svaki otvoren podskup* $U \subseteq X$ *takav da je* $A \subseteq U$*, postoji otvoreni podskup* $V \subseteq X$ *takav da je* $A \subseteq V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq U$*.*

Može se pokazati da je svaki normalan prostor i regularan, te da je svaki regularan prostor Hausdorffov, dok odgovarajući obrati ne vrijede općenito (vidi [15], [18], [23]).

Bez dokaza navodimo Tietzeovu karakterizaciju normalnosti, čiji dokaz možete pronaći primjerice u [11], [13], [15].

Teorem 11. *Neka je* X T_1*-prostor. Tada je* X *normalan ako i samo ako za svaki zatvoren podskup* $A \subseteq X$ *i svako neprekidno preslikavanje* $g : A \to \mathbb{R}$ *postoji neprekidno preslikavanje* $f : X \to \mathbb{R}$ *takvo da je* $f(a) = g(a)$*, za svaki* $a \in A$*.*

Sada ćemo ponoviti osnovne koncepte koji spadaju pod aksiome prebrojivosti.

Definicija 12. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$*. Reći ćemo da je* $\mathcal{B}$ baza prostora X *ako za svaki neprazan otvoren podskup* $U \subseteq X$ *i svaku njegovu točku* $x \in U$ *postoji* $B \in \mathcal{B}$ *tako da je* $x \in B \subseteq U$*.*

Reći ćemo da je prostor X 2-prebrojiv *(ili da* zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti*) ako postoji njegova prebrojiva*[3] *ili konačna baza.*

Primijetimo da svaki otvoreni pokrivač 2-prebrojivog prostora ima prebrojiv ili konačan potpokrivač, ali navedeni prostor nije općenito kompaktan.

[3]Pod pojmom *prebrojiv skup* smatramo skup ekvipotentan skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Definicija 13. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* metrizabilan *ako postoji metrika d na X čija množina svih otvorenih kugala čini bazu prostora X. U tom slučaju kažemo da je topologija na X* inducirana *metrikom d.*

Može se pokazati da je svaki metrizabilan prostor normalan, dok obrat ne vrijedi općenito. Stoviše, vrijedi sljedeći međuodnos svojstava prostora:

$$\text{metrizabilan} \xrightarrow{\subsetneq} \text{normalan} \xrightarrow{\subsetneq} \text{regularan} \xrightarrow{\subsetneq} \text{Hausdorffov} \xrightarrow{\subsetneq} T_1$$

Definicija 14. *Neka je X topološki prostor i $x \in X$ neka točka. Reći ćemo da je množina okolina $\mathcal{B}(x)$ točke x njezina* lokalna baza *ili* baza okolina *ako za svaku okolinu U točke x postoji $V \in \mathcal{B}(x)$ tako da je $V \subseteq U$.*

Reći ćemo da je prostor X 1-prebrojiv *(ili da* zadovoljava 1. aksiom prebrojivosti*) ako svaka točka prostora X ima prebrojivu ili konačnu lokalnu bazu.*

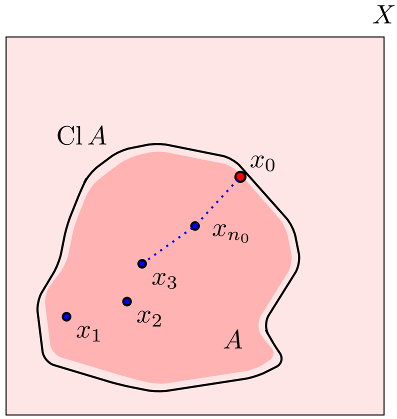
Primijetimo da se, koristeći činjenicu da je presjek konačno mnogo okolina također okolina točke, lako dokaže da se u 1-prebrojivom prostoru za svaku točku može pronaći silazan niz (U_n) čiji članovi tvore bazu okolina zadane točke.
Može se pokazati da, za svaki podskup A 1-prebrojivog prostora X, i svaku točku $x \in \operatorname{Cl} A$ postoji niz (x_n) u A koji konvergira prema točki x u prostoru X, tj. da za svaku okolinu U točke x u prostoru X postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki prirodni broj $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$ (vidite [2], [15]). Međutim, navedeno svojstvo ne karakterizira u potpunosti 1-prebrojive prostore. Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 15. ([4]) *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* Fréchet-Urysohnov prostor *ako za svaki podskup A i svaku točku $x \in \operatorname{Cl} A$ postoji niz (x_n) u A koji konvergira prema točki x u prostoru X.*

Sada navodimo jedno važno svojstvo Fréchet-Urysohnovih prostora koje ćemo koristiti u nastavku, a prije toga podsjetimo se pojma podniza.

Definicija 16. *Neka je (x_n) niz u skupu X i $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuće preslikavanje. Tada kompoziciju $x \circ n : \mathbb{N} \to X$ nazivamo* podnizom niza (x_n) *i označavamo s (x_{n_k}).*

Sjetimo se da, ako postoji konvergentan podniz nekog niza, onda je njegov limes zapravo gomilište početnog niza. Međutim, obrat ne vrijedi općenito. Naime, kasnije u primjeru 3 pokazat ćemo da postoje prostori



Slika 3. Prikaz konvergencije niza (x_n) sa članovima u skupu A koji konvergira prema $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ u prostoru X, [15].

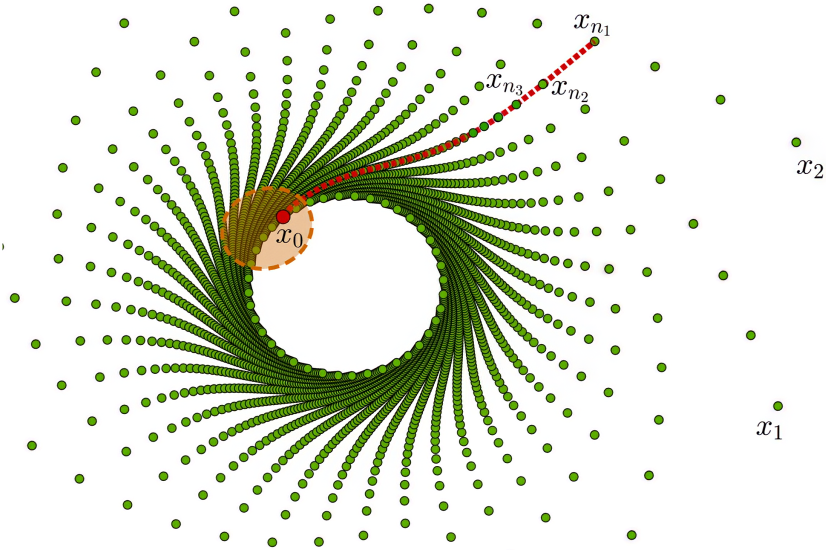
u kojima niz ima gomilište, ali nema podniz koji konvergira ka tom gomilištu. Sljedeća propozicija govori da se takvo što ne može dogoditi u 1-prebrojivim ili Fréchet-Urysohnovim T_1-prostorima.

Propozicija 17. *Neka je X Fréchet-Urysohnov T_1-prostor (ili samo 1-prebrojiv prostor) te (x_n) niz s gomilištem $x_0 \in X$ u prostoru X. Tada postoji podniz (x_{n_k}) niza (x_n) koji konvergira prema točki x_0 u prostoru X.*

Dokaz. Kao prvo, pretpostavimo da je X Fréchet-Urysohnov T_1-prostor. Razlikujemo dva slučaja.
1. Najprije pretpostavimo da x_0 nije gomilište skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada postoji okolina V točke x_0 u prostoru X, takva da je

$$(V \setminus \{x_0\}) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Budući da je x_0 gomilište niza (x_n), onda za svaki n postoji $n' > n$ takav da je $x_{n'} \in V$, što povlači da je $x_{n'} = x_0$. Sada se induktivno lako konstruira stacionaran podniz (x_{n_k}) niza (x_n) koji konvergira prema x_0, tj. $x_{n_k} = x_0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
2. Pretpostavimo da je x_0 gomilište skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Budući da je X Fréchet-Urysohnov prostor, postoji niz (y_m) u $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ koji konvergira u X prema x_0. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ neka je $I(y_m)$ najmanji prirodan broj takav da je $y_m = x_{I(y_m)}$. S obzirom da je X T_1-prostor, slijedi da je $\{I(y_m) : m \in \mathbb{N}\}$ beskonačan skup. Sada ćemo rekurzivno konstruirati strogo rastuća preslikavanja $m, n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je $y_{m_k} = x_{n_k}$,



Slika 4. Prikaz podniza (x_{n_k}) niza (x_n) koji konvergira prema gomilištu x_0 niza (x_n), [15].

$k \in \mathbb{N}$, te da podniz (x_{n_k}) niza (x_n) konvergira u X prema x_0. Kako je $y_1 = x_{I(y_1)}$, stavimo da je $m_1 := 1$ i $n_1 := I(y_1)$. Time smo proveli bazu indukcije. Pretpostavimo da smo definirali prirodne brojeve $m_1 < \cdots < m_k$ i $n_1 < \cdots < n_k$ te definirajmo m_{k+1} i n_{k+1}. Budući da je $\{I(y_m) : m \in \mathbb{N}\}$ beskonačan, to postoji prirodni broj m_{k+1} takav da je $m_{k+1} > m_k$ i $I(y_{m_{k+1}}) > n_k$. Sada stavimo da je $n_{k+1} := I(y_{m_{k+1}})$. Time je proveden korak indukcije. Dakle, (x_{n_k}) je podniz niza (x_n) za koji vrijedi $x_{n_k} = y_{m_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je V po volji odabrana okolina točke x_0 u prostoru X. Budući da niz (y_m) konvergira prema x_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $y_{m_k} \in V$, tj. $x_{n_k} \in V$. Time smo dokazali da podniz (x_{n_k}) niza (x_n) konvergira prema x_0 u prostoru X.

Sada pretpostavimo da je X samo 1-prebrojiv prostor. Tada postoji silazan niz okolina (U_n) točke x_0 u prostoru X. Sada ćemo rekurzivno definirati strogo rastući niz (n_k) u $\mathbb{N}$, tako da je $x_{n_k} \in U_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz čega će direktno slijediti da je (x_{n_k}) traženi podniz niza (x_n), koji konvergira prema x_0 u prostoru X. Budući da je x_0 gomilište niza (x_n), to postoji prirodni broj $n_1 > 1$, takav da je $x_{n_1} \in U_1$. Pretpostavimo da smo definirali prirodne brojeve $n_1 < \cdots < n_k$, $k \in \mathbb{N}$, s gornjim svojstvom i definirajmo n_{k+1}. Sada za okolinu U_{k+1} i n_k postoji prirodni broj $n_{k+1} > n_k$ takav da je $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$. Time smo rekurzivno definirali niz (n_k) u $\mathbb{N}$ sa svojstvom da je (x_{n_k}) podniz niza (x_n) koji konvergira prema x_0 u prostoru X. $\square$

Očito je svaki 1-prebrojiv prostor Fréchet-Urysohnov, a svaki 2-prebrojiv prostor i 1-prebrojiv, dok odgovarajući obrati ne vrijede općenito (vidi [4], [15]). Isto tako, svaki metrizabilan prostor je 1-prebrojiv, ali postoje i 1-prebrojivi prostori koji nisu metrizabilni. Može se pokazati da je 2-prebrojiv regularan prostor metrizabilan. O tome govori čuveni Urysohnov metrizacijski teorem (vidi [12], [15], [18]).

Podsjetimo na još jedan pojam vezan uz aksiome prebrojivosti.

Definicija 18. *Neka je X topološki prostor i $D \subseteq X$. Reći ćemo da je podskup D* gust *u X ako svaki neprazan otvoren podskup od X siječe D.*

Reći ćemo da je prostor X separabilan *ako postoji njegov gust prebrojiv ili konačan podskup.*

Može se pokazati da je svaki 2-prebrojiv prostor i separabilan, ali da obrat ne vrijedi općenito. Međutim, u klasi metrizabilnih prostora separabilnost i 2-prebrojivost su ekvivalentna svojstva (vidi [15], [18]). Općenito vrijedi sljedeći međuodnos:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{1-prebrojiv} \arrow[r, "\subsetneq"] & \text{Fréchet-Urysohnov} \\
\text{2-prebrojiv} \arrow[ur, "\subsetneq"] \arrow[dr, "\subsetneq"] & & \\
 & \text{separabilan} \arrow[ul, bend left, red, "\text{metrizabilnost}"] &
\end{tikzcd}$$

2. Kompaktnost u metrizabilnim prostorima

U ovom odjeljku dokazat ćemo opće poznate karakterizacije kompaktnosti u klasi metrizabilnih prostora: kompaktnost u metrizabilnim prostorima može se objasniti preko konvergencije, preko gomilišta nizova, preko gomilišta beskonačnih podskupova prostora te preko omeđenosti neprekidnih realnih preslikavanja (vidite [2], [11], [12], [22]).

Teorem 19. *Neka je X metrizabilan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.

(ii) Svaki beskonačan podskup od X ima gomilište.
(iii) Svaki niz u X ima gomilište.
(iv) Svaki niz u X ima konvergentan podniz.
(v) Svako neprekidno realno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ je omeđeno.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Pretpostavimo da je X kompaktan i da postoji beskonačan podskup A od X koji nema gomilište. Tada za svaki $a \in A$ postoji otvoren podskup V_a, takav da je $V_a \cap A = \{a\}$. Budući da A nema gomilišta, slijedi da je A zatvoren u X. Sada je $\{V_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ otvoreni pokrivač od X koji nema konačan potpokrivač, što je kontradikcija s kompaktnošću prostora X.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je (x_n) po volji odabran niz u X. Ako je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ konačan, onda postoji $m \in \mathbb{N}$, tako da je x_m gomilište niza (x_n). Ako je pak $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan, onda, po pretpostavci, postoji njegovo gomilište x_0. Budući da je X metrizabilan, a time i T_1-prostor, slijedi da je x_0 ω-gomilište skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sada svaka okolina točke x_0 sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, a time i članova niza (x_n), pa slijedi da je x_0 gomilište niza (x_n).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Slijedi direktno jer je metrizabilan prostor 1-prebrojiv, a time i Fréchet-Urysohnov.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Pretpostavimo da postoji neprekidno realno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ koje nije omeđeno. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$, tako da je $f(x_n) > n$. Primijetimo da niz $(f(x_n))$ nema gomilište u $\mathbb{R}$, a time ni konvergentan podniz. Kada bi (x_n) imao konvergentan podniz, onda bi, zbog neprekidnosti, i $(f(x_n))$ imao konvergentan podniz, što je kontradikcija. Dakle, (x_n) nema konvergentan podniz, što je kontradikcija s pretpostavkom (iv).

$(v) \Rightarrow (i)$. Najprije ćemo dokazati da je prostor X 2-prebrojiv, što onda povlači da svaki otvoreni pokrivač prostora X ima prebrojivo ili konačno otvoreno profinjenje. Nakon toga ćemo dokazati da svaki prebrojiv otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Navedene dvije tvrdnje nam direktno dokazuju da je prostor X kompaktan.

Dokažimo da je X 2-prebrojiv. Budući da su separabilnost i 2-prebrojivost ekvivalentna svojstva na klasi metrizabilnih prostora, dovoljno je dokazati da je X separabilan. Neka je d po volji odabrana metrika koja inducira topologiju na X. Pretpostavimo da se X ne može pokriti s konačno mnogo otvorenih kugala polumjera $\varepsilon > 0$. Sada se rekurzivno može definirati niz (x_n), takav da je $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, za sve različite $n, m \in \mathbb{N}$.

Za x_1 uzmimo po volji odabranu točku prostora X. Pretpostavimo da smo definirali točke $x_1, \dots, x_n$, za $n \in \mathbb{N}$, s gore navedenim svojstvom. Tada postoji točka

$$x_{n+1} \in X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \Big).$$

Time smo rekurzivno definirali niz (x_n) u prostoru X s gornjim svojstvom, iz kojeg slijedi da je $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zatvoren i diskretan u prostoru X. Sada je dobro definirano i neprekidno preslikavanje $g : A \to \mathbb{R}$, zadano s $g(x_n) := n$, $n \in \mathbb{N}$. Po Tietzeovoj karakterizaciji normalnosti (teorem 11) postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, tako da je $f(x_n) = g(x_n) = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim, to je kontradikcija s tvrdnjom (v). Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$, prostor X se može pokriti s konačno mnogo otvorenih kugala polumjera ε. Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ uzmemo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pa postoji skup $D_n := \Big\{ x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n \Big\} \subseteq X$, tako da je

$$X = \bigcup_{i=1}^{k(n)} B\Big(x_i^n, \frac{1}{n} \Big).$$

Neka je $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Primijetimo da je D najviše prebrojiv podskup od X. Tvrdimo da je D gust u X. Neka je U po volji odabran neprazan otvoren podskup od X i $x \in U$ po volji odabrana točka. Sada postoji realni broj $r > 0$, takav da je $B(x, r) \subseteq U$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < r$. Tada postoji $i \in \{1, \dots, k(n)\}$, takav da je $x \in B\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)$, tj. $d(x, x_i^n) < \frac{1}{n} < r$, pa je $x_i^n \in D \cap U$. Time smo dokazali da je D gust u X, pa je X separabilan.

Dokažimo sada da svaki prebrojiv otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji otvoreni prebrojivi pokrivač $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ prostora X, gdje su U_n i U_m različiti za različite $n, m \in \mathbb{N}$, koji nema konačan potpokrivač. Sada rekurzivno definiramo niz (x_n) u X, takav da je

$$x_n \in X \setminus \Big(\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Big),$$

za svaki $n \geq 2$. Odaberimo $x_1 \in X \setminus U_1$ po volji i pretpostavimo da smo definirali točke $x_1, \dots, x_n$ s gornjim svojstvom, za $n \in \mathbb{N}$. Budući da $\mathcal{U}$ nema konačan potpokrivač, to postoji

$$x_{n+1} \in X \setminus \Big(\{x_1, \dots, x_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \Big).$$

Time smo definirali niz (x_n) u X s međusobno različitim članovima. Neka je $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdimo da A nema nijedno gomilište u X. U suprotnom bi neko gomilište x_0 bilo element od U_m, za neki $m \in \mathbb{N}$, što povlači da bi U_m sadržavao beskonačno mnogo članova niza (x_n), a to je kontradikcija s konstrukcijom niza (x_n). Budući da A nema gomilište u X slijedi da je A zatvoren i diskretan. Neka je $g : \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ preslikavanje, zadano s $g(x_n) := n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je A diskretan, slijedi da je g neprekidno. Po Tietzeovoj karakterizaciji normalnosti (teorem 11) postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ tako da je $f(x_n) = g(x_n) = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa f nije omeđeno, što je kontradikcija s tvrdnjom (v). $\square$

Primijetimo da su svojstva metrike korištena samo u dokazu $(v) \Rightarrow (i)$, dok se u dokazu $(iii) \Rightarrow (iv)$ iskoristila samo 1-prebrojivost (točnije, Fréchet-Urysohnovo svojstvo), u $(iv) \Rightarrow (v)$ *dobro ponašanje* neprekidnih preslikavanja prema konvergenciji nizova, a u dokazu $(ii) \Rightarrow (iii)$ aksiom separacije T_1, što će nas motivirati za daljnja poopćenja.

3. Razna poopćenja kompaktnosti

U ovom odjeljku posebno ćemo promotriti svojstva $(ii) - (v)$ iz teorema 19 općenito u topološkim prostorima. Svako od navedenih svojstava, osim svojstva (iv), dat će jedno poopćenje kompaktnosti. Započet ćemo sa svojstvom (iii), a završiti s definicijom klase prostora koji poopćavaju kompaktnost i metrizabilnost te u kojima vrijedi analogon teorema 19 (vidite [1], [4], [21], [15], [17], [23]).

3.1. Od prebrojive kompaktnosti, preko njezinih poopćenja do karakterizacija kompaktnosti

Definicija 20. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* prebrojivo kompaktan *ako svaki prebrojiv otvoren pokrivač prostora X ima konačno otvoreno profinjenje.*

Sada navodimo karakterizacije prebrojive kompaktnosti.

Teorem 21. *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je prebrojivo kompaktan.
(ii) Svaki prebrojiv otvoren pokrivač prostora X ima konačan potpokrivač.
(iii) Svaka prebrojiva centrirana množina zatvorenih podskupova od X ima neprazan presjek.

(iv) Svaki silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova od X ima neprazan presjek.
(v) Svaki niz u X ima barem jedno gomilište.
(vi) Svaki beskonačan podskup od X ima barem jedno ω-gomilište.
(vii) Svaki prebrojiv podskup od X ima barem jedno ω-gomilište.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran prebrojiv otvoren pokrivač prostora X. Budući da je X prebrojivo kompaktan, postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ postoji neki $U_V \in \mathcal{U}$, takav da je $V \subseteq U_V$. Neka je $\mathcal{U}' := \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$. Tada je $\mathcal{U}'$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $\mathcal{F}$ po volji odabrana prebrojiva centrirana množina zatvorenih podskupova od X. Pretpostavimo da je presjek množine $\mathcal{F}$ prazan skup. Neka je $\mathcal{U} := \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ prebrojivi otvoreni pokrivač prostora X, pa postoji njegov konačan potpokrivač $\{X \setminus F_1, \ldots, X \setminus F_n\}$, za $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$. Sada je

$$\emptyset = X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) \Big) = \bigcap_{i=1}^{n} F_i,$$

što je kontradikcija sa centriranošću množine $\mathcal{F}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je (F_n) silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova od X. Tada je $\mathcal{F} := \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva ili konačna centrirana množina zatvorenih podskupova od X. Ako je $\mathcal{F}$ konačna množina, tvrdnja (iv) slijedi direktno. Ako je pak $\mathcal{F}$ prebrojiva množina, tvrdnja (iv) slijedi direktno iz tvrdnje (iii).

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka je (x_n) po volji odabran niz u prostoru X i $F_n := \operatorname{Cl}\{x_k : k \geq n\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je (F_n) silazni niz zatvorenih nepraznih podskupova od X. Iz tvrdnje (iv) postoji točka $x_0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Neka je U po volji odabrana okolina točke x_0 i $n \in \mathbb{N}$. Tada je $U \cap \{x_k : k \geq n+1\} \neq \emptyset$, pa postoji prirodni broj $n' > n$, takav da je $x_{n'} \in U$. Time smo dokazali da je x_0 gomilište niza (x_n) u prostoru X.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Neka je A po volji odabran beskonačan podskup od X. Tada postoji niz (x_n) u podskupu A s međusobno različitim članovima. Po tvrdnji (v) postoji gomilište $x_0 \in X$ niza (x_n) u prostoru X. Sada svaka okolina točke x_0 sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n). Budući da su svi članovi niza (x_n) međusobno različiti, slijedi da je x_0 ω-gomilište podskupa A u prostoru X.

$(vi) \Rightarrow (vii)$ slijedi direktno.

$(vii) \Rightarrow (i)$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ po volji odabran prebrojiv otvoren pokrivač prostora X. Bez smanjenja općenitosti, neka je $U_n \neq \emptyset$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ nema konačno otvoreno profinjenje. Tada $\mathcal{U}$ očito nema konačan potpokrivač, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točka $x_n \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$. Sada je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv, pa postoji njegovo ω-gomilište $x_0 \in X$. Budući da je $\mathcal{U}$ pokrivač prostora X, postoji $m \in \mathbb{N}$, takav da je $x_0 \in U_m$. Sada za dani m postoji $n > m$, takav da je $x_n \in U_m$, što je kontradikcija s definicijom niza točaka (x_n). Dakle, pokrivač $\mathcal{U}$ ima otvoreno konačno profinjenje. Time smo dokazali da je X prebrojivo kompaktan prostor. □

Očito je svaki kompaktan prostor i prebrojivo kompaktan. Međutim, obrat ne vrijedi općenito, kao što to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1. ([23]) *Da bismo pokazali sljedeći primjer potrebno je uvesti definiciju rednog (ili ordinalnog) broja (vidite* [19], [20], [25]*), a za to nam treba definicija dobro uređenog skupa. Svaki parcijalno uređen skup u kojem svaki neprazan podskup ima minimum nazivamo* dobro uređenim skupom*. Može se pokazati da je svaki dobro uređeni skup i* potpuno uređen *tj. da su svaka dva njegova elementa* usporediva*. Svaki skup skupova koji je dobro uređen relacijom* biti element *($\in$) nazivamo* rednim *(ili* ordinalnim*)* brojem*. Može se pokazati da je svaki skup rednih brojeva dobro uređen s obzirom na relaciju* biti element *(vidi* [20]*) te da je $\emptyset$, kojeg označavamo s 0, najmanji redni broj. Za svaki redni broj α različit od 0 označimo s $[0, \alpha\rangle$ skup svih rednih brojeva strogo manjih (s obzirom na relaciju* biti element*) od α. Može se pokazati da je $\alpha = [0, \alpha\rangle$.*
Neka je ω_1 najmanji neprebrojivi redni broj i $X := [0, \omega_1\rangle$ te neka je na X dana pripadna uređajna topologija *(s obzirom na relaciju* biti element *koju ćemo označavati s $<$), tj. topologija čija je baza množina svih* otvorenih intervala $\langle a, b\rangle := \{x \in X : a < x < b\}$ *i* otvorenih zraka $\langle \cdot, a\rangle := \{x \in X : x < a\}$, $\langle a, \cdot\rangle := \{x \in X : x > a\}$*, za $a, b \in X$, $a < b$ (vidite* [15]*). Pokazat ćemo da je X prebrojivo kompaktan, a nije kompaktan. Neka je $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ po volji odabran otvoren prebrojiv pokrivač od X. Kada $\mathcal{U}$ ne bi imao konačan potpokrivač, onda bi vrijedilo*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U})(\exists a_n \in X)\ a_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Sada postoji supremum $a_0 \in X$ skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, pa se interval $[0, a_0]$ ne može pokriti s konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{U}$, što je kontradikcija s kompaktnošću od $[0, a_0]$. Dakle, $\mathcal{U}$ ima konačni potpokrivač, pa je X prebrojivo kompaktan.
Pokažimo da X nije kompaktan. Promatrajmo otvoreni pokrivač $\{[0, x\rangle : x \in X\}$. Pretpostavimo da je $\{[0, x_i\rangle : i = 1, \ldots, n\}$ neki njegov konačan

potpokrivač. Sada je skup svih gornjih međa skupa $\{x_n : i = 1, \ldots, n\}$ *u* X *neprazan (jer je* X *neprebrojiv) i ima minimum (jer je* X *dobro uređen), pa* $\{[0, x_i\rangle : i = 1, \ldots, n\}$ *nije pokrivač od* X *jer nijedan njegov element ne sadrži taj minimum.*

Primijetimo da je $[a, x]$, *za* $a < x$, *kompaktna okolina točke* x, *za svaki* $x \in \langle 0, \omega_1\rangle$, *te da je* $\{0\} = [0, 1\rangle$ *kompaktna okolina točke* 0. *Dakle, prostor* X *je* lokalno kompaktan *(vidi* [18]*) i prebrojivo kompaktan prostor koji nije kompaktan.*

3.1.1 Poopćenja prebrojive kompaktnosti

Primijetimo da se sada pojam prebrojive kompaktnosti i pojam ω-gomilišta može poopćiti na sljedeći način (vidite [1], [4], [19]).

Definicija 22. *Neka je* X *topološki prostor i* α *neki beskonačan kardinalni broj*[4]. *Reći ćemo da je* X α-kompaktan *ako svaki otvoren pokrivač od* X *kardinalnosti najviše* α *ima konačno otvoreno profinjenje.*

Primjetimo da je prostor prebrojivo kompaktan ako i samo ako je ω-kompaktan. Očito je prostor α-kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač od X kardinalnosti najviše α ima konačan potpokrivač.

Teorem 23. *Neka je* X *topološki prostor i* α *neki beskonačan kardinalni broj. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X *je* α*-kompaktan.*
(ii) Svaka centrirana množina zatvorenih podskupova od X *kardinalnosti najviše* α *ima neprazan presjek.*

Dokaz. Dokaz slijedi analogno kao dokaz teorema 6. □

Prisjetimo se kako se prebrojiva kompaktnost karakterizirala preko ω-gomilišta, pa je ideja da se pokuša α-kompaktnost karakterizirati preko α-gomilišta. U tu svrhu definiramo sljedeći pojam.

Definicija 24. *Neka je* X *topološki prostor,* α *neki beskonačan kardinalni broj i* $A \subseteq X$ *beskonačan podskup od* X. *Reći ćemo da je točka* x α-gomilište skupa A *u prostoru* X *ako za svaku okolinu* V *točke* x *u prostoru* X *vrijedi* $\operatorname{card}(A \cap V) \geq \min\{\alpha, \operatorname{card} A\}$.

Ako su α i β kardinalni brojevi takvi da je $\alpha < \beta$, onda je svako β-gomilište beskonačnog skupa i njegovo α-gomilište. Primijetimo da ako beskonačan podskup topološkog prostora ima α-gomilište, za $\alpha \geq \omega$, onda je to gomilište i ω-gomilište. Posebno je svako α-gomilište i gomilište danog podskupa prostora. Da bismo dokazali sljedeću propoziciju koristit ćemo pojam *transfinitne rekurzije* (vidi [25]) koji predstavlja

[4]Za definiciju kardinalnog broja vidite primjerice [19], [20].

generalizaciju općepoznatog *Teorema rekurzije.* Naime, ugrubo, transfinitnu rekurziju možemo zamisliti kao uobičajnu rekurziju po prirodnim brojevima, samo što prirodne brojeve zamjenjuje po volji odabran dobro uređen skup (najčešće neki redni broj).

Propozicija 25. *Neka je X topološki prostor i α neki beskonačan kardinalni broj. Ako svaki podskup od X kardinalnosti barem α ima barem jedno α-gomilište, onda je X α-kompaktan.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\mathcal{U}$ neki otvoreni pokrivač od X kardinalnosti najviše α koji ne dopušta konačan potpokrivač. Sada postoji minimalni kardinalni broj γ, takav da postoji množina $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ kardinalnosti γ koja je potpokrivač od $\mathcal{U}$. Primijetimo da je $\gamma \geq \aleph_0$. Prenesimo dobru uređenost od γ na $\mathcal{V}$ (to možemo jer postoji bijekcija između γ i $\mathcal{V}$). Sada $\mathcal{V}$ možemo zapisati na način $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta < \gamma\}$.

Za svaki $\beta < \gamma$ transfinitnom rekurzijom definirat ćemo točku $x_\beta \in X$ tako da vrijedi

$$x_\beta \in X \setminus \Big(\Big(\bigcup_{\beta' \leq \beta} V_{\beta'} \Big) \cup \{x_{\beta''} : \beta'' < \beta\} \Big).$$

Za minimalni redni broj $\beta = 0$ uzmimo po volji točku $x_0 \in X \setminus V_0$. Neka je β po volji odabran redni broj takav da je $0 < \beta < \gamma$ i pretpostavimo da smo definirali $x_{\beta'} \in X$, za svaki $0 \leq \beta' < \beta$ s gornjim svojstvom. Budući da je $\operatorname{card}([0, \beta\rangle) < \gamma$, slijedi da je $X \setminus \Big(\bigcup_{\beta' < \beta} V_{\beta'} \Big) \neq \emptyset$ i njegov kardinalni broj je veći ili jednak γ. Naime, u suprotnom bi se X mogao pokriti podmnožinom od $\mathcal{V}$ kardinalnosti strogo manje od γ, pa bi postojao potpokrivač od $\mathcal{U}$ kardinalnosti strogo manje od γ, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, postoji točka

$$x_\beta \in X \setminus \Big(\Big(\bigcup_{\beta' \leq \beta} V_{\beta'} \Big) \cup \{x_{\beta''} : \beta'' < \beta\} \Big).$$

Time smo, transfinitnom rekurzijom, definirali skup $A := \{x_\beta : \beta < \gamma\}$ čije točke zadovoljavaju gornje svojstvo.

Iz konstrukcije slijedi da je $x_\beta \neq x_{\beta'}$, za sve različite $\beta \neq \beta'$ za koje vrijedi $\beta, \beta' < \gamma$. To povlači da je $\operatorname{card} A = \operatorname{card}\, [0, \gamma\rangle = \gamma \geq \aleph_0$. Po pretpostavci postoji α-gomilište x skupa A u prostoru X. Budući da je $\{V_\beta : \beta < \gamma\}$ pokrivač za X, postoji $\beta < \gamma$, takav da je $x \in V_\beta$. Kako je $\gamma \leq \alpha$, slijedi da je $\operatorname{card}(V_\beta \cap A) = \gamma = \operatorname{card} A$. Međutim, ako je $x_{\beta'} \in V_\beta$, onda je $\beta > 0$ i $\beta' < \beta$, što povlači da je

$$\operatorname{card}(V_\beta \cap A) \leq \operatorname{card}([0, \beta\rangle) = \beta < \gamma = \operatorname{card} A,$$

a to je kontradikcija. Dakle, X je α-kompaktan prostor. □

Zanimljivo je da obrat navedene tvrdnje vrijedi općenito ako vrijedi *Generalizirana hipoteza kontinuuma* ([19]) koja tvrdi da ni za jedan beskonačan kardinalni broj α ne postoji kardinalni broj β takav da je $\alpha < \beta < 2^\alpha$. Međutim, obrat je vrijedio kod prebrojive kompaktnosti (ili ω-kompaktnosti), iz razloga što je skup svih konačnih podskupova (tj. onih kardinalnosti strogo manje od ω) prebrojivog skupa prebrojiv, tj. iste kardinalnosti kao i početni skup.

Teorem 26. *Za sljedeće tvrdnje vrijedi* $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.
(i) *Generalizirana hipoteza kontinuuma.*
(ii) *Za svaki beskonačan skup* X*, skup svih njegovih podskupova kardinalnosti strogo manje od* $\operatorname{card} X$ *je kardinalnosti* $\operatorname{card} X$.
(iii) *Za svaki beskonačan kardinalni broj* α*, svaki* α*-kompaktan prostor ima svojstvo da svaki njegov podskup kardinalnosti barem* α *ima barem jedno* α*-gomilište.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je X po volji odabran beskonačan skup kardinalnosti α i $\mathcal{K}$ skup svih njegovih podskupova kardinalnosti strogo manje od α. Očito je $\alpha \leq \operatorname{card} \mathcal{K} \leq 2^\alpha$. Razlikujemo dva slučaja.
Najprije pretpostavimo da postoji kardinalni broj β, takav da je $2^\beta = \alpha$. Tada je svaki element od $\mathcal{K}$ kardinalnosti manje ili jednake β. Sada je kardinalnost od $\mathcal{K}$ manja ili jednaka

$$\alpha \cdot \alpha^\beta = \alpha \cdot 2^{\beta \cdot \beta} = \alpha \cdot 2^\beta = \alpha \cdot \alpha = \alpha.$$

Sada pretpostavimo da je $\alpha = \sup \{\beta : \beta \text{ je kardinalni broj i } \beta < \alpha\}$, ali ne postoji kardinalni broj β takav da je $2^\beta = \alpha$. Kako je $\alpha^\alpha = 2^{\beta\alpha} = 2^\alpha$, to je $\alpha^\beta < \alpha^\alpha = 2^\alpha$, za svaki kardinalni broj $\beta < \alpha$. Sada je $\alpha^\beta \leq \alpha$, za svaki kardinalni broj $\beta < \alpha$. Primijetimo da je

$$\operatorname{card} \mathcal{K} \leq \alpha \cdot \sup \left\{\alpha^\beta : \beta \text{ je kardinalni broj i } \beta < \alpha\right\} \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha.$$

Time smo dokazali da je $\operatorname{card} \mathcal{K} = \alpha = \operatorname{card} X$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $A \subseteq X$ po volji odabran podskup od X kardinalnosti barem α. Neka je $\mathcal{F}$ množina skupova $\operatorname{Cl}(A \setminus P)$, za svaki $P \subseteq A$ kardinalnosti strogo manje od α. Lako se vidi da je $\mathcal{F}$ centrirana množina zatvorenih podskupova od X. Po tvrdnji (ii) postoji $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Pretpostavimo da postoji okolina V točke x u prostoru X tako da je $\operatorname{card}(V \cap A) < \alpha$. Sada stavimo $P := V \cap A$. Primijetimo da vrijedi $\operatorname{Cl}(A \setminus P) \in \mathcal{F}$, pa je $x \in \operatorname{Cl}(A \setminus P)$, odnosno $\emptyset \neq V \cap (A \setminus P) = V \cap (A \setminus (V \cap A)) = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, točka x je barem jedno α-gomilište podskupa A u prostoru X. $\square$

Sada se svakako postavlja pitanje jesu li prethodne tri tvrdnje ekvivalentne. Međutim, odgovor (ako se uopće može dati) zahtijeva podrobniju analizu problema sa stajališta teorije skupova, što izlazi iz okvira ovog rada, a po mišljenju autora, [19] može poslužiti kao dobra podloga za razmatranje navedenog problema.

Primijetimo da iz dokaza prethodnog teorema slijedi korolar.

Korolar 27. *Neka je α beskonačan kardinalni broj te X 2^α-kompaktan prostor. Tada svaki podskup od X kardinalnosti barem α ima barem jedno α-gomilište.*

3.1.2 Karakterizacije kompaktnosti

Definicija α-gomilišta nas dovodi do definicije potpunog gomilišta i *karakterizacije kompaktnosti u terminima gomilišta skupova* (vidite [1], [15]).

Definicija 28. *Neka je X topološki prostor, $A \subseteq X$ te $x \in X$ gomilište podskupa A u X. Reći ćemo da je x* potpuno gomilište *skupa A ako za svaku okolinu V točke x vrijedi* $\operatorname{card}(A \cap V) = \operatorname{card} A$.

Očito je svako potpuno gomilište nekog skupa kardinalnosti barem α i njegovo α-gomilište, za kardinalni broj α. Međutim, ako se radi o skupu koji je kardinalnosti strogo veće od α, onda on može imati α-gomilište koje nije potpuno gomilište.

Teorem 29. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako svaki beskonačan podskup od X ima barem jedno potpuno gomilište.*

Dokaz. Analogno kao dokaz propozicije 25 i dokaz tvrdnje $(ii) \Rightarrow (iii)$ u teoremu 26. □

Prisjetimo se da se prebrojiva kompaktnost karakterizirala u terminima gomilišta skupova, ali i gomilišta nizova. Prethodno smo naveli analogon prve karakterizacije za kompaktnost, pa nam preostaje definirati poopćenje nizova kako bismo naveli analogon druge karakterizacije. O tome govori sljedeća definicija.

Definicija 30. *Za parcijalno uređen skup $(D, \leq)$ kažemo da je* usmjeren *ako za sve $x, y \in D$ postoji $z \in D$ takav da je $x \leq z$ i $y \leq z$.*

Ako u definiciji niza domenu $\mathbb{N}$ zamijenimo proizvoljnim usmjerenim skupom, dobijamo pojam mreže ([2], [4], [8], [15]).

Definicija 31. *Neka je X skup i D usmjeren skup. Tada svako preslikavanje $x : D \to X$ nazivamo* mrežom *na skupu X i označavamo s $(x_d)_{d \in D}$ (ili kraće s (x_d)), pri čemu je $x_d := x(d)$, $d \in D$.*

Primijetimo kako domena mreže nije *fiksirana*, što nam omogućava dodatnu slobodu izbora mreže u nekom skupu. Definirajmo sada pojam gomilišta mreže.

Definicija 32. *Neka je X topološki prostor i $(x_d)_{d\in D}$ mreža u X. Za točku $x_0 \in X$ kažemo da je* gomilište mreže *$(x_d)_{d\in D}$ ako za svaku okolinu V točke x_0 u X i svaki $d \in D$ postoji $d' \in D$ takav da je $d \leq d'$ i $x_{d'} \in V$.*

Primijetimo da se $d \leq d'$ može zamijeniti strogom nejednakosti ako i samo ako je D beskonačan, što onda pokazuje da je gomilište niza zapravo gomilište odgovarajuće mreže.

Zanimljivo je da se analogno kao i kod nizova može pokazati da je x_0 gomilište mreže $(x_d)_{d\in D}$ ako i samo ako je $x_0 \in \bigcap\limits_{d\in D} \mathrm{Cl}\{x_{d'} : d' \in D,\, d' \geq d\}$ (vidi primjerice [15]). Na taj smo način mreži $(x_d)_{d\in D}$ pridružili centriranu množinu $\mathcal{D} := \{\mathrm{Cl}\{x_{d'} : d' \in D,\, d' \geq d\} : d \in D\}$ zatvorenih podskupova od X. S druge strane, ako za centriranu množinu $\mathcal{F}$ zatvorenih podskupova promotrimo množinu svih njezinih konačnih presjeka zajedno s antiinkluzijskim uređajem $\supseteq$, dobivamo jedan usmjeren skup. Sada iz svakog konačnog presjeka možemo odabrati po volji neku točku. Na taj način možemo centriranoj množini pridružiti mrežu čiji je skup gomilišta zapravo presjek navedene centrirane množine. Dakle, iz prethodnog direktno slijedi naredni teorem.

Teorem 33. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako svaka mreža u X ima barem jedno gomilište.*

Analogno se pokaže da je prostor α-kompaktan ako i samo ako svaka mreža čija je domena kardinalnosti najviše α ima barem jedno gomilište.

Sada možemo iskazati sljedeći teorem u kojem navodimo sve dosad dokazane karakterizacije kompaktnosti.

Teorem 34. *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) Svaka centrirana množina zatvorenih podskupova od X ima neprazan presjek.
(iii) Svaki beskonačan podskup od X ima barem jedno potpuno gomilište.
(iv) Svaka mreža u X ima barem jedno gomilište.

3.2. Gomilišna kompaktnost

Vratimo se sada na teorem 21. Iz navedenog teorema slijedi da je zahtjev da svaki beskonačan skup ima gomilište (ne nužno ω-gomilište) *preslab* kako bi prostor bio prebrojivo kompaktan. Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 35. ([15], [23]) *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* gomilišno kompaktan *ako svaki beskonačan podskup od X ima barem jedno gomilište.*

Očito je svaki prebrojivo kompaktan prostor i gomilišno kompaktan, dok obrat ne vrijedi općenito, o čemu svjedoči sljedeći primjer.

Primjer 2. ([16]) *Definirajmo $B_n := \{2n-1, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{T}$ množina svih unija ovakvih skupova. Lako se vidi da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{N}$ kojoj je $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ baza. Prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ nije prebrojivo kompaktan, jer je baza $\mathcal{B}$ prebrojiv otvoren pokrivač od $\mathbb{N}$ koji nema konačan potpokrivač. Pokažimo da je $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ gomilišno kompaktan. Dokazat ćemo da svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ ima gomilište, pa će posebno to vrijediti i za svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan neprazan podskup i neka je $a \in A$ proizvoljan. Ako je a neparan, onda svaka okolina od $a+1$ sadrži a pa je $a+1$ gomilište od A. Ako je a paran, onda svaka okolina od $a-1$ sadrži a, pa je $a-1$ gomilište od A.*

U slučaju da je X T_1-prostor, onda je, po teoremu 9, svako gomilište skupa $A \subseteq X$ ujedno i njegovo ω-gomilište, pa, u tom slučaju, po teoremu 21, vrijedi ekvivalencija prebrojive kompaktnosti i gomilišne kompaktnosti.

Sada se očito za svaki beskonačan kardinalni broj α može definirati *α-gomilišna kompaktnost* zahtijevajući da svaki podskup A prostora X sa svojstvom $\operatorname{card} A \geq \alpha$ ima barem jedno gomilište. Očito je gomilišno kompaktan prostor zapravo ω-gomilišno kompaktan te je svaki α-kompaktan prostor i α-gomilišno kompaktan.

3.3. Nizovna kompaktnost

Ako svaki niz topološkog prostora X ima konvergentan podniz, onda svaki niz ima i gomilište, pa, po teoremu 21, slijedi da je X prebrojivo kompaktan. Međutim, ako se ne radi o Fréchet-Urysohnovom T_1-prostoru (ili samo 1-prebrojivom prostoru), onda obrat ne vrijedi općenito, i ne samo to, već postoje kompaktni prostori u kojima postoji niz koji nema konvergentni podniz iako sam niz ima gomilište, o čemu svjedoči sljedeći primjer (vidite [21]).

Primjer 3. *Neka je $Z := \{0, 1\}$ diskretan prostor i $X := Z^{Z^{\mathbb{N}}}$ topološki produkt. Budući da je Z kompaktan, po Tihonovljevom teoremu slijedi da je X kompaktan. Pokazat ćemo da X nije nizovno kompaktan. Neka je (x_n) niz u X zadan s $x_n((z_m)) := z_n$, $n \in \mathbb{N}$, za svaki $(z_m) \in Z^{\mathbb{N}}$.*

Tvrdimo da niz (x_n) *nema konvergentni podniz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je* (x_{n_k}) *konvergentni podniz niza* (x_n)*. Tada za svaki* $(z_m) \in Z^{\mathbb{N}}$ *koordinatni niz* $(x_{n_k}(z_m))_{n_k} = (z_{n_k})$ *konvergira u* Z*, što povlači da je stacionaran. Neka je* (y_m) *niz u* Z*, zadan s* $y_m := 0$ *ako je* $m = n_{2k}$ *za* $k \in \mathbb{N}$*, i* $y_m := 1$ *inače. Tada je* $(x_{n_k}(y_m))_{n_k} = (y_{n_k})$ *stacionaran, što je kontradikcija. Dakle,* X *nije nizovno kompaktan, što povlači da* X *nije ni Fréchet-Urysohnov, pa ni* 1*-prebrojiv prostor.*

Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 36. *Neka je* X *topološki prostor. Reći ćemo da je* X nizovno kompaktan *ako svaki niz u* X *ima konvergentan podniz.*

Dakle, nizovno kompaktan prostor je i prebrojivo kompaktan, ali obrat ne vrijedi općenito ako se ne radi o Fréchet-Urysohnovom T_1-prostoru (ili samo 1-prebrojivom prostoru). Naime, po propoziciji 17, u Fréchet-Urysohnovom T_1-prostoru (ili samo 1-prebrojivom prostoru) niz ima gomilište ako i samo ako ima konvergentan podniz. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 37. *Neka je* X *nizovno kompaktan prostor. Tada je* X *i prebrojivo kompaktan. Ako je, dodatno,* X *Fréchet-Urysohnov* T_1*-prostor (ili samo* 1*-prebrojiv prostor), onda vrijedi obrat.*

Dakle, kompaktnost i nizovna kompaktnost impliciraju prebrojivu kompaktnost, ali postoje kompaktni prostori koji nisu nizovno kompaktni. Postavlja se pitanje postoje li prostori koji su nizovno kompaktni, a nisu kompaktni. Takav je prostor iz primjera 1 jer je 1-prebrojiv i prebrojivo kompaktan, pa je i nizovno kompaktan, ali nije kompaktan.

3.4. Pseudokompaktnost

Ostaje nam promotriti svojstvo (v) u teoremu 19. Budući da je svaki prebrojivo kompaktan podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}$ i omeđen, te da je prebrojiva kompaktnost invarijanta neprekidnih preslikavanja, slijedi da je svako neprekidno realno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, s prebrojivo kompaktnom domenom X, omeđeno. Međutim, obrat ne vrijedi općenito. Štoviše, u idućem primjeru navest ćemo prostor s navedenim svojstvom koji nije gomilišno kompaktan, a time ni prebrojivo kompaktan.

Primjer 4. ([15]) *Neka je na* $\mathbb{R}$ *dana topologija* $\mathcal{T}_0 := \{U \subseteq \mathbb{R} : 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$*. Primijetimo da* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ *nije gomilišno kompaktan prostor, jer, primjerice, beskonačan podskup* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *nema gomilište. S druge strane, dokazat ćemo da je svako neprekidno preslikavanje s domenom* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ *i kodomenom* $\mathbb{R}$ *s euklidskom topologijom omeđeno. Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

proizvoljno takvo preslikavanje i neka je $y_0 := f(0)$. *Tvrdimo da za po volji odabranu točku* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *vrijedi* $f(x) = y_0$. *Naime, u suprotnom bi* $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{y_0\})$ *bio neprazan otvoren skup koji ne sadrži* 0, *što je kontradikcija. Dakle,* $f(x) = y_0$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

Sada ima smisla sljedeća definicija ([1], [3], [4]).

Definicija 38. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* pseudokompaktan *ako je svako neprekidno realno preslikavanje* $f : X \to \mathbb{R}$ *(s euklidskom topologijom na* $\mathbb{R}$*) omeđeno.*

Primijetimo da je prostor iz primjera 2 gomilišno kompaktan, a ne samo da nije prebrojivo kompaktan nego nije ni pseudokompaktan. U primjeru 4 smo pokazali da pseudokompaktnost ne povlači gomilišnu kompaktnost. Nadalje, svaki prebrojivo kompaktan prostor je pseudokompaktan. Obrat ne vrijedi općenito, ali vrijedi u klasi normalnih prostora.

Propozicija 39. *Neka je X pseudokompaktan normalan prostor. Tada je X prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji beskonačan skup A koji nema nijedno ω-gomilište. Budući da je X normalan, to je i T_1-prostor, pa A nema nijedno gomilište. To povlači da je potprostor A diskretan i zatvoren u X. Zbog beskonačnosti skupa A, postoji njegov prebrojiv podskup $B \subseteq A$. Primijetimo da je B diskretan i zatvoren podskup od X. Budući da je B prebrojiv, postoji injekcija $g : B \to \mathbb{R}$, takva da je $g(B) = \mathbb{N}$. Primijetimo da je g neprekidno preslikavanje sa zatvorenog podskupa B normalnog prostora X. Po Tietzeovoj karakterizaciji normalnosti (teorem 11) postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, tako da je $f(b) = g(b)$, za svaki $b \in B$. Dakle, f je neomeđeno neprekidno realno preslikavanje, što je kontradikcija s pseudokompaktnošću prostora X. □

Neka je (Y, d) metrički prostor. S obzirom da je d neprekidno preslikavanje, slijedi da je i preslikavanje $y \mapsto d(y_0, y)$ neprekidno za svaki odabir točke $y_0 \in Y$. Neka je X pseudokompaktan prostor i $f : X \to Y$ po volji odabrano neprekidno preslikavanje. Tada je preslikavanje $x \mapsto d(y_0, f(x))$ neprekidno, pa je i omeđeno. To pokazuje da je i f omeđeno preslikavanje. Time smo pokazali da se umjesto euklidskog prostora, za domenu preslikavanja f u definiciji pseudokompaktnosti mogu ekvivalentno uzeti svi metrički prostori.

3.5. Lindelöfovi prostori i moguća poopćenja

Sjetimo se da je jedan od načina za poopćenje kompaktnosti bila *prebrojiva kompaktnost*, u kojoj smo zamijenili zahtjev da svaki otvoreni pokrivač ima konačno otvoreno profinjenje zahtjevom da svaki *prebrojivi* otvoreni pokrivač ima konačno otvoreno profinjenje. Drugi način za poopćenje bi bio da dopustimo više slobode u izboru otvorenih profinjenja. Naime, umjesto zahtjeva za postojanjem konačnog otvorenog profinjenja, možemo dopustiti da profinjenja budu najviše prebrojiva. To nas dovodi do pojma Lindelöfovih prostora (vidite [1], [4], [15], [23]).

Definicija 40. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* Lindelöfov prostor *ako svaki otvoreni pokrivač prostora X ima prebrojivo ili konačno otvoreno profinjenje.*

Primijetimo da se otvoreno profinjenje u definiciji Lindelöfovog prostora može ekvivalentno zamijeniti s potpokrivačem. Očito kompaktnost povlači Lindelöfovost, ali može se pokazati da čak 2-prebrojivost povlači Lindelöfovost, budući da za po volji odabran otvoren pokrivač prostora možemo pronaći njegovo prebrojivo ili konačno otvoreno profinjenje s elementima iz prebrojive ili konačne baze prostora. Po tome slijedi da je euklidski prostor $\mathbb{R}$ Lindelöfov, iako nije kompaktan. Sada ćemo dati primjer prostora koji je Lindelöfov (pa čak i separabilan), a nije 2-prebrojiv.

Primjer 5. ([15]) *Neka je na $\mathbb{R}$ dana topologija $\mathcal{T}_{dl}$ kojoj je*

$$\mathcal{B} := \{[a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

baza. Navedenu topologiju nazivamo topologijom donjeg limesa*, a prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ nazivamo* Sorgenfreyevim pravcem. *Očito je Sorgenfreyev pravac separabilan prostor, budući da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv gust podskup od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$.*

Pokažimo da Sorgenfreyev pravac nije 2-prebrojiv. Neka je $\mathcal{B}'$ po volji odabrana baza Sorgenfreyevog pravca. Sada za svaku točku $x \in \mathbb{R}$ i njezinu okolinu $[x, x+1\rangle$ postoji $B_x \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B_x \subseteq [x, x+1\rangle$, pa je $x = \min B_x$. Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{B}'$ preslikavanje zadano s $\varphi(x) := B_x$, $x \in \mathbb{R}$. Sada se korištenjem minimuma lako vidi da je φ injekcija, pa je $\operatorname{card} \mathbb{R} \leq \operatorname{card} \mathcal{B}'$, što povlači da je $\mathcal{B}'$ neprebrojiva baza. Dakle, Sorgenfreyev pravac nije 2-prebrojiv.

Pokažimo da je Sorgenfreyev pravac Lindelöfov prostor. Neka je $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ proizvoljan otvoreni pokrivač Sorgenfreyevog pravca. Neka je $\mathcal{V}$ množina intervala $V = [a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, takvih da postoji barem jedan $\lambda \in \Lambda$, takav da je $V \subseteq U_\lambda$. Iz svojstva baze topologije slijedi da je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač prostora $\mathbb{R}$. Po konstrukciji pokrivača $\mathcal{V}$ slijedi da je $\mathcal{V}$ profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Sada je dovoljno pokazati da $\mathcal{V}$ ima prebrojivo ili konačno otvoreno profinjenje. Za svaki element $V = [a, b\rangle$ pokrivača $\mathcal{V}$ definirajmo $V' := \langle a, b\rangle$. Neka je $\mathcal{V}'$ množina svih takvih

V'. Primijetimo da je $\mathcal{V}'$ otvoreni pokrivač potprostora $Y := \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'} V'$, s obzirom na standardnu topologiju. Kako je standardna topologija na $\mathbb{R}$ 2-prebrojiva i metrizabilna, to je i Y metrizabilan i 2-prebrojiv kao potprostor od $\mathbb{R}$, pa je i Lindelöfov. Dakle, $\mathcal{V}'$ ima prebrojivo otvoreno profinjenje $\mathcal{V}''$. Kako topologija donjeg limesa profinjuje standardnu topologiju, to su elementi množine $\mathcal{V}''$ otvoreni s obzirom na topologiju donjeg limesa. Pokažimo da je $Z := \mathbb{R} \setminus Y$ najviše prebrojiv. Za svaki $z \in Z$ postoji barem jedan element V_z pokrivača $\mathcal{V}$ koji ga sadrži. Primijetimo da $V_z = [a_z, b_z\rangle$ ne sadrži nijedan drugi element skupa Z različit od z i vrijedi $a_z = z$, jer bi inače došli u kontradikciju s definicijom skupa Z. Kako je $\mathbb{Q}$ uređajno gust na $\mathbb{R}$, to za svaki $z \in Z$ postoji $q_z \in \mathbb{Q}$, takav da je $z = a_z < q_z < b_z$. Time je dobro definirano preslikavanje $\varphi : Z \to \mathbb{Q}$, zadano s $\varphi(z) := q_z$, $z \in Z$. Primijetimo da je φ injekcija, jer su V_{z_1} i V_{z_2} disjunktni za različite $z_1, z_2 \in Z$, pa su $\varphi(z_1) = q_{z_1}$ i $\varphi(z_2) = q_{z_2}$ različiti. Time smo dokazali da je $\operatorname{card} Z \leq \operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$. Neka je $\mathcal{V}'''$ množina sastavljena od V_z, za svaki $z \in Z$, i svih elemenata množine $\mathcal{V}''$. Tada je $\mathcal{V}'''$ prebrojiv ili konačan otvoren pokrivač Sorgenfreyevog pravca $\mathbb{R}$. Trivijalno se vidi iz konstrukcije da je $\mathcal{V}'''$ profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$.

Međutim, poput 2-prebrojivosti i separabilnosti, 2-prebrojivost i Lindelöfovost su ekvivalentna svojstva u klasi metrizabilnih prostora (vidi [4], [15]).

Nadalje, topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako je prebrojivo kompaktan i Lindelöfov. Sada direktno slijedi teorem.

Teorem 41. *Neka je X normalan Lindelöfov Fréchet-Urysohnov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) X je nizovno kompaktan.
(iv) X je gomilišno kompaktan.
(v) X je pseudokompaktan.

Dakle, našli smo klasu koja poopćava kompaktnost i u kojoj vrijedi analogon teorema 19. Međutim, nije svaki metrizabilan prostor Lindelöfov. Primjerice, diskretan neprebrojiv prostor nije Lindelöfov, ali je metrizabilan. U sljedećem odjeljku tražimo klasu prostora koja, s jedne strane, poopćava kompaktnost, a, s druge strane, metrizabilnost, i za koju vrijedi analogon teorema 19.

Sada ćemo karakterizirati Lindelöfove prostore po uzoru na teorem 29.

Teorem 42. *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) Prostor X je Lindelöfov.
(ii) Za svaku množinu zatvorenih podskupova od X takvu da svaka njezina prebrojiva ili konačna podmnožina ima neprazan presjek vrijedi da je njezin presjek neprazan.
(iii) Svaki neprebrojiv podskup od X ima barem jedno potpuno gomilište.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ po volji odabrana množina zatvorenih podskupova od X takva da svaka njezina prebrojiva ili konačna podmnožina ima neprazan presjek. Tada $\{X \setminus F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ nije pokrivač od X, jer bi u suprotnom postojao njegov konačan ili prebrojiv potpokrivač, što je kontradikcija sa svojstvom množine $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Budući da $\{X \setminus F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ nije pokrivač od X, slijedi da množina $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ima neprazan presjek.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je A po volji odabran neprebrojiv podskup od X i neka je $\mathcal{F}$ množina skupova $\mathrm{Cl}\,(A \setminus P)$, za svaki podskup $P \subseteq A$ takav da je $\mathrm{card}\, P < \mathrm{card}\, A$. Budući da je A neprebrojiv, lako se vidi da je $\mathcal{F}$ množina zatvorenih podskupova od X sa svojstvom (ii). Po tvrdnji (ii) postoji $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Pretpostavimo da postoji okolina V točke x u prostoru X tako da je $\mathrm{card}\,(V \cap A) < \mathrm{card}\, A$. Sada stavimo $P := V \cap A$. Primijetimo da vrijedi $\mathrm{Cl}\,(A \setminus P) \in \mathcal{F}$, pa je $x \in \mathrm{Cl}\,(A \setminus P)$, odnosno $\emptyset \neq V \cap (A \setminus P) = V \cap (A \setminus (V \cap A)) = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, točka x je barem jedno potpuno gomilište podskupa A u prostoru X.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Tvrdnju ćemo dokazati svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\mathcal{U}$ neki otvoreni pokrivač od X koji ne dopušta konačan ili prebrojiv potpokrivač. Sada postoji minimalni kardinalni broj γ, takav da je množina $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ kardinalnosti γ potpokrivač od $\mathcal{U}$. Primijetimo da je $\gamma > \aleph_0$. Prenesimo dobru uređenost od γ na $\mathcal{V}$ (to možemo jer postoji bijekcija između γ i $\mathcal{V}$). Sada $\mathcal{V}$ možemo zapisati na način $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta < \gamma\}$.

Za svaki $\beta < \gamma$ transfinitnom rekurzijom definirat ćemo točku $x_\beta \in X$ tako da vrijedi

$$x_\beta \in X \setminus \Big(\Big(\bigcup_{\beta' \leq \beta} V_{\beta'}\Big) \cup \{x_{\beta''} : \beta'' < \beta\}\Big).$$

Za minimalni redni broj $\beta = 0$ uzmimo po volji točku $x_0 \in X \setminus V_0$. Neka je β po volji odabran redni broj takav da je $0 < \beta < \gamma$ i pretpostavimo da smo definirali $x_{\beta'} \in X$, za svaki $0 \leq \beta' < \beta$ s gornjim svojstvom. Budući da je $\mathrm{card}\,([0, \beta\rangle) < \gamma$, slijedi da je $X \setminus \Big(\bigcup_{\beta' < \beta} V_{\beta'}\Big) \neq \emptyset$ i njegov kardinalni broj je veći ili jednak γ. Naime, u suprotnom bi se X mogao pokriti podmnožinom od $\mathcal{V}$ kardinalnosti strogo manje od γ, pa bi postojao potpokrivač od $\mathcal{U}$ kardinalnosti strogo manje od γ, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, postoji točka

$$x_\beta \in X \setminus \Big(\Big(\bigcup_{\beta' \leq \beta} V_{\beta'} \Big) \cup \{x_{\beta''} : \beta'' < \beta\} \Big).$$

Time smo, transfinitnom rekurzijom, definirali skup $A := \{x_\beta : \beta < \gamma\}$ čije točke zadovoljavaju gornje svojstvo.

Iz konstrukcije slijedi da je $x_\beta \neq x_{\beta'}$, za sve različite $\beta \neq \beta'$ za koje vrijedi $\beta, \beta' < \gamma$. To povlači da je $\operatorname{card} A = \operatorname{card} [0, \gamma\rangle = \gamma > \aleph_0$. Po tvrdnji (iii) postoji potpuno gomilište x skupa A u prostoru X. Budući da je $\{V_\beta : \beta < \gamma\}$ pokrivač za X, postoji $\beta < \gamma$, takav da je $x \in V_\beta$. Sada je $\operatorname{card}(V_\beta \cap A) = \operatorname{card} A$. Međutim, ako je $x_{\beta'} \in V_\beta$, onda je $\beta > 0$ i $\beta' < \beta$, što povlači da je

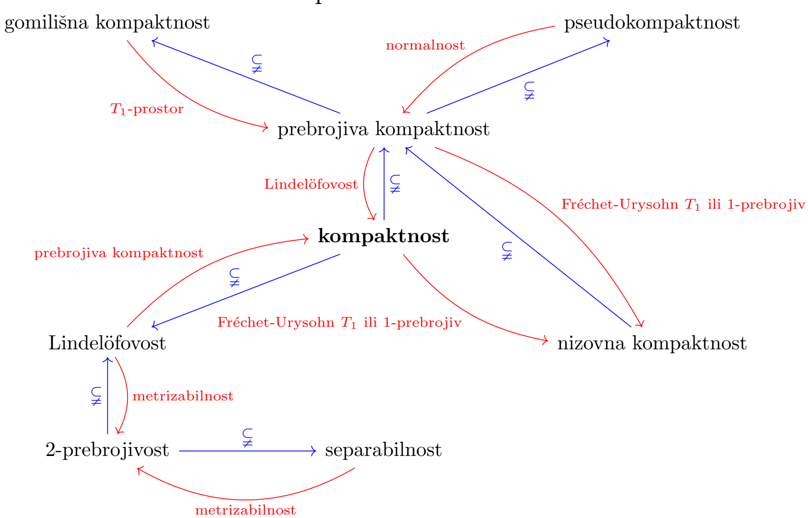
$$\operatorname{card}(V_\beta \cap A) \leq \operatorname{card}([0, \beta\rangle) < \gamma = \operatorname{card} A,$$

a to je kontradikcija. Dakle, X je Lindelöfov prostor. $\square$

Primijetimo da se pojam Lindelöfovog prostora lako poopćava tako što umjesto prebrojivog ili konačnog otvorenog profinjenja proizvoljnog otvorenog pokrivača zahtijevamo postojanje otvorenog profinjenja kardinalnosti najviše α, za neki unaprijed odabran beskonačan kardinalni broj α. Po uzoru na prethodni teorem može se pokazati da prostor X ima prethodno navedeno svojstvo ako i samo ako svaki podskup od X kardinalnosti strogo veće od α ima barem jedno potpuno gomilište.

Sada se lako vidi da je prostor s navedenim svojstvom kompaktan ako i samo ako je α-kompaktan.

Na kraju navodimo dijagram na kojem prikazujemo odnose među klasama do sada definiranih prostora.



4. Ireducibilnost i karakterizacije kompaktnosti

Po teoremu 19 slijedi da su kompaktnost i prebrojiva, gomilišna, nizovna kompaktnost te pseudokompaktnost ekvivalentni pojmovi na klasi metrizabilnih prostora. Međutim, nisu svi kompaktni prostori i metrizabilni. Stoga želimo pronaći nadklasu kompaktnih prostora koja će biti nadklasa metrizabilnih prostora i u kojoj će vrijediti analogon teorema 19. Budući da su prebrojiva, gomilišna, nizovna kompaktnost i pseudokompaktnost ekvivalentni na klasi 1-prebrojivih normalnih prostora, najprije ćemo pronaći klasu prostora u kojoj je prebrojiva kompaktnost ekvivalentna kompaktnosti, a potom dodati 1-prebrojivost i normalnost.

Neka je X topološki prostor i $K \subseteq X$ njegov prebrojiv ili konačan podskup koji nema nijedno gomilište. Tada je K zatvoren podskup od X, pa je $U_0 := X \setminus K$ otvoren u X. Primijetimo da za svaki $x \in K$ postoji neki otvoreni podskup $U_x \subseteq X$ takav da je $K \cap U_x = \{x\}$, pa je $\mathcal{U} := \{U_x : x \in K\} \cup \{U_0\}$ otvoreni pokrivač prostora X koji nema pravi potpokrivač. Ako je X prebrojivo kompaktan, onda je pokrivač $\mathcal{U}$ konačan. Sada se postavlja pitanje, ako imamo otvoreni pokrivač s gornjim svojstvom s proizvoljno mnogo elemenata, je li on nužno konačan ako se radi o prebrojivo kompaktnom prostoru. To nas motivira za definiciju ireducibilnog pokrivača (vidite [3], [5], [6], [23]).

Definicija 43. *Neka je X skup i $\mathcal{U}$ njegov pokrivač. Reći ćemo da je $\mathcal{U}$* ireducibilan *ako nijedna njegova prava podmnožina $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{U}$ nije pokrivač skupa X.*

Neka je X skup i $\mathbb{P}$ skup svih njegovih pokrivača. Tada je $(\mathbb{P}, \supseteq)$ parcijalno uređen skup. Dakle, ireducibilan pokrivač skupa X je maksimalni element skupa $(\mathbb{P}, \supseteq)$. Sada navodimo karakterizaciju ireducibilnih pokrivača, čiji jednostavni dokaz ostavljamo čitatelju.

Teorem 44. *Neka je X skup i $\mathcal{U}$ neki njegov pokrivač. Tada je $\mathcal{U}$ ireducibilan ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji točka $x \in X$, tako da nijedan element pokrivača $\mathcal{U}$ osim U ne sadrži x.*

Definicija 45. ([6]) *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* ireducibilan *ako svaki otvoreni pokrivač od X ima otvoreno ireducibilno profinjenje.*

Primijetimo da je svaki kompaktan prostor ireducibilan jer svaki konačan pokrivač ima ireducibilni potpokrivač. O odnosu Lindelöfovih prostora i ireducibilnih prostora govore sljedeći primjeri.

Primjer 6. *Neka je na $\mathbb{R}$ dana topologija lijevih zraka $\mathcal{T}_{lz}$ definirana na stranici 46. Tada je $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ 2-prebrojiv prostor, pa je i Lindelöfov.*

Naime, $\mathcal{B} := \{\langle\cdot, q\rangle : q \in \mathbb{Q}\}$ *je prebrojiva baza prostora* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$. *Neka je* $\mathcal{U}$ *po volji odabran otvoreni pokrivač prostora* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$. *Za sve* $U, V \in \mathcal{U}$ *vrijedi* $U \subseteq V$ *ili* $V \subseteq U$, *iz čega slijedi da je* $\mathcal{U}$ *ireducibilan ako i samo ako je jednočlan, tj. ako i samo ako je* $\mathcal{U} = \{\mathbb{R}\}$. *Time smo pokazali da primjerice otvoreni pokrivač* $\{\langle\cdot, n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ *nema ireducibilno otvoreno profinjenje, pa prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ *nije ireducibilan, iako je Lindelöfov.*

Primjer 7. *Neka je na* $\mathbb{R}$ *dana diskretna topologija* $\mathcal{D}$. *Tada* $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ *nije Lindelöfov, jer, primjerice, otvoreni pokrivač* $\mathcal{V} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ *nema prebrojiv ili konačan potpokrivač. S druge strane, pokrivač* $\mathcal{V}$ *je ireducibilan i profinjuje svaki otvoreni pokrivač od* $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, *čime smo dokazali da je* $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ *ireducibilan.*

Međutim, u sljedećem odjeljku pokazat ćemo da su svi regularni Lindelöfovi prostori ireducibilni, ali da obrat ne vrijedi općenito čak ni u klasi metrizabilnih prostora.

Neka je $\mathcal{U}$ ireducibilni pokrivač skupa X. Tada za svaki $U \in \mathcal{U}$, po teoremu 44, možemo odabrati točku $x_U \in X$ (ne nužno jedinstvenu), takvu da nijedan element pokrivača $\mathcal{U}$ osim U ne sadrži x_U. Stavimo da je $X(\mathcal{U}) := \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$. Primijetimo da je preslikavanje $U \mapsto x_U$ bijektivno, pa je $\operatorname{card}\mathcal{U} = \operatorname{card}(X(\mathcal{U}))$.

Propozicija 46. *Neka je* X *topološki prostor i* $\mathcal{U}$ *neki njegov otvoreni ireducibilni pokrivač. Tada* $X(\mathcal{U})$ *nema nijedno* ω*-gomilište u prostoru* X.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ ireducibilan otvoren pokrivač od X. Pretpostavimo da je $x \in X$ neko ω-gomilište podskupa $X(\mathcal{U})$ u prostoru X. Tada postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $x \in U$. Sada je U otvorena okolina točke x i presjek $U \cap X(\mathcal{U})$ je beskonačan. To povlači postojanje nekog $V \in \mathcal{U}$, $V \neq U$, tako da je $x_V \in U$, što je kontradikcija s izborom točke x_V. □

Sada ćemo pokazati da su u prebrojivo kompaktnim prostorima ireducibilni otvoreni pokrivači nužno konačni.

Propozicija 47. *Neka je* X *prebrojivo kompaktan prostor. Tada je svaki otvoreni ireducibilni pokrivač prostora* X *konačan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren ireducibilan pokrivač prostora X. Po prethodnoj propoziciji $X(\mathcal{U})$ nema nijedno ω-gomilište. Budući da je X prebrojivo kompaktan, po teoremu 21 slijedi da je $X(\mathcal{U})$ konačan. Sada iz činjenice da je $\operatorname{card}(X(\mathcal{U})) = \operatorname{card}\mathcal{U}$ slijedi konačnost pokrivača $\mathcal{U}$. □

Postavlja se pitanje vrijedi li općenito obrat prethodne propozicije. O tome govori sljedeći primjer.

Primjer 8. *Neka je $\mathcal{T}_{lz}$ topologija lijevih zraka na $\mathbb{R}$. U primjeru 6 pokazali smo da je $\{\mathbb{R}\}$ jedini ireducibilni otvoreni pokrivač prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$, ali, s druge strane, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ nije prebrojivo kompaktan, jer, primjerice $\{\langle \cdot, n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojivi otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ koji nema konačan potpokrivač.*

Sada ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 48. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* ireducibilno kompaktan *ako je svaki njegov ireducibilan otvoren pokrivač konačan.*

Dakle, svaki prebrojivo kompaktan prostor je ireducibilno kompaktan, ali obrat ne vrijedi općenito. Međutim, vrijedi sljedeća propozicija.

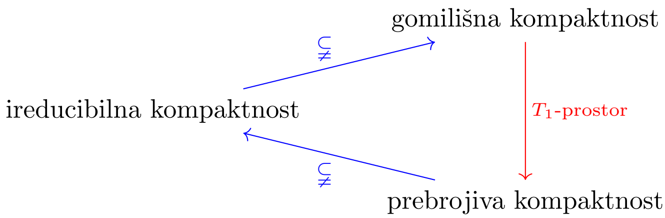
Propozicija 49. *Neka je X ireducibilno kompaktan prostor. Tada je X gomilišno kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo da X nije gomilišno kompaktan. Tada postoji beskonačan podskup A prostora X koji nema nijedno gomilište. To povlači da je A diskretan i zatvoren u X, pa za svaki $a \in A$ postoji otvoren podskup $V_a \subseteq X$, takav da je $V_a \cap A = \{a\}$. Ako je $A \neq X$, stavimo da je $\mathcal{V} := \{X \setminus A\} \cup \{V_a : a \in A\}$, a inače $\mathcal{V} := \{V_a : a \in A\}$. U svakom slučaju je $\mathcal{V}$ otvoreni ireducibilni pokrivač od X kardinalnosti najmanje $\operatorname{card} A$. Po pretpostavci je $\mathcal{V}$ konačan, što je kontradikcija s pretpostavkom da je A beskonačan podskup od X. $\square$

Da obrat prethodne propozicije ne vrijedi općenito svjedoči sljedeći primjer.

Primjer 9. *Neka je na $\mathbb{N}$ dana topologija iz primjera 2. Tada svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ ima gomilište, pa je $\mathbb{N}$ gomilišno kompaktan. Međutim, $\{\{2n-1, 2n\} : n \in \mathbb{N}\}$ je ireducibilan otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ koji nije konačan.*

Dakle, klasa ireducibilno kompaktnih prostora se *nalazi između* klase prebrojivo kompaktnih prostora i gomilišno kompaktnih prostora.



Sada direktno slijedi naredni korolar.

Korolar 50. *Neka je X T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je prebrojivo kompaktan.
(ii) X je ireducibilno kompaktan.
(iii) X je gomilišno kompaktan.

Dakle, prostor X je kompaktan ako i samo ako je ireducibilan i ireducibilno kompaktan. Sada navodimo karakterizaciju kompaktnih prostora u terminima ireducibilnosti i prebrojive kompaktnosti.

Teorem 51. *Neka je X topološki prostor. Tada je X kompaktan ako i samo ako je prebrojivo kompaktan ireducibilan prostor.*

Dokaz. Nužnost slijedi direktno. Dokažimo dovoljnost. Neka je $\mathcal{W}$ po volji odabran otvoren pokrivač prostora X. Tada postoji njegovo otvoreno ireducibilno profinjenje $\mathcal{U}$. Po propoziciji 47 slijedi da je $\mathcal{U}$ konačan. Dakle, X je kompaktan prostor. $\square$

Na koncu imamo sljedeće karakterizacije kompaktnosti na klasi ireducibilnih prostora.

Teorem 52. *Neka je X ireducibilan T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) Svaki niz u X ima gomilište.
(iv) Svaki beskonačan podskup od X ima ω-gomilište.
(v) X je ireducibilno kompaktan.
(vi) X je gomilišno kompaktan.

Ako je X, dodatno, Fréchet-Urysohnov (ili 1-prebrojiv) prostor, onda, uz ekvivalenciju svojstava $(i) - (vi)$, imamo ekvivalenciju i s nizovnom kompaktnošću.

Teorem 53. *Neka je X ireducibilan normalan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) Svaki niz u X ima gomilište.
(iv) Svaki beskonačan podskup od X ima ω-gomilište.
(v) X je ireducibilno kompaktan.
(vi) X je gomilišno kompaktan.
(vii) X je pseudokompaktan.

Ako je X, dodatno, Fréchet-Urysohnov (ili 1-prebrojiv) prostor, onda, uz ekvivalenciju svojstava $(i) - (vii)$, imamo ekvivalenciju i s nizovnom kompaktnošću.

Primijetimo da je svaki T_1 ireducibilan α-gomilišno kompaktan prostor, za $\alpha > \omega$, i Lindelöfov. Naime, u takvom prostoru je svaki ireducibilan otvoren pokrivač nužno prebrojiv ili konačan.

5. Metakompaktnost i parakompaktnost

Sada navodimo dvije poznate klase ireducibilnih prostora koje su veoma važne u općoj topologiji. Radi se o metakompaktnim i parakompaktnim prostorima. Pokazat ćemo da klasa parakompaktnih prostora sadrži i sve regularne Lindelöfove, ali i sve metrizabilne prostore. Parakompaktni prostori igraju ključnu ulogu kod metrizacijskih teorema, što ih čini jako bitnom klasom topoloških prostora (vidite [1], [3], [4], [18], [21]).

Definicija 54. *Neka je X skup i $\mathcal{U}$ neka množina njegovih podskupova. Tada definiramo* red množine $\mathcal{U}$ u točki $x \in X$ *kao kardinalni broj*

$$r(x,\mathcal{U}) := \operatorname{card}\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}.$$

Red množine $\mathcal{U}$ *definiramo kao kardinalni broj*

$$r(\mathcal{U}) := \sup\{r(x,\mathcal{U}) : x \in X\}.$$

Definicija 55. *Neka je X skup i $\mathcal{U}$ neka množina njegovih podskupova. Reći ćemo da je množina $\mathcal{U}$* točkovno konačna *ako je red množine $\mathcal{U}$ konačan u svakoj točki $x \in X$.*

Ako je $\mathcal{U}$ dodatno i pokrivač skupa X, onda kažemo da je $\mathcal{U}$ točkovno konačan pokrivač *skupa X.*

Primijetimo da se točkovna konačnost množine podskupova od X definirala općenito bez topologije na skupu X. Sada možemo definirati metakompaktne prostore.

Definicija 56. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* metakompaktan *ako svaki otvoreni pokrivač od X ima točkovno konačno otvoreno profinjenje.*

Sada uvodimo definiciju (jedne vrste) topološke dimenzije prostora (vidite [4], [18]).

Definicija 57. *Neka je X topološki prostor i α neki beskonačan (konačan) kardinalni broj. Reći ćemo da je* topološka dimenzija *(ili* Lebesgueova dimenzija pokrivanja*)* prostora X manja ili jednaka α *ako svaki otvoreni pokrivač od X ima otvoreno profinjenje reda najviše α $(\alpha + 1)$. Ako je α najmanji takav kardinalni broj, onda kažemo da je α* topološka dimenzija prostora X*.*

Ako je, dodatno, α konačan, onda kažemo da je prostor X konačnodimenzionalan *(u topološkom smislu).*

Razlog zašto u konačnom slučaju zbrajamo 1 leži u tome da se topološka dimenzija gradi po uzoru na izgradnju algebarske dimenzije euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, jer nam za uspostavljanje n-dimenzionalnosti prostora $\mathbb{R}^n$ kao vektorskog prostora također treba $n+1$ elemenata, npr., ishodište i još n različitih točaka za krajnje točke n koordinatnih vektora.

Primijetimo da je svaki konačnodimenzionalan prostor i metakompaktan, dok obrat ne vrijedi općenito. Međutim, konačnodimenzionalnost nije poopćenje kompaktnosti. U nastavku dajemo primjer prostora koji je kompaktan (a time i metakompaktan), ali nije konačnodimenzionalan, te primjer 0-dimenzionalnog prostora koji nije kompaktan.

Primjer 10. *Neka je na $\mathbb{R}$ dana takozvana* kofinitna topologija

$$\mathcal{K} := \{U \subseteq \mathbb{R} : \operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus U) < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$$

i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$. Ako je $\mathbb{R} \in \mathcal{U}$, onda je $\{\mathbb{R}\}$ traženi potpokrivač, stoga pretpostavimo da to nije slučaj. Sada postoje $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{R} \setminus U = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je $x_i \in U_i$. Dakle, $\{U, U_1, \ldots, U_n\}$ je otvoreni potpokrivač od $\mathcal{U}$. Time smo dokazali da je $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ kompaktan. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{V}$ množina svih podskupova V čiji komplement ima minimalno n točaka. Sada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$. Pretpostavimo da je $\mathcal{W}$ neko otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$. Tada komplement svakog elementa od $\mathcal{W}$ ima minimalno n elemenata. Primijetimo da $\mathcal{W}$ ima barem $n+1$ element $W_1, \ldots, W_{n+1} \in \mathcal{W}$. Budući da je $\mathbb{R}$ beskonačan, postoji

$$x \in \mathbb{R} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} (\mathbb{R} \setminus W_i) \Big) = \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i .$$

Dakle, $\mathcal{W}$ je reda barem $n+1+1 = n+2$. Time smo dokazali da je svako otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$ reda barem $n+2 > n$. Budući da je n po volji odabran, slijedi da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ nije konačnodimenzionalan.

Primjer 11. *Neka je X beskonačan diskretan topološki prostor. Tada X nije kompaktan, ali je 0-dimenzionalan. Naime, množina svih jednotočkovnih podskupova od X je otvoreno profinjenje svakog otvorenog pokrivača od X reda 1, pa je dimenzija prostora X jednaka $1 - 1 = 0$.*

U sljedećem primjeru pokazujemo kako je topološka dimenzija potprostora $[0,1]$ euklidskog prostora $\mathbb{R}$ jednaka 1, koliko iznosi i algebarska dimenzija prostora $\mathbb{R}$.

Primjer 12. ([18]) *Neka je na $\mathbb{R}$ dana euklidska topologija. Tvrdimo da je potprostor $[0,1]$ 1-dimenzionalan. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni* *pokrivač od* $[0,1]$*. Tada postoji Lebesgueov broj* $\rho > 0$ *(vidi [18]) takav da svaki pokrivač od* $[0,1]$ *čiji elementi imaju dijametar najviše* ρ *profinjuje* $\mathcal{U}$*. Neka je*

$$\mathcal{V} := \left\{[0,1] \cap \left\langle \frac{\rho n}{2} - \frac{\rho}{2}, \frac{\rho n}{2} + \frac{\rho}{2} \right\rangle : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ *otvoreno profinjenje pokrivača* $\mathcal{U}$*, tako da se svaka točka od* $[0,1]$ *nalazi u najviše dva elementa pokrivača* $\mathcal{V}$*. Time smo dokazali da je* $r([0,1]) \leq 2$*. S druge strane, promotrimo pokrivač* $\mathcal{W} := \{[0,1\rangle, \langle 0,1]\}$ *prostora* $[0,1]$*. Pretpostavimo da postoji njegovo otvoreno profinjenje* $\mathcal{W}'$ *reda* 1*. Sada postoji* $W \in \mathcal{W}'$ *takav da je* $W \subseteq [0,1\rangle$ *i postoji barem jedan* $V \in \mathcal{W}'$ *takav da je* $V \subseteq \langle 0,1]$*. Neka je* $V' := \bigcup(\mathcal{W}' \setminus \{W\})$*. Budući da je* $\mathcal{W}'$ *reda* 1*, to su* W *i* V' *disjunktni. Sada iz* $W \cup V' = [0,1]$ *slijedi kontradikcija s povezanošću prostora* $[0,1]$ *(vidi [18]). Time smo dokazali da je* $r([0,1]) \geq 2$*, odnosno* $r([0,1]) = 2$*. Budući da se radi o konačnom redu pokrivača, slijedi da je dimenzija prostora* $[0,1]$ *jednaka* $2 - 1 = 1$*. Može se pokazati da je, u klasi metrizabilnih prostora, topološka dimenzija potprostora manja ili jednaka dimenziji prostora (vidite primjerice [4]), pa je* $\langle 0,1\rangle$ *primjer konačnodimenzionalnog prostora (dimenzije* 0 *ili* 1*) koji nije kompaktan.*

Sada ćemo pokazati da je svaki metakompaktan prostor ireducibilan. Da bismo dokazali navedenu tvrdnju, treba nam *Zornova lema* koju navodimo bez dokaza (vidi [20]).

Teorem 58 (Zornova lema)**.** *Neka je* $(P, \preceq)$ *parcijalno uređen skup. Ako svaki potpuno uređen podskup od* P *ima gornju među, onda* P *ima barem jedan maksimalni element.*

Propozicija 59. *Neka je* X *skup i* $\mathcal{U}$ *neki njegov pokrivač. Ako je* $\mathcal{U}$ *točkovno konačan, onda postoji njegov ireducibilni potpokrivač.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{U}$ skup svih potpokrivača od $\mathcal{U}$. Tada je $(\mathbb{U}, \supseteq)$ parcijalno uređen skup. Da bismo pokazali da $\mathcal{U}$ ima ireducibilni potpokrivač, dovoljno je dokazati da $(\mathbb{U}, \supseteq)$ ima barem jedan maksimalni element. Neka je $\mathbb{P}$ po volji odabran potpuno uređen podskup od $(\mathbb{U}, \supseteq)$ i neka je $\mathcal{P} := \bigcap \mathbb{P}$. Tada je $\mathcal{P}$ podmnožina od $\mathcal{U}$. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka. Budući da je $\mathcal{U}$ točkovno konačan, postoji najviše konačno mnogo elemenata $U_1, \ldots, U_n$ pokrivača $\mathcal{U}$ koji sadrže x. Pretpostavimo da nijedan element množine $\mathcal{P}$ ne sadrži x. Tada $U_1, \ldots, U_n \notin \mathcal{P}$. Dakle, za svaki $i = 1, \ldots, n$ postoji $\mathcal{P}_i \in \mathbb{P}$, takav da je $U_i \notin \mathcal{P}_i$. Budući da je $\mathbb{P}$ potpuno uređen, postoji $j = 1, \ldots, n$ takav da je $\mathcal{P}_j = \max\{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$. To povlači da $U_1, \ldots, U_n \notin \mathcal{P}_j$, što je kontradikcija sa činjenicom da je $\mathcal{P}_j$ pokrivač prostora X. Dakle, postoji barem jedan element od $\mathcal{P}$ koji sadrži točku x. Time smo dokazali da je $\mathcal{P}$ pokrivač prostora X. Iz definicije pokrivača $\mathcal{P}$ slijedi da je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$, tj. $\mathcal{P} \in \mathbb{U}$, pa je $\mathcal{P}$ gornja međa potpuno uređenog podskupa $\mathbb{P}$ u skupu $(\mathbb{U}, \supseteq)$. Po Zornovoj lemi slijedi da $(\mathbb{U}, \supseteq)$ ima barem jedan maksimalni element, a to je traženi ireducibilni potpokrivač. $\square$

Primijetimo da je prethodna propozicija iskazana općenito za skup X bez zadane topologije na njemu.

Propozicija 60. *Neka je X metakompaktan prostor. Tada je X ireducibilan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{W}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora X. Budući da je X metakompaktan prostor, postoji točkovno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}$ pokrivača $\mathcal{W}$. Iz prethodne propozicije slijedi da postoji ireducibilni potpokrivač $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Sada je $\mathcal{V}$ ireducibilno otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{W}$. Time smo dokazali da je prostor X ireducibilan. $\square$

Primijetimo da je "jednostavnije" pronaći metakompaktan prostor nego direktno ispitati dopušta li svaki otvoreni pokrivač prostora ireducibilno otvoreno profinjenje, tj. "jednostavnije" je pronaći točkovno konačno, nego ireducibilno otvoreno profinjenje otvorenog pokrivača prostora. Zbog toga metakompaktni prostori predstavljaju važnu klasu prostora koja nije "pretjerano apstraktna", a u njoj vrijedi analogon teorema 19. Ta razlika između ove dvije klase prostora leži u primjeni Zornove leme u propoziciji 59.

U sljedećem primjeru navodimo ireducibilan T_1-prostor koji je čak Lindelöfov, ali nije metakompaktan.

Primjer 13. *Neka je na $\mathbb{R}$ dana takozvana* koprebrojiva topologija

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \mathbb{R} : \operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus U) \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Primijetimo da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ T_1-prostor.

Dokažimo da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ireducibilan. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Tada za $x_0 := 0$ postoji $U_0 \in \mathcal{U}$, takav da je $x_0 \in U_0$. Ako je $U_0 = \mathbb{R}$, onda je $\{U_0\}$ traženi ireducibilni otvoreni pokrivač. U suprotnom je $\mathbb{R} \setminus U_0$ najviše prebrojiv. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\mathbb{R} \setminus U_0$ točno prebrojiv. Tada postoji niz (x_n) s međusobno različitim članovima, tako da je $\mathbb{R} \setminus U = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $U_n \in \mathcal{U}$, tako da je $x_n \in U_n$, pa stavimo da je $V_n := U_n \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}\}$. Na koncu stavimo da je $V_0 := U_0$. Kako je svaki prebrojiv podskup od $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ zatvoren, slijedi da je $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Budući da za

svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji točka x_n tako da ona pripada jedino elementu V_n od svih elemenata pokrivača $\mathcal{V}$, po teoremu 44, slijedi da je $\mathcal{V}$ ireducibilan. Time smo dokazali da je prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ireducibilan.
Sada ćemo dokazati da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nije metakompaktan. Neka je $U_n := \mathbb{R} \setminus \{k \in \mathbb{N} : k \neq n\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Promotrimo otvoreni pokrivač $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{V}$ po volji odabrano otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $V_n \in \mathcal{V}$ tako da je $n \in V_n \subseteq U_n$. Primijetimo da je $V_n \neq V_m$ za različite $n, m \in \mathbb{N}$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $P_n := \mathbb{R} \setminus V_n$ najviše prebrojiv, pa je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus P_n) = \mathbb{R} \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \Big)$$

neprazan. Dakle, postoji točka $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$, što znači da $\mathcal{V}$ nije točkovno konačan. Time smo dokazali da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nije metakompaktan.

Da je prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ Lindelöfov slijedi iz činjenice da su komplementi nepraznih otvorenih podskupova najviše prebrojivi analogno kao dokaz kompaktnosti u primjeru 10.

Sada ćemo *pojačati* zahtjev točkovne konačnosti uvođenjem lokalne konačnosti.

Definicija 61. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{U}$ neka množina njegovih podskupova. Reći ćemo da je množina $\mathcal{U}$* lokalno konačna *ako za svaku točku x postoji njezina okolina V u prostoru X koja siječe najviše konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{U}$.*

Ako je $\mathcal{U}$ dodatno i pokrivač prostora X, onda kažemo da je $\mathcal{U}$ lokalno konačan pokrivač *prostora X.*

To nas dovodi do pojma parakompaktnosti (vidite primjerice [4]).

Definicija 62. *Neka je X topološki prostor. Reći ćemo da je X* parakompaktan *ako svaki otvoreni pokrivač od X ima lokalno konačno otvoreno profinjenje.*

Očito je svaki kompaktan prostor i parakompaktan te je svaki parakompaktan prostor i metakompaktan. Međutim, ne vrijede općenito obrati, a to ćemo pokazati u nastavku. Upravo se zbog toga metakompaktni prostori nazivaju često i *slabo parakompaktnim prostorima* (vidi [4]).

$$
\begin{tikzcd}
\text{kompaktan} \arrow[r, "\subsetneq"] & \text{parakompaktan} \arrow[dr, "\subsetneq"] & & \\
& & \text{metakompaktan} \arrow[r, "\subsetneq"] & \text{ireducibilan} \\
& \text{konačnodimenzionalan} \arrow[ur, "\subsetneq"] & &
\end{tikzcd}
$$

U nastavku ćemo pokazati da je svaki regularan Lindelöfov prostor, ali i svaki metrizabilan prostor, parakompaktan. Prije toga treba nam definicija σ-lokalne konačnosti i pomoćna tvrdnja koja karakterizira lokalno konačne otvorene pokrivače u regularnim prostorima.

Definicija 63. ([18]) *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{U}$ neki njegov pokrivač. Reći ćemo da je $\mathcal{U}$* σ-lokalno konačan *ako je jednak prebrojivoj ili konačnoj uniji lokalno konačnih množina podskupova prostora X.*

Teorem 64. *Neka je X regularan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je parakompaktan.
(ii) Svaki otvoren pokrivač prostora X ima σ-lokalno konačno otvoreno profinjenje.

Dokaz prethodnog teorema je tehnički kompliciran i podugačak, pa ga zbog toga preskačemo. Zainteresiran čitatelj navedeni dokaz može pronaći primjerice u [18], [16].

U nastavku govorimo o odnosu parakompaktnih, metakompaktnih i Lindelöfovih prostora.

Propozicija 65. *Neka je X topološki prostor. Ako je X regularan Lindelöfov, onda je parakompaktan prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora X. Kako je X Lindelöfov, to postoji prebrojiv ili konačan potpokrivač $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Sada je $\mathcal{V}$ jednak uniji svih svojih jednotočkovnih podmnožina, pa je $\mathcal{V}$ σ-lokalno konačan. Budući da je X regularan, po prethodnom teoremu, slijedi da je X parakompaktan. □

Propozicija 66. *Neka je X metakompaktan prostor. Ako je X separabilan, onda je i Lindelöfov.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora X. Budući da je X metakompaktan, postoji njegovo točkovno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$. Iz separabilnosti slijedi da postoji prebrojiv ili konačan podskup D gust u prostoru X. Sada za svaki $V \in \mathcal{V}$ postoji točka $d_V \in V \cap D$. Kako je $\mathcal{V}$ točkovno konačan, to svaka točka skupa D

može ležati u najviše konačno mnogo elemenata pokrivača $\mathcal{V}$. Ako je D konačan, onda je i $\mathcal{V}$ konačan. Ako je pak D prebrojiv, onda je $\mathcal{V}$ najviše prebrojiv. Time smo dokazali da je X Lindelöfov prostor. □

Posebno je parakompaktan separabilan prostor Lindelöfov. Iz prethodne dvije propozicije direktno slijedi naredni korolar.

Korolar 67. *Neka je X separabilan regularan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je Lindelöfov prostor.
(ii) X je parakompaktan prostor.
(iii) X je metakompaktan prostor.

Da bismo dokazali da metrizabilnost povlači parakompaktnost, iskoristit ćemo Zermelov teorem kojeg navodimo bez dokaza (vidi [13], [20], [25]). Zanimljivo je da su Zermelov teorem, Zornova lema i Aksiom izbora međusobno ekvivalentne tvrdnje.

Teorem 68 (Zermelov teorem)**.** *Svaki skup se može dobro urediti.*

Teorem 69. *Neka je X metrizabilan prostor. Tada je X parakompaktan prostor.*

Dokaz. Odaberimo po volji metriku d na X koja metrizira pripadnu topologiju. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X i neka je $\preceq$ dobar uređaj za množinu $\mathcal{U}$ (postoji po Zermelovom teoremu). Pokazat ćemo da $\mathcal{U}$ ima σ-lokalno konačno otvoreno profinjenje.

Za $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$S_n(U) := \left\{ x \in U : B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \subseteq U \right\},$$
$$T_n(U) := S_n(U) \setminus \Big(\bigcup_{V \prec U} V \Big).$$

Sada tvrdimo da su $T_n(U)$, $U \in \mathcal{U}$, međusobno disjunktni jer su udaljeni za barem $\frac{1}{n}$, to jest, ako su V i W različiti elementi množine $\mathcal{U}$, onda vrijedi

$$(\forall x \in T_n(V))(\forall y \in T_n(W))\ d(x,y) \geq \tfrac{1}{n}.$$

Kako bismo ovo pokazali, bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $V \prec W$. Budući da je $x \in T_n(V)$, slijedi da je $x \in S_n(V)$, pa je $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq V$. S druge strane, kako je $V \prec W$ i $y \in T_n(W)$, to je $y \notin V$, što povlači $y \notin B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, pa je $d(x,y) \geq \frac{1}{n}$.

Kako skupovi $T_n(U)$ ne moraju nužno biti otvoreni, *proširit* ćemo ih do otvorenih skupova $E_n(U)$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je

$$E_n(U) := \bigcup_{x \in T_n(U)} B\Big(x, \frac{1}{3n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo da su ovakvi skupovi međusobno disjunktni, za različite $U \in \mathcal{U}$, jer ako su V i W različiti elementi množine $\mathcal{U}$, tvrdimo da vrijedi

$$(\forall x \in E_n(V))(\forall y \in E_n(W))\ d(x,y) > \tfrac{1}{3n}.$$

Neka su $x \in E_n(V)$ i $y \in E_n(W)$ po volji odabrane točke. Po definiciji skupova $E_n(V)$, $E_n(W)$, postoje točke $x_1 \in T_n(U)$ i $y_1 \in T_n(W)$ tako da je $x \in B\left(x_1, \frac{1}{3n}\right)$ i $y \in B\left(y_1, \frac{1}{3n}\right)$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \leq d(x_1, y_1) &\leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1) \\ &< \frac{1}{3n} + d(x,y) + \frac{1}{3n}, \end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi

$$\frac{1}{3n} < d(x,y). \tag{1}$$

Također, vrijedi

$$(\forall U \in \mathcal{U})\ E_n(U) \subseteq U,$$

što povlači da su elementi množine

$$\mathcal{E}_n := \{E_n(U) : U \in \mathcal{U}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

podskupovi elemenata od $\mathcal{U}$. Množina $\mathcal{E}_n$ nije profinjenje, jer ne mora biti pokrivač od X, ali zato

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$$

profinjuje $\mathcal{U}$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{E}$ pokrivač od X. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka. Odaberimo najmanji element U u dobro uređenom skupu $(\mathcal{U}, \preceq)$ koji sadrži x. Kako je U otvoren, postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $B(x, 1/n) \subseteq U$. Tada je, po definiciji, $x \in S_n(U)$. Kako je U prvi element u množini $\mathcal{U}$ koji sadrži x, to x pripada $T_n(U)$, pa x pripada elementu $E_n(U)$ od $\mathcal{E}_n$. Dakle, $\mathcal{E}$ je pokrivač od X. Primijetimo da zbog (1) slijedi da za svaki $x \in X$ skup $B\left(x, \frac{1}{6n}\right)$ može sjeći najviše jedan element iz $\mathcal{E}_n$. Iz te činjenice slijedi da je $\mathcal{E}_n$ lokalno konačna množina, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\mathcal{E}$ otvoren σ-lokalno konačan pokrivač od X. Dakle, $\mathcal{E}$ je otvoreno σ- lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$.

Svaki metrizabilan prostor je i regularan, pa, po teoremu 64, slijedi da je X parakompaktan. □

Obrat ne vrijedi općenito, kao što to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 14. *Neka je ω_1 najmanji neprebrojivi redni broj i $X := [0, \omega_1]$ skup svih rednih brojeva manjih ili jednakih ω_1. Tada je X kompaktan (vidi* [15], [21], [23]*) s obzirom na pripadnu uređajnu topologiju (vidi primjer* 1*), pa je i parakompaktan prostor. Primijetimo da X nije metrizabilan, jer nije ni* 1*-prebrojiv. Naime, točka ω_1 nema prebrojivu ili konačnu lokalnu bazu u prostoru X.*

Međutim, ako se uz parakompaktnost pretpostavi Hausdorffovost i *lokalna metrizabilnost*, tj. svojstvo da svaka točka prostora ima metrizabilnu okolinu, onda vrijedi obrat. O tome govori čuveni *Smirnovljev teorem* (vidi [18]). Zanimljivo je da su parakompaktnost i lokalna metrizabilnost isključivo topološka svojstva prostora, koja su i nužna i dovoljna za postojanje metrike na tom prostoru.

Primijetimo da obrat propozicije 65 ne vrijedi općenito. Naime, diskretan neprebrojiv prostor nije Lindelöfov, ali je metrizabilan, a samim time i parakompaktan.

Nadalje, u sljedećem primjeru navodimo regularan prostor koji je metakompaktan, ali nije parakompaktan, što će nam pokazati da ne vrijedi općenito analogon propozicije 65 za metakompaktnost (umjesto Lindelöfovosti). U tu svrhu potrebna nam je sljedeća propozicija.

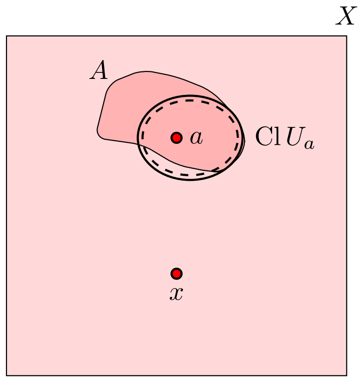
Propozicija 70. *Neka je X parakompaktan Hausdorffov prostor. Tada je X normalan.*

Dokaz. Najprije ćemo dokazati da je prostor X regularan. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka prostora X i U njezina po volji odabrana otvorena okolina. Stavimo da je $A := X \setminus U$. Kako je X Hausdorffov prostor, slijedi da za svaku točku $a \in A$ postoji njezina okolina U_a, tako da je $x \notin \operatorname{Cl} U_a$. Primijetimo da je $\mathcal{U} := \{\operatorname{Int} U_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ otvoreni pokrivač prostora X. Budući da je X parakompaktan, postoji lokalno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{V}'$ množina svih elemenata od $\mathcal{V}$ koji sijeku A. Tada za svaki $V \in \mathcal{V}'$ postoji $a \in A$, tako da je $V \subseteq \operatorname{Int} U_a$, pa je $\operatorname{Cl} V \subseteq \operatorname{Cl} U_a \subseteq X \setminus \{x\}$. Neka je $W := \bigcup \mathcal{V}'$. Tada je W otvoren podskup od X i $A \subseteq W$. Tvrdimo da je $x \notin \operatorname{Cl} W$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $x \in \operatorname{Cl} W$ i neka je O po volji odabrana okolina od x. Budući da je $\mathcal{V}'$ lokalno konačna množina, postoji okolina O_x točke x koja siječe najviše konačno mnogo elemenata

$V_1, \ldots, V_n$ množine $\mathcal{V}'$. Sada $O \cap O_x$ siječe $V_1 \cup \cdots \cup V_n$, tj. O siječe $V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Time smo dokazali da je

$$x \in \mathrm{Cl}(V_1 \cup \cdots \cup V_n) = \mathrm{Cl}\, V_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Cl}\, V_n,$$

što je u kontradikciji s $\mathrm{Cl}\, V_i \subseteq X \setminus \{x\}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Dakle, vrijedi $x \notin \mathrm{Cl}W$. Neka je $S := X \setminus \mathrm{Cl}\, W$. Tada je S (otvorena) okolina točke x i vrijedi $X \setminus \mathrm{Cl}\, W \subseteq X \setminus W$, gdje je $X \setminus W$ zatvoren skup, što znači da je $\mathrm{Cl}\, S \subseteq X \setminus W$. Konačno, vrijedi $x \in S \subseteq \mathrm{Cl}\, S \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus A = U$. Time smo dokazali da je prostor X regularan.



Slika 5. Prikaz postojanja okoline U_a točke $a \in A$ u prostoru X takve da je $x \notin \mathrm{Cl}\, U_a$, [15].

Sada pokažimo normalnost od X. Neka je A po volji odabran zatvoren podskup od X i U po volji odabran otvoren podskup od X, takav da je $A \subseteq U$. Iz regularnosti prostora X slijedi da za svaku točku $a \in A$ postoji njezina okolina U_a, tako da je $\mathrm{Cl}\, U_a \subseteq U$. Primijetimo da je $\mathcal{U} := \{\mathrm{Int}\, U_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ otvoreni pokrivač prostora X. Budući da je X parakompaktan, postoji lokalno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{V}'$ množina svih elemenata od $\mathcal{V}$ koji sijeku A. Tada za svaki $V \in \mathcal{V}'$ postoji $a \in A$, tako da je $V \subseteq \mathrm{Int}\, U_a$, pa je $\mathrm{Cl}\, V \subseteq \mathrm{Cl}\, U_a \subseteq U$. Neka je $W := \bigcup \mathcal{V}'$. Tada je W otvoren podskup od X i $A \subseteq W$. Tvrdimo da je $\mathrm{Cl}W \subseteq U$. Neka je $x \in \mathrm{Cl}W$ po volji odabrana točka i O njezina po volji odabrana okolina. Budući da je $\mathcal{V}'$ lokalno konačna množina, postoji okolina O_x točke x koja siječe najviše konačno mnogo elemenata $V_1, \ldots, V_n$ množine $\mathcal{V}'$. Sada $O \cap O_x$ siječe $V_1 \cup \cdots \cup V_n$, tj. O siječe $V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Time smo dokazali da je

$$x \in \mathrm{Cl}(V_1 \cup \cdots \cup V_n) = \mathrm{Cl}\, V_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Cl}\, V_n \subseteq U.$$

Dakle, vrijedi $A \subseteq W \subseteq \mathrm{Cl}W \subseteq U$. Time smo dokazali da je prostor X normalan. $\square$

Znači, vrijedi sljedeći međuodnos:

$$\begin{tikzcd} \text{metrizabilan} \arrow[r, "\subsetneq"] & \text{normalan} \arrow[r, "\subsetneq"] & \text{regularan} \arrow[r, "\subsetneq"] \arrow[l, bend right, "\text{Lindelöfovost}"'] & \text{Hausdorffov} \arrow[r, "\subsetneq"] \arrow[ll, bend left, "\text{parakompaktnost}"] & T_1 \end{tikzcd}$$

Primjer 15. ([23]) *Neka je na $\mathbb{R}$ dana topologija kojoj je baza jednaka*

$$\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

i neka je na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dana inducirana euklidska topologija. Promotrimo topološki produkt $X := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Dokažimo najprije da je X metakompaktan. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač prostora X. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je svaki element iz $\mathcal{U}$ oblika $\langle a, b\rangle \times (\langle c, d\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ ili $\{i\} \times (\langle c, d\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jer, ako to nije slučaj, onda postoji njegovo profinjenje s elementima ovog oblika, budući da oni tvore bazu. Neka je $\mathcal{U}'$ skup svih elemenata iz $\mathcal{U}$ prvog oblika. Tada je $\mathcal{U}'$ otvoreni pokrivač potprostora $Y := \bigcup \mathcal{U}'$ euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Budući da je Y metrizabilan, a time i metakompaktan, postoji točkovno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}'$ od $\mathcal{U}'$. Budući da zadana topologija na X profinjuje euklidsku topologiju, slijedi da su elementi od $\mathcal{V}'$ otvoreni u X i s obzirom na zadanu topologiju. S druge strane, za svaki $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ postoji množina $\mathcal{U}_i$ svih elemenata iz $\mathcal{U}$ oblika $\{i\} \times \langle c, d\rangle$ koja je otvoreni pokrivač od $\{i\} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ (a on je homeomorfan euklidskom potprostoru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Sada postoji otvoreno točkovno konačno profinjenje $\mathcal{V}_i$ od $\mathcal{U}_i$ koje je otvoreno onda i u X, za svaki $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Primijetimo da je sada i

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}' \cup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \mathcal{V}_i \Big)$$

otvoreno točkovno konačno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Time smo dokazali da je X metakompaktan.

Dokažimo da X nije parakompaktan. Primijetimo da je X regularan prostor (pa je i Hausdorffov) kao produkt dva regularna prostora. Po prethodnoj propoziciji dovoljno je dokazati da X nije normalan prostor. Neka je $A := \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Primijetimo da je A zatvoren podskup od X, kao produkt dva zatvorena podskupa koordinatnih prostora. Neka je $U := \{(x, y) \in X : x \neq y\}$. Primijetimo da je $A \subseteq U$. Neka je $(x, y) \in$

U. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x < y$. Razlikujemo dva slučaja. Ako je $x \in \mathbb{Q}$, onda je $S := \left\langle x-1, \frac{x+y}{2} \right\rangle \times \left(\left\langle \frac{x+y}{2}, \cdot \right\rangle \setminus \mathbb{Q} \right)$ okolina točke (x, y) u prostoru X, takva da je $S \subseteq U$. Ako je pak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onda je $S := \{x\} \times (\langle x, \cdot \rangle \setminus \mathbb{Q})$ otvorena okolina točke (x, y) takva da je $S \subseteq U$. Time smo dokazali da je U otvoren podskup od X. Pretpostavimo da postoji otvoren podskup V prostora X, takav da je $A \subseteq V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq U$. Tada je $W := X \setminus \operatorname{Cl} V$ otvoren nadskup od $\{(x, x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Sada za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ postoji realan broj $\varepsilon_x > 0$, takav da je $\{x\} \times (\langle x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x \rangle \setminus \mathbb{Q}) \subseteq W$. Primijetimo da je

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Iz svojstva iracionalnih brojeva (točnije, iz činjenice da je skup iracionalnih brojeva skup druge kategorije u euklidskom prostoru $\mathbb{R}$, vidi [15], [18]), postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je nutrina zatvorenja skupa

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}$$

neprazna s obzirom na euklidsku topologiju. To povlači postojanje nekog intervala $\langle a, b \rangle$, $a < b$, tako da je $\langle a, b \rangle$ podskup od zatvorenja od $\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}$ s obzirom na euklidsku topologiju. Neka su $q \in \langle a, b \rangle \cap \mathbb{Q}$ te $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $|q - i| < \frac{1}{2n}$, po volji odabrani. Sada je V okolina točke (q, i), pa postoje $c, d, c', d' \in \mathbb{R}$, $c < d$, $c' < d'$, tako da je $(q, i) \in \langle c, d \rangle \times (\langle c', d' \rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \subseteq V$, što povlači postojanje iracionalne točke $z \in \left\langle \max \left\{ a, c, q - \frac{1}{2n} \right\}, q \right\rangle$ takve da je $z \in \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}$. Primijetimo da je $(z, i) \in V$ i $|z - i| \leq |z - q| + |q - i| < \frac{1}{n}$, pa je

$$(z, i) \in \{z\} \times \left(\left\langle z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n} \right\rangle \setminus \mathbb{Q} \right) \subseteq W = X \setminus \operatorname{Cl} V \subseteq X \setminus V,$$

što je kontradikcija. Dakle, prostor X nije normalan.

Primijetimo kako prethodni primjer pokazuje da ne vrijedi analogon prethodne propozicije za metakompaktne regularne prostore.

Nadalje, u sljedećem primjeru pokazujemo kako se regularnost ne može izostaviti u iskazu propozicije 65 te da ne vrijedi analogon propozicije 70 za metakompaktne prostore.

Primjer 16. ([15], [18]) *Neka je na skupu $\mathbb{R}$ dana topologija $\mathcal{T}_K$ kojoj je množina*

$$\mathcal{B} := \{\langle a, b \rangle : a, b \in \mathbb{R},\, a < b\} \cup \{\langle c, d \rangle \setminus K : c, d \in \mathbb{R},\, c < d\}$$

baza, pri čemu je $K := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Može se pokazati (vidi [15], [18]*) da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ Hausdorffov, ali nije regularan prostor. Po propoziciji*

70 *slijedi da* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ *nije ni parakompaktan. Međutim, lako se vidi da množina svih intervala* $\langle q_1, q_2 \rangle$ *i* $\langle q_1, q_2 \rangle \setminus K$*, za* $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$*,* $q_1 < q_2$*, čini prebrojivu bazu prostora* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$*, što povlači njegovu 2-prebrojivost, a time i separabilnost i Lindelöfovost.*

Dokažimo da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ *metakompaktan prostor. Neka je* $\mathcal{U}$ *po volji odabran otvoreni pokrivač prostora* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$*. Neka je*

$$\mathcal{U}' := \{U \setminus \{0\} : U \in \mathcal{U}\}.$$

Tada je $\mathcal{U}'$ *otvoreni pokrivač potprostora* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, čija se relativna topologija podudara s euklidskom topologijom, pa je potprostor* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *metrizabilan, a time i metakompaktan. Sada postoji otvoreno točkovno konačno profinjenje* $\mathcal{V}'$ *pokrivača* $\mathcal{U}'$*. Budući da je* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *otvoren u* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$*, slijedi da su svi elementi množine* $\mathcal{V}'$ *otvoreni u* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$*. Budući da je* $\mathcal{U}$ *pokrivač od* $\mathbb{R}$*, postoji* $U \in \mathcal{U}$ *takav da je* $0 \in U$*. Sada je* $\mathcal{V} := \mathcal{V}' \cup \{U\}$ *točkovno konačno otvoreno profinjenje od* $\mathcal{U}$*.*

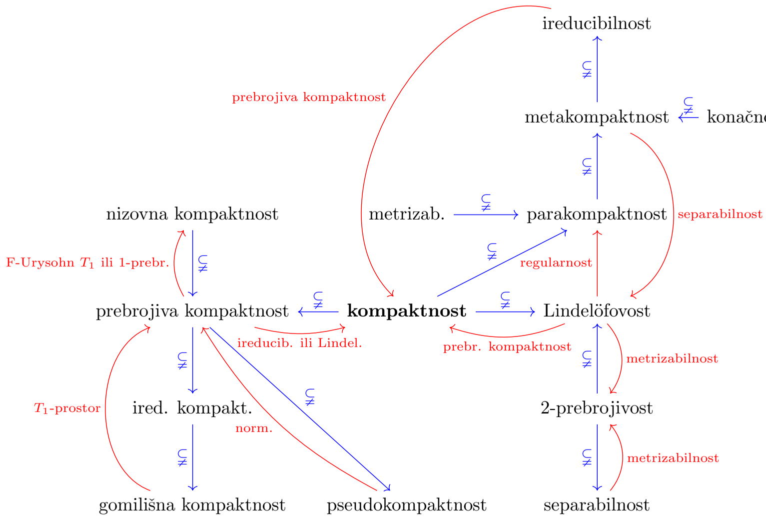
Time smo dokazali da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ *Hausdorffov Lindelöfov i metakompaktan prostor koji nije ni regularan, ni parakompaktan.*

Propoziciju 70 i korolar 67 iskoristit ćemo kako bismo pokazali da produkt parakompaktnih (čak regularnih Lindelöfovih) prostora ne mora nužno biti ni Lindelöfov, ni metakompaktan, a kamo li parakompaktan.

Primjer 17. *Neka je* $\mathbb{R}^2$ *Sorgenfreyeva ravnina, tj. produkt dva Sorgenfreyeva pravca iz primjera* 5*. Tada je* $\mathbb{R}^2$ *regularan kao produkt dva regularna prostora. Nadalje,* $\mathbb{Q}^2$ *je prebrojiv gust podskup od* $\mathbb{R}^2$*, pa je* $\mathbb{R}^2$ *separabilan. U* [15] *se može naći dokaz da* $\mathbb{R}^2$ *nije normalan, pa, po propoziciji* 70*, slijedi da* $\mathbb{R}^2$ *nije parakompaktan. Kako je* $\mathbb{R}^2$ *regularan i separabilan, po korolaru* 67 *slijedi da* $\mathbb{R}^2$ *nije ni metakompaktan, ni Lindelöfov.*

Primjer 18. *U primjeru* 1 *pokazali smo da je prostor* $[0, \omega_1\rangle$ *lokalno kompaktan i prebrojivo kompaktan prostor koji nije kompaktan, a to povlači da nije ni ireducibilan, ni Lindelöfov. Time smo dokazali da lokalna kompaktnost općenito ne povlači ni Lindelofövost, ni ireducibilnost, a time ni metakompaktnost, ni parakompaktnost.*

Sada navodimo dijagram u kojem prikazujemo odnose među klasama prostora kojima smo se bavili u ovom radu.



Iz prethodno dokazanog slijedi da su kompaktnost, prebrojiva i gomilišna kompaktnost te pseudokompaktnost ekvivalentni pojmovi na klasi normalnih metakompaktnih, ali i Hausdorffovih parakompaktnih prostora. Budući da je metrizabilan prostor i parakompaktan, sada direktno slijedi dokaz teorema 19 kojeg smo u trećem odjeljku dokazali koristeći svojstva metrike.

Napomenimo da se za svaki beskonačan kardinalni broj α može definirati α-ireducibilnost, α-meta(para)kompaktnost. Međutim, odnose među navedenim pojmovima ostavljamo čitatelju na razmišljanje.

Na koncu spomenimo da parakompaktnost i σ-lokalno konačne množine igraju ključnu ulogu u takozvanim *metrizacijskim teoremima* (vidite [4], [16], [18], [21], [24]), tj. teoremima koji daju nužne i dovoljne topološke uvjete za metrizabilnost prostora. Naime, *Nagata-Smirnovljev teorem* kaže kako je topološki prostor metrizabilan ako i samo ako je regularan i postoji njegova σ-lokalno konačna baza topologije, dok *Smirnovljev teorem* kaže kako je prostor metrizabilan ako i samo ako je Hausdorffov, parakompaktan i lokalno metrizabilan.

Literatura

[1] A. V. Arkhangel'skii, V. I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology: Problems and exercises*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, in co-edition with Hindustan Publishing Corporation, India, Delhi, 1984.

[2] Z. Čerin, *Metrički prostori*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~cerin/METR.pdf`, dana *1. prosinca 2023.*

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.

[4] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[5] *Encyclopedia of General Topology*, Edited by K. P. Hart, J. Nagata, J. E. Vaughan, Elsevier North-Holland, Amsterdam, 2004.

[6] Irreducible topological space, *Encyclopedia of Mathematics*, `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Irreducible_topological_space&oldid=37309` pristupljeno dana *8. ožujka 2025.*

[7] V. J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, treće izdanje, Pearson Education, Inc., 2009.

[8] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[9] N. Koceić-Bilan, *Osnove matematičke analize I*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu (interna skripta), 2020.

[10] H. N. Jahnke (urednik), *A History of Analysis, History of Mathematics*, 24. svezak, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2003.

[11] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[12] V. Matijević, *Metrički prostori*, interna skripta iz kolegija Metrički prostori na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Splitu

[13] V. Matijević, *Teorija skupova*, interna skripta iz kolegija Teorija skupova na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Splitu

[14] V. Matijević, *Uvod u topologiju*, interna skripta iz kolegija Uvod u topologiju na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Splitu

[15] V. Matijević, D. Peran, *Elementi opće topologije*, nerecenzirani udžbenik, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2023.

[16] A. Mikelić, *Razna poopćenja kompaktnosti*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2023., dostupno na https://dabar.srce.hr/islandora/object/pmfst%3A1853, dana *4. travnja 2024.*

[17] S. A. Morris, *Topology without Tears*, 25. siječnja 2023., dostupno na https://www.topologywithouttears.net/topbook2023.pdf, dana *1. prosinca 2023.*

[18] J. R. Munkres, *Topology*, Pearson Education International, Prentice Hall, 2000.

[19] M. L. O'Leary, *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2016.

[20] P. Papić, *Teorija skupova*, HMD, Zagreb, 1999.

[21] C. W. Patty, *Foundations of Topology*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.

[22] M. Ó Searcóid, *Metric Spaces*, Springer-Verlag, London, 2007.

[23] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1978.

[24] Š. Ungar, predavanja i vježbe na kolegiju Opća topologija, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/OT/opca.html, dana *1. prosinca 2023.*

[25] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf, dana *1. prosinca 2023.*

Andrea Mikelić
studentica, Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split
E-mail: amikelic1@pmfst.hr

Dino Peran
Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split
E-mail: dino.peran@pmfst.hr