ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.8 (2025) 89–99
https://doi.org/10.32817/amssd.8.4

Zaprimljen: 24. travnja 2025.
Prihvaćen: 21. svibnja 2025.

O vezi tenisa i cjelobrojne mreže

Mandi Orlić Bachler, Bojan Kovačić, Ema Gukov

Sažetak

U članku se izlaže problem određivanja ukupnoga broja različitih načina na koje se može kretati rezultat u jednom „standardnom" teniskom gemu, setu i meču. Problem se modelira pomoću cjelobrojne mreže, pa se potom metodički detaljno izlaže njegovo rješenje.

Ključni pojmovi: tenis, cjelobrojna mreža, kombinatorika, osnove diskretne teorije vjerojatnosti

Abstract

The article presents the problem of determining the total number of different ways the score can move in a "standard" tennis game, set, and match. The problem is modeled using an integer grid, and then its solution is presented in detail and methodically.

Keywords: tennis, integer lattice, combinatorics, fundamentals of discrete probability theory

1. Uvod

Uvjereni smo da su većini čitatelja ovoga članka dobro poznati tenis kao sport i njegova osnovna pravila. (Nedovoljno upućeni čitatelji mogu pročitati osnovna teniska pravila npr. u [3].) Za potrebe ovoga rada podsjetit ćemo na osnovne mjere bodova osvojenih u igri.

Pravilo 1. *Bod ili poen je najmanja jedinica mjere u tenisu.*

Pravilo 2. *Gem je jedinica mjere koja se sastoji od četiri boda, a dobiva ga igrač koji osvoji četiri boda i ima barem dva boda više u odnosu na protivnika. Bodovi unutar gema vrednuju se s 15, 30 i 40.*

Pravilo 3. *Set je jedinica mjere koja se sastoji od najmanje šest gemova, a dobiva ga igrač koji prvi osvoji šest gemova i ima barem dva gema više u odnosu na protivnika. Iznimno, ako igrač osvoji šest gemova i ima točno jedan dobiven gem više u odnosu na protivnika, igra se 12. gem. Ako nakon toga gema rezultat bude izjednačen, igra se tie-break koji odlučuje pobjednika u setu.*

Pravilo 4. *Igrač dobiva susret ako osvoji dva ili tri seta (ovisno o vrsti natjecanja i dr.).*

Napomena 1. *U standardnom (uobičajenom) setu svi mogući krajnji rezultati su* $7:6$, $7:5$ *ili* $6:n$, *pri čemu je* $n \in \{0,1,2,3,4\}$. *Iznimka je peti set (kad god se igra na tri dobivena seta) u kojemu se primjenjuje pravilo prema kojemu igrač dobiva set ako osvoji najmanje šest gemova i barem dva gema više u odnosu na protivnika (nema tie-breaka). Taj slučaj ovdje nećemo razmatrati, pa odsad pa nadalje pretpostavljamo da se radi o standardnom setu.*

Prije negoli navedemo osnovni problem kojega ćemo razmatrati u članku, podsjetimo na pojmove cjelobrojne mreže i najkraćega puta između dviju točaka u takvoj mreži.

2. Osnovni pojmovi i rezultati vezani uz cjelobrojnu mrežu

Definicija 1. *Neka je* $\mathbb{Z}$ *skup svih cijelih brojeva. Cjelobrojna mreža je beskonačan graf kojemu je skup vrhova* $V = \mathbb{Z}^2$, *dok skup bridova tvore sve dužine kojima je jedan kraj u točki* (x, y), *a drugi u točki* $(x \pm 1, y)$ *ili točki* $(x, y \pm 1)$, *pri čemu su* $x, y \in \mathbb{Z}$.

Definicija 2. *Za bridove* e *i* f *u cjelobrojnoj mreži kažemo da su susjedni ako postoji vrh u cjelobrojnoj mreži koji im je zajednički.*

(Konačan) Put *u cjelobrojnoj mreži je konačan niz bridova u kojemu su svaka dva uzastopna brida susjedna i svi su vrhovi različiti (osim, eventualno, početnoga i krajnjega vrha).*

Najkraći put *od vrha* v_1 *do vrha* v_n *u cjelobrojnoj mreži je konačan niz bridova* $v_1 v_2 \ldots v_n$ *takvih da ako je* $v_k = (x_k, y_k)$, *onda je*

$$v_{k+1} \in \{(x_k + 1, y_k), (x_k, y_k + 1)\}, \forall k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Iz vrha v_{n-1} *nužno bridom* $v_{n-1} v_n$ *moramo ići u vrh* v_n.

Napomena 2. *Put u cjelobrojnoj mreži nužno mora imati svojstvo da u svakom koraku iz početne točke dolazimo sve bliže i bliže odredišnoj točki. Zbog toga su dozvoljeni koraci udesno i prema gore.*

Osnovni rezultat vezan uz ukupan broj najkraćih puteva između dviju različitih točaka cjelobrojne mreže dan je sljedećim teoremom.

Teorem 1. *Neka su T_1 i T_2 točke kao u Definiciji 1. Tada je ukupan broj najkraćih putova između T_1 i T_2 jednak*

$$\binom{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

Napomena 3. *Zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata traženi je broj jednak*

$$\binom{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}{y_2 - y_1}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Svaki najkraći put od T_1 do T_2 sastoji se od ukupno $x_2 - x_1$ pomaka u smjeru pozitivnoga dijela osi apscisa i ukupno $y_2 - y_1$ pomaka u smjeru pozitivnoga dijela osi ordinata. Dakle, ukupan broj pomaka jednak je $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$. Zbog toga je traženi broj jednak ukupnom broju različitih načina na koje između $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$ različitih objekata možemo izabrati njih $x_2 - x_1$. Sada tvrdnja teorema izravno slijedi iz osnovne kombinatorne interpretacije binomnoga koeficijenta (vidjeti npr. [2].) □

Korolar 1. *Ukupan broj najkraćih putova između točaka $O = (0, 0)$ (ishodišta cjelobrojne mreže) i $T = (x_T, y_T)$ jednak je*

$$\binom{x_T + y_T}{x_T},$$

odnosno

$$\binom{x_T + y_T}{y_T}.$$

Dokaz. U izraze (2.1) i (2.2) uvrstimo $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = x_T$ i $y_2 = y_T$, pa odmah dobivamo tvrdnju korolara. □

Čitatelje zainteresirane za teoriju cjelobrojnih mreža i putova u njima upućujemo na [2] i [1].

3. Na koliko načina se može kretati rezultat unutar „standardnog" gema?

U ovoj ćemo točki odrediti ukupan broj načina na koje se može kretati rezultat unutar „standardnog" gema, odnosno gema unutar kojega nijednom nije postignut rezultat 40 : 40 (tzv. *deuce*). Naime, u slučaju postizanja rezultata 40 : 40 teorijski beskonačno mnogo puta može se ponavljati situacija u kojoj jedan od igrača ostvari prednost (obično se označava slovom A prema engl. riječi advantage (engl. prednost)), a drugi igrač potom izjednači. Jasno je da je takva situacija praktički nemoguća, ali se ne može navesti dovoljno dobra gornja ograda za ukupan broj njezina ponavljanja. Zbog toga takvu situaciju ovdje ne razmatramo.

Primijetimo da je ukupan broj načina na koje se može kretati rezultat unutar jednoga gema, seta ili meča jednak dvostrukom broju načina na koji taj gem, set ili meč može dobiti svaki pojedini igrač. Konkretno, svakom (najkraćem) putu $v_1 v_2 \ldots v_n$ koji označava kretanje rezultata u gemu, setu ili meču kojega je dobio prvi igrač pridružimo put $v_1' v_2' \ldots v_n'$ takav da vrijedi:

$$v_i = (x_i, y_i) \Rightarrow v_i' = (y_i, x_i)\,, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Lako se vidi da je ovo pridruživanje bijekcija i da put $v_1' v_2' \ldots v_n'$ označava kretanje rezultata u gemu, setu ili meču kojega je dobio drugi igrač. (Ekvivalentno, svakom putu koji označava kretanje rezultata u gemu, setu ili meču kojega je dobio prvi igrač bijektivno pridružujemo put osnosimetričan s obzirom na pravac $y = x$.) Zbog toga je dovoljno odrediti na koliko se načina može kretati rezultat u gemu, setu ili meču kojega je dobio prvi igrač.

Teorem 2. *Ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat unutar „standardnog" gema jednak je 30.*

Dokaz. Ishodu od 0 bodova pridružimo broj 0, ishodu od 15 bodova pridružimo broj 1, ishodu od 30 bodova broj 2, a ishodu od 40 bodova broj 3. Budući da se radi o „standardnom" gemu, igrač koji postigne 40 bodova ujedno i dobiva taj gem. Najprije pretpostavimo da je gem dobio prvi igrač. Promatramo najkraće putove u cjelobrojnoj mreži od točke $(0, 0)$ do točaka oblika $(3, k)$, pri čemu su $k = 0, 1, 2$. Prema korolaru 1, za čvrsto $k \in \mathbb{N}_0$ ukupan broj najkraćih putova od točke $(0, 0)$ do točke $(3, k)$ jednak je $\binom{k+3}{3}$. Primjenom načela zbroja dobivamo da je ukupan broj načina u ovom slučaju jednak

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{k+3}{3} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 1 + 4 + 10 = 15\ .$$

Prema načelu simetrije broj načina da gem dobije drugi igrač identičan je broju načina da gem dobije prvi igrač. Stoga, prema načelu zbroja, traženi je broj jednak $15 + 15 = 30$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadatak 1. *Provjerite rezultat teorema 1. izravnim prebrojavanjem (ispisivanjem svih mogućih kretanja rezultata).*

U slučaju kada gem dobiva prvi igrač, svih 15 mogućih kretanja rezultata ispisani su u retcima ispod ovoga:

15-0,	30-0,	40-0,	kraj		
0-15,	15-15,	30-15,	40-15,	kraj	
15-0,	15-15,	30-15,	40-15,	kraj	
15-0,	30-0,	30-15,	40-15,	kraj	
15-0,	30-0,	40-0,	40-15,	kraj	
0-15,	0-30,	15-30,	30-30,	40-30,	kraj
0-15,	15-15,	15-30,	30-30,	40-30,	kraj
0-15,	15-15,	30-15,	30-30,	40-30,	kraj
0-15,	15-15,	30-15,	40-15,	40-30,	kraj
15-0,	15-15,	30-15,	30-30,	40-30,	kraj
15-0,	15-15,	15-30,	30-30,	40-30,	kraj
15-0,	15-15,	30-15,	40-15,	40-30,	kraj
15-0,	30-0,	30-15,	40-15,	40-30,	kraj
15-0,	30-0,	30-15,	30-30,	40-30,	kraj
15-0,	30-0,	40-0,	40-15,	40-30,	kraj

4. Na koliko načina se može kretati rezultat u gemovima unutar „standardnoga" seta?

U ovoj ćemo točki odrediti ukupan broj načina na koje se može kretati rezultat unutar „standardnoga" seta, odnosno seta koji nije peti set (u skladu s napomenom 1). Rezultat daje sljedeći teorem.

Teorem 3. *Ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat unutar „standardnoga" seta jednak je 1932.*

Dokaz. Razlikovat ćemo tri slučaja. Radi jednostavnosti razmatranja, u svakom slučaju pretpostavit ćemo da je set dobio prvi igrač.

Slučaj 1. Set je završio rezultatom $7:6$. Tada je tom rezultatu nužno prethodio rezultat $6:6$. Ovom rezultatu je nužno prethodio ili rezultat $6:5$ ili rezultat $5:6$. Svakom od ovih dvaju rezultata je nužno prethodio rezultat $5 : 5$ jer bi u suprotnom set bio gotov (i završio bi rezultatom $6 : 4$ ili $4 : 6$). Zbog toga najprije odredimo broj najkraćih putova od točke $(0, 0)$ do točke $(5, 5)$. Prema korolaru 1, tih putova ima ukupno

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5}$$

pa prema načelu zbroja dobivamo ukupno

$$\binom{10}{5} + \binom{10}{5} = 504$$

najkraćih putova.

Slučaj 2. Set je završio rezultatom $7 : 5$. Tada je tom rezultatu nužno prethodio rezultat $6 : 5$. Ovom rezultatu je nužno prethodio rezultat $5 : 5$ jer bi u suprotnom set bio gotov (i završio bi rezultatom $6 : 4$). Dakle, treba odrediti ukupan broj najkraćih putova od točke $(0, 0)$ do točke $(5, 5)$. Prema korolaru 1, tih putova ima ukupno

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252\ .$$

Slučaj 3. Set je završio rezultatom $6 : k$, pri čemu je $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Tada je tom rezultatu nužno prethodio rezultat $5 : k$ jer bi, osim za $k = 0$, u suprotnom set bio gotov (i završio bi rezultatom $6 : (k - 1)$). Dakle, za čvrsto k treba odrediti ukupan broj najkraćih putova od točke $(0, 0)$ do točke $(5, k)$. Prema korolaru 1, tih putova ima ukupno

$$\binom{k+5}{5}\ .$$

Prema načelu zbroja dobivamo još

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\binom{k+5}{5} &= \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}\\ &= 1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210\end{aligned}$$

najkraćih putova.

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve u kojima je pobjednik seta prvi igrač. Broj načina da set dobije drugi igrač, prema načelu simetrije, identičan je broju načina da set dobije prvi igrač. Stoga, prema načelu zbroja, traženi je broj jednak $2 \cdot (504 + 252 + 210) = 1932$, što je i trebalo dokazati. □

5. Na koliko načina se može kretati rezultat u setovima unutar susreta?

U ovoj ćemo točki odrediti ukupan broj načina na koje se može kretati rezultat u setovima unutar teniskoga susreta. Pritom moramo razlikovati dva slučaja. U prvom se susret igra na dva dobivena seta, a u drugom na tri.

Teorem 4.

a) Pretpostavimo da se susret igra na dva dobivena seta. Tada je ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat u setovima unutar susreta jednak 6.

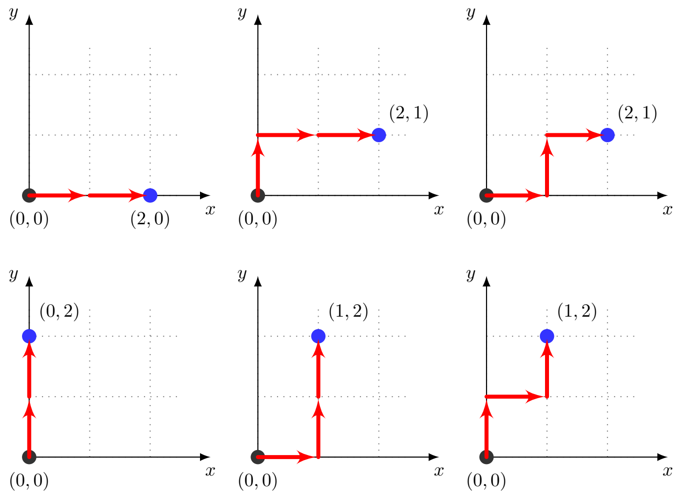
b) Pretpostavimo da se susret igra na tri dobivena seta. Tada je ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat u setovima unutar susreta jednak 20.

Dokaz.

a) Pretpostavimo da je pobjednik susreta prvi igrač. Tada je ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat u setovima jednak ukupnom broju najkraćih putova od točke $(0,0)$ do točke oblika $(1,k)$, pri čemu je $k = 0,1$. Naime, zbog pretpostavki da se susret igra na dva dobivena seta i da je pobjednik prvi igrač, nakon dolaska u točku oblika $(1,k)$ moramo nastaviti na jedinstven način: ići iz točke $(1,k)$ u točku $(2,k)$. Prema korolaru 1., za čvrsto k najkraćih putova od od točke $(0,0)$ do točke oblika $(1,k)$ ima ukupno
$$\binom{k+1}{1} = k+1\ .$$
Primjenom načela zbroja dobivamo ukupno
$$\sum_{k=0}^{1}(k+1) = 1+2 = 3$$
najkraća puta.

Prema načelu simetrije broj načina da susret dobije drugi igrač identičan je broju načina da susret dobije prvi igrač. Dakle, traženi je broj jednak $3+3=6$, što je i trebalo dokazati.

Kako broj načina na koji se može kretati rezultat u setovima nije velik, sve ćemo ih prikazati pomoću cjelobrojne mreže (slika 1).



Slika 1. U prvom redu prikazana je cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(2,k)$, $k=0,1$. U drugom redu prikazana je cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(k,2)$, $k=0,1$.

b) Pretpostavimo da je pobjednik susreta prvi igrač. Tada je ukupan broj različitih načina na koji se može kretati rezultat u setovima jednak ukupnom broju najkraćih putova od točke $(0,0)$ do točke oblika $(2,k)$, pri čemu je $k=0,1,2$. Naime, zbog pretpostavki da se susret igra na tri dobivena seta i da je pobjednik prvi igrač, nakon dolaska u točku oblika $(2,k)$ moramo nastaviti na jedinstven način: ići iz točke $(2,k)$ u točku $(3,k)$. Prema korolaru 1, za čvrsto k najkraćih putova od od točke $(0,0)$ do točke oblika $(2,k)$ ima ukupno

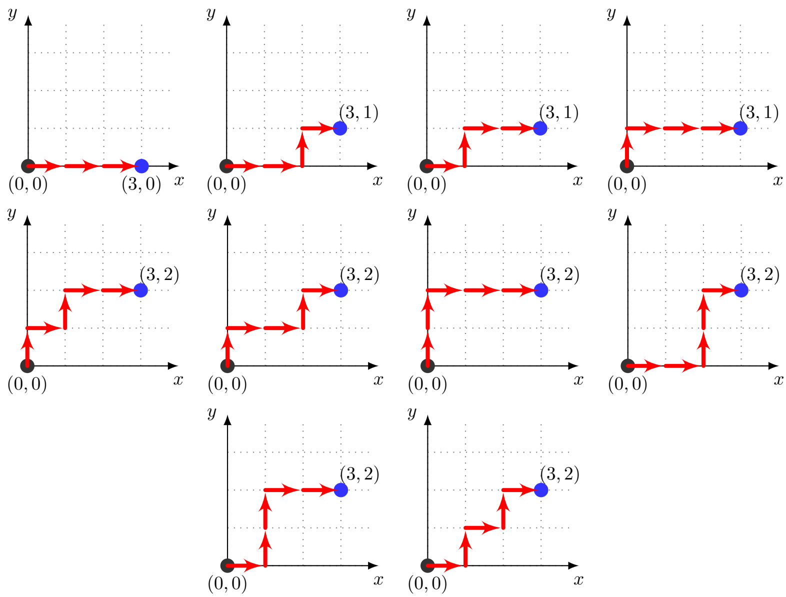
$$\binom{k+2}{2}.$$

Primjenom načela zbroja dobivamo ukupno

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{k+2}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=1+3+6=10$$

najkraćih putova. I u ovom slučaju, ne moramo računati broj načina da susret dobije drugi igrač, jer prema načelu simetrije taj broj je jednak broju načina da susret dobije prvi igrač. Dakle, traženi je broj jednak $10+10=20$, što je i trebalo dokazati.

Cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(3,k)$, $k=0,1,2$ prikazana je na slici 2.



Slika 2. Cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(3,k)$, $k=0,1,2$.

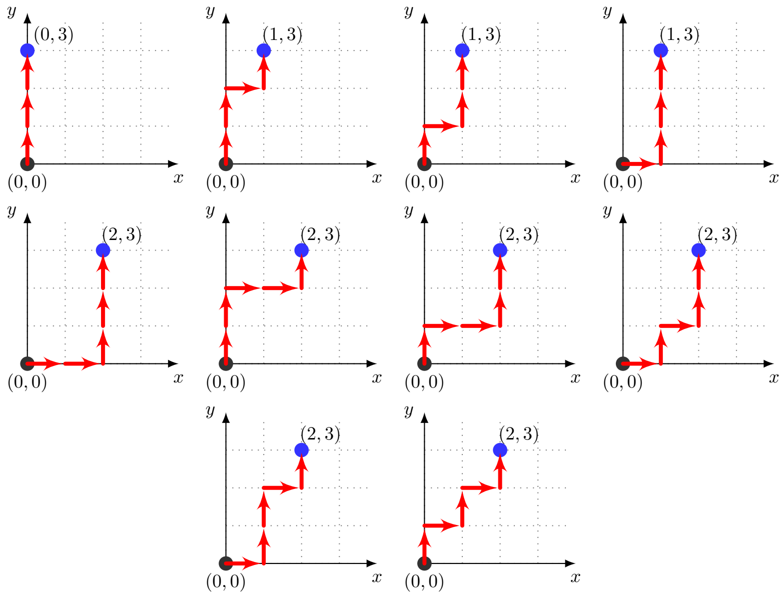
Cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(k,3)$, $k=0,1,2$ prikazana je na slici 3.

$\square$

6. Zaključak

U članku smo pokazali kako se uz primjenu teorije cjelobrojnih mreža može analizirati broj različitih načina na koje se kreće rezultat unutar teniskog gema, „standardnoga” seta i cijelog susreta (ovisno o tome igra li se na dva ili tri dobivena seta). Ovako dobiveni rezultati pružaju nam kvantitativni uvid u dinamiku teniskih mečeva i ilustriraju primjenjivost kombinatornih metoda u analizi sportskih ishoda.

Ovaj rad je podržan od strane Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta HRZZ-IP-2024-05-3882.



Slika 3. Cjelobrojna mreža puteva od točke $(0,0)$ do točke $(k,3)$, $k=0,1,2$.

Literatura

[1] P. J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1996.

[2] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[3] `https://www.itftennis.com/media/7221/2025-rules-of-tennis-english.pdf` (pristupljeno 1. 3. 2025.)

Mandi Orlić Bachler
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel, Av. Većeslava Holjevca 15, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail: `mandi.orlic@tvz.hr`

Bojan Kovačić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Elektrotehnički odjel, Konavoska 2, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail: `bojan.kovacic@tvz.hr`

Ema Gukov
studentica sveučilišnog diplomskog studija Građevinarstvo, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail: egukov@student.grad.hr