

# Skup postignuća reda i Erdősovi problemi o jediničnim razlomcima

Vjekoslav Kovač

---

## Sažetak

Obradit ćemo jednostavni, a ne previše poznati koncept vezan uz redove. On će nam potom pomoći (djelomično ili potpuno) riješiti nekoliko problema o jediničnim razlomcima koje je bio postavio poznati matematičar Paul Erdős.

*Ključni pojmovi:* red brojeva, konvergencija, nutrina, iracionalni broj

---

## Abstract

We will cover a simple, not-so-familiar concept related to series. It will then help us (partially or completely) solve several problems about unit fractions posed by the famous mathematician Paul Erdős.

*Keywords:* number sequence, convergence, interior, irrational number

---

## 1. Skup postignuća reda

Neka je  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  red s članovima  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  iz  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Skup postignuća (eng. *achievement set*) reda  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  je

$$A(x) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : \varepsilon_n \in \{0, 1\} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}, \sum_n \varepsilon_n x_n \text{ konvergira} \right\}.$$

To je podskup od  $\mathbb{R}^d$  koji sadrži ishodište 0. Tako je naprimjer:

- skup postignuća reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jednak  $[0, \infty)$ ,

- skup postignuća reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  jednak  $\mathbb{R}$ ,
- skup postignuća reda  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  jednak  $\mathbb{N}_0$ .

Ako  $\sum_n x_n$  apsolutno konvergira ili ako su  $x_n \in [0, \infty)^d$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , tada alternativno možemo pisati

$$A(x) = \left\{ \sum_{n \in S} x_n : S \subseteq \mathbb{N} \right\} \cap \mathbb{R}^d,$$

jer poredak zbrajanja prestaje biti važan. Pritom sumiranje po  $S = \emptyset$  interpretiramo kao  $0 \in \mathbb{R}^d$ , a presjekom s  $\mathbb{R}^d$  naglašavamo da uzimamo samo konačne sume.

Ovaj pojam je za realne redove proučavao japanski matematičar Sōichi Kakeya [8, 9] još pred više od stotinu godina.

**Teorem 1** ([8, 9]). *Neka je  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  niz strogo pozitivnih brojeva takav da red  $\sum_n x_n$  konvergira.*

(a) *Ako za sve dovoljno velike  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \geq x_n, \tag{1}$$

*tada je  $A(x)$  konačna unija nedegeneriranih segmenata. Ako je pak uvjet (1) ispunjen za baš svaki  $n \in \mathbb{N}$ , tada je  $A(x)$  jednak segmentu  $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$ .*

(b) *Ako za sve dovoljno velike  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k < x_n, \tag{2}$$

*tada  $A(x)$  ima praznu nutrinu, tj. ne sadrži nedegenerirani interval.*

*Dokaz.* (a) Pretpostavimo najprije da (1) vrijedi za svaki indeks  $n \in \mathbb{N}$ . Označimo

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$ . Uzimo proizvoljni  $y \in [0, r_0]$ . Induktivno konstruiramo koeficijente  $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$  iz  $\{0, 1\}$  takve da za svaki  $N \in \mathbb{N}_0$  vrijedi

$$y - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \in [0, r_N]. \tag{3}$$

Tvrđnja je očigledna za  $N = 0$  radi intervala iz kojega smo uzeli  $y$ . Pretpostavimo da su  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  već odabrani tako da vrijedi (3).

- Ako je

$$y - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \in [0, r_{N+1}],$$

tada stavimo  $\varepsilon_{N+1} := 0$ .

- Inače stavimo  $\varepsilon_{N+1} := 1$  te primijetimo

$$y - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n - x_{N+1} \in \underbrace{\langle r_{N+1} - x_{N+1}, r_N - x_{N+1} \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\quad}_{=r_{N+1}} \stackrel{(1)}{\subseteq} [0, r_{N+1}].$$

Na taj način uvijek imamo

$$y - \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n x_n \in [0, r_{N+1}]$$

pa je induktivni korak konstrukcije dovršen. Kako je  $\sum_n x_n$  konvergentan, vrijedi  $\lim_{N \rightarrow \infty} r_N = 0$  pa iz (3) po teoremu o sendviču slijedi

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \in A(x).$$

Zaključujemo  $A(x) = [0, r_0]$ .

Sada pretpostavimo da postoji  $m \in \mathbb{N}$  tako da je uvjet (1) ispunjen za svaki  $n > m$ . Primjenjujući dokazani slučaj na red  $\sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$  dobivamo  $A((x_n)_{n=m+1}^{\infty}) = [0, r_m]$  pa je

$$A(x) = \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{0,1\}^m} \left( \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n + A((x_n)_{n=m+1}^{\infty}) \right) \quad (4)$$

doista konačna unija segmenata pozitivne duljine.

(b) Opet najprije pretpostavimo da uvjet (2) vrijedi za svaki indeks  $n \in \mathbb{N}$ . Za svaki  $N \in \mathbb{N}$  je  $A(x)$  očigledno sadržan u uniji segmenata:

$$A(x) \subseteq \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \{0,1\}^N} \left( \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n + [0, r_N] \right).$$

Svih gore navedenih  $2^N$  segmenata je međusobno disjunktno. Naime, ako su  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$  i  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_N)$  dvije  $N$ -torke iz  $\{0,1\}^N$  koje se prvi put razlikuju na indeksu  $1 \leq l \leq N$  te je  $\varepsilon_l = 0 < 1 = \varepsilon'_l$ , tada imamo

$$\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n + [0, r_N] \subseteq \sum_{n=1}^{l-1} \varepsilon_n x_n + [0, r_l]$$

i

$$\sum_{n=1}^N \varepsilon'_n x_n + [0, r_N] \subseteq \sum_{n=1}^{l-1} \varepsilon_n x_n + [x_l, \infty).$$

Ti su skupovi disjunktni, jer po pretpostavci (2) imamo  $r_l < x_l$ . Sada, dakle, znamo da je  $A(x)$  sadržan u disjunktnoj uniji segmenata duljine  $r_N$  pa svaki interval u  $A(x)$  može imati duljinu najviše  $r_N$ . Preostaje prisjetiti se da je  $\lim_{N \rightarrow \infty} r_N = 0$ .

Konačno ako postoji  $m \in \mathbb{N}$  takav da uvjet (2) vrijedi za sve  $n > m$ , tada po prethodnom znamo da je  $A((x_n)_{n=m+1}^\infty)$  zatvoren skup (vidjeti zadatak 1) s praznom nutrinom; takve skupove zovemo *nigdje gusti*. Skup postignuća polaznog reda je tada konačna unija (4) nigdje gustih skupova pa i sam ima praznu nutrinu po Baireovom teoremu o kategorijama.  $\square$

**Napomena 1.** Vrijedi sljedeće malo pojačanje (a) dijela teorema 1. Ako je  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$  strogo pozitivni niz takav da  $\sum_n x_n$  konvergira i da uvjet (1) vrijedi za sve  $n \in \mathbb{N}$ , tada se svaki  $y \in \langle 0, \sum_{n=1}^\infty x_n \rangle$  može zapisati u obliku  $y = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$  za neki niz nula i jedinica  $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$  u kojem ima beskonačno mnogo jedinica. Možemo reći da je svaki takav  $y$  suma beskonačnog “pod-reda” od  $\sum_{n=1}^\infty x_n$ . Naime, za  $y > 0$  naš algoritamski dokaz garantira da nakon svakog koraka ostaje vrijediti  $y - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n > 0$  pa nije moguće da od tog trenutka nadalje počnemo definirati isključivo  $\varepsilon_n = 0$ . Ako pak uvjet (1) vrijedi samo za dovoljno velike  $n \in \mathbb{N}$ , tada, posljedično, svi osim konačno mnogo  $y \in A(x)$  imaju prikaze kao sume beskonačnih pod-redova od  $\sum_{n=1}^\infty x_n$ .

**Napomena 2.** Očigledno su dozvoljene varijante teorema kada indeks sumacije kreće od 0 ili od nekog prirodnog broja većeg od 1. Nadalje, prilično često se Kakeyin teorem 1 formulira uz dodatnu pretpostavku monotonosti niza,

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots,$$

no iz dokaza vidimo da ona nije potrebna. Ipak, obično je prirodno padajuće sortirati niz  $(x_n)_{n=1}^\infty$  prije primjene (a) dijela teorema 1, a ponekad to može biti i ključno, kao npr. u primjeru 5 ispod.

Navedimo još neke primjere skupova postignuća.

**Primjer 1** (Segment). Ako je  $x_n = 1/2^n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , tada je  $A(x) = [0, 1]$ . Primijetimo da je uvjet (1) ispunjen za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i to čak s jednakosti.

**Primjer 2** (Cantorov skup). Ako je  $x_n = 2/3^n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , tada je  $A(x)$  tzv. *Cantorov trijadski skup* prikazan na slici 1. Primijetimo da je (2) ispunjeno za sve  $n \in \mathbb{N}$ .



Slika 1. Cantorov skup.



Slika 2. Cantorval.

**Primjer 3** (Cantorval). Ako je  $x_{2n-1} = 3/4^n$  i  $x_{2n} = 2/4^n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , tada je  $A(x)$  tzv. (Guthrie–Nymannov) *Cantorval* prikazan na slici 2. Taj skup ima i “fraktalnu strukturu” i nepraznu nutrinu: on sadrži interval  $[2/3, 1]$  duljine  $1/3$ , intervale  $[1/6, 1/4]$  i  $[17/12, 3/2]$  duljine  $1/12$ , itd. Primijetimo da su i (1) i (2) ispunjeni za beskonačno mnogo indeksa  $n$ .

Zanimljivo je da su okarakterizirane sve topološke mogućnosti za skupove postignuća jednodimenzionalnih redova. To su učinili Joe Guthrie i James Nymann [7], dok su Nymann i Ricardo Sáenz [13] popravili grešku iz prethodnog članka.

**Teorem 2** ([7, 13]). *Neka je  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  apsolutno konvergentni red realnih brojeva. Tada je ispunjena točno jedna od sljedeće četiri mogućnosti:*

- (A1)  $A(x)$  je konačan skup;
- (A2)  $A(x)$  je konačna unija nedegeneriranih segmenata;
- (A3)  $A(x)$  je homeomorfan<sup>1</sup> Cantorovom skupu iz primjera 2;
- (A4)  $A(x)$  je homeomorfan Cantorvalu iz primjera 3.

Zainteresirani čitatelj može naći dokaz u [1]; vidjeti teorem 21.20. Kakeya je zapravo slutio da su (A1)–(A3) jedine mogućnosti i neuspješno to pokušavao dokazati. Na četvrtu mogućnost su prvi ukazali Alek Weinstein i Boris Shapiro [14]. Napomenimo da ipak nije jednostavno utvrditi u koju od četiri mogućnosti spada neki dani primjer. Preciznije, nije lako vidjeti je li riječ o Cantorovom skupu ili Cantorvalu.

<sup>1</sup>Skupovi  $X$  i  $Y$  su *homeomorfni* ako postoji bijekcija  $f: X \rightarrow Y$  takva da su  $f$  i  $f^{-1}$  neprekidne. Možemo reći da su  $X$  i  $Y$  “isti u topološkom smislu”.

## 2. Problemi o jediničnim razlomcima

Sada ćemo riješiti neke matematičke probleme motivirane pitanjima Paula Erdősa (1913.–1996.), u kojima se praktično može iskoristiti Kakeyina teorem 1. Svi ti problemi se tiču tzv. *jediničnih razlomaka*, što su razlomci oblika  $1/m$  za  $m \in \mathbb{N}$ .

**Primjer 4.** Jedan zanimljivi otvoreni problem Erdősa i Ronalda Grahama [5] je pokazati ili opovrgnuti da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k} - 1}$$

iracionalni broj za svaki izbor prirodnih brojeva  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Komentirajmo slabiju tvrdnju, da kolekcija svih takvih suma ima praznu nutrinu.<sup>2</sup> Naime, ako označimo  $x_n = 1/(2^n - 1)$ , tada lako provjerimo uvjet (2):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^k - 1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^n}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

odakle je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} < \frac{1}{2^n - 1}$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Iz teorema 1 slijedi da čak čitav skup postignuća  $A(x)$  reda  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ne sadrži interval.  $\square$

Zapravo je Erdős još ranije [3] postavio općenitije pitanje: može li

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^{n_k} - 1}$$

biti racionalni broj za bilo koju prirodnu bazu  $t \geq 2$  i bilo koji izbor prirodnih brojeva  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Pokazat ćemo slabiju tvrdnju koja kombinira redove tog oblika za nekoliko različitih brojeva  $t$ , a originalno su ju dokazali Terence Tao i autor ovog članka u [11].

**Primjer 5** ([11]). Neka su  $2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$  prirodni brojevi takvi da je

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j - 1} > 1.$$

<sup>2</sup>Kada bi svi brojevi tog oblika bili iracionalni, činili bi skup s praznom nutrinom, radi gustoće racionalnih brojeva u  $\mathbb{R}$ .

Tada postoje skupovi  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \mathbb{N}$  među kojima je barem jedan beskonačan i takvi su da je

$$\sum_{j=1}^m \sum_{n \in S_j} \frac{1}{t_j^n - 1} \in \mathbb{Q}.$$

Za dokaz promotrimo red čiji članovi su elementi multiskupa

$$\left\{ \frac{1}{t_j^k - 1} : j \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

sortirani u padajućem poretku u niz  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ . Provjerit ćemo da on zadovoljava pretpostavke (a) dijela teorema 1. Uzmimo

$$\varepsilon := 1 - \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j - 1} \right)^{-1} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (5)$$

i neka je  $N_0$  najmanji prirodni broj takav da je

$$2^{N_0} > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Za svaki indeks  $n \geq N_0$  dovoljno velik da vrijedi

$$x_n \leq \min_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{t_j^{N_0} - 1}$$

provjerit ćemo uvjet (1). Naime, za svaki  $1 \leq j \leq m$  neka je  $N_j \geq N_0$  prirodni broj takav da je

$$\frac{1}{t_j^{N_j} - 1} \geq x_n > \frac{1}{t_j^{N_j+1} - 1}. \quad (7)$$

Obzirom da niz  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  pada, svi razlomci  $1/(t_j^k - 1)$  za  $k \geq N_j + 1$  su svakako enumerirani njegovim članovima  $(x_l)_{l=n+1}^{\infty}$ . Dakle, možemo ocijeniti

$$\begin{aligned} \sum_{l=n+1}^{\infty} x_l &\geq \sum_{j=1}^m \sum_{k=N_j+1}^{\infty} \frac{1}{t_j^k - 1} > \sum_{j=1}^m \sum_{k=N_j+1}^{\infty} \frac{1}{t_j^k} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1/t_j^{N_j+1}}{1 - 1/t_j} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j^{N_j}} \frac{1}{t_j - 1}. \end{aligned}$$

Kako izbor od  $N_j$  garantira

$$t_j^{N_j} \geq 2^{N_j} \geq 2^{N_0} \stackrel{(6)}{>} \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{t_j^{N_j} - 1}{t_j^{N_j}} > 1 - \varepsilon,$$

dobivamo

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} x_l > (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j^{N_j} - 1} \frac{1}{t_j - 1} \stackrel{(7)}{\geq} (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^m x_n \frac{1}{t_j - 1} \stackrel{(5)}{=} x_n,$$

a to smo i trebali pokazati.

Sada teorem 1 daje da  $A(x)$  ima nepraznu nutrinu, a potom napomena 1 garantira da se svi osim eventualno konačno mnogo racionalnih brojeva iz  $A(x)$  mogu zapisati u obliku

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in S_j} \frac{1}{t_j^k - 1},$$

pri čemu su  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \mathbb{N}$  i nisu svi konačni. □

Još jedno zanimljivo Erdősovo pitanje [5, 4] tiče se istovremene racionalnosti suma dvaju redova: koliko brzo može rasti niz prirodnih brojeva  $2 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  takav da su obje sume

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} \tag{8}$$

racionalne? Naprimjer, za  $a_n = (n + 1)(n + 2)/2$  imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n + 1)(n + 2)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 2} \right) = 1$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n + 3)} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 3} \right) = \frac{11}{9}.$$

Slične primjere je moguće konstruirati i s polinomima većeg stupnja pa je Erdősa zanimalo već i može li niz  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  kao gore rasti barem eksponencijalno brzo. Odgovor je potvrđan.

**Primjer 6.** Postoje  $\alpha > 1$  i rastući niz prirodnih brojeva  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  koji zadovoljava

$$a_n \geq \alpha^n$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i takav je da su obje sume u (8) racionalni brojevi.

Slično kao u prethodnom primjeru dokaz nije eksplicitan. Izlistajmo svih 19 brojeva između  $2^6$  i  $2^7$  koji su relativno prosti s 2, 3 i 7:

$$\begin{array}{lllll} b_0 = 65, & b_1 = 67, & b_2 = 71, & b_3 = 73, & b_4 = 79, \\ b_5 = 83, & b_6 = 85, & b_7 = 89, & b_8 = 95, & b_9 = 97, \\ b_{10} = 101, & b_{11} = 103, & b_{12} = 107, & b_{13} = 109, & b_{14} = 113, \\ b_{15} = 115, & b_{16} = 121, & b_{17} = 125, & b_{18} = 127. \end{array}$$

Za svaki niz  $\epsilon = (\epsilon_n)_{n=0}^{\infty}$  sastavljen od nula i jedinica promotrimo skup prirodnih brojeva

$$S_{\epsilon} := \left( \bigcup_{\substack{i \geq 0, 0 \leq j \leq 18 \\ \epsilon_{19i+j}=0}} \{9 \cdot 2^i b_j, 21 \cdot 2^i b_j\} \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{i \geq 0, 0 \leq j \leq 18 \\ \epsilon_{19i+j}=1}} \{7 \cdot 2^i b_j, 63 \cdot 2^i b_j\} \right).$$

Upravo će  $S_{\epsilon}$  biti skup vrijednosti traženog niza za pažljivo odabrani  $\epsilon$ . Obzirom da je

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{63} = \frac{10}{63}, \quad (9)$$

suma

$$\sum_{m \in S_{\epsilon}} \frac{1}{m} = \frac{10}{63} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right)}_{=2} \left( \sum_{j=0}^{18} \frac{1}{b_j} \right)$$

je uvijek jednaka istom racionalnom broju (neovisnom o  $\epsilon$ ). Nadalje, drugu promatranu sumu možemo zapisati

$$\sum_{m \in S_{\epsilon}} \frac{1}{m-1} = y + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x_n, \quad (10)$$

pri čemu je

$$y := \sum_{j=0}^{18} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{9 \cdot 2^i b_j - 1} + \frac{1}{21 \cdot 2^i b_j - 1} \right)$$

i  $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$  je dan s

$$x_{19i+j} := \frac{1}{7 \cdot 2^i b_j - 1} + \frac{1}{63 \cdot 2^i b_j - 1} - \frac{1}{9 \cdot 2^i b_j - 1} - \frac{1}{21 \cdot 2^i b_j - 1}.$$

Pokažimo da je skup postignuća reda  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  jednak cijelom segmentu  $[0, \sum_{n=0}^{\infty} x_n]$ .

U provjeri uvjeta Kakeyinovog teorema 1 trebat ćemo ocjenu

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \quad (11)$$

za  $n \geq 2$ , koja je neposredna posljedica od

$$n^3 \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n}{n-1} \in [1, 2].$$

Označavajući

$$\Delta := \frac{1}{7^2} + \frac{1}{63^2} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{21^2} = \frac{8}{1323} > 0$$

i primijetivši

$$0 < \frac{2}{7^3} + \frac{2}{63^3} - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{21^3} < \frac{1}{200}, \quad -\frac{1}{25000} < \frac{1}{7^3} + \frac{1}{63^3} - \frac{2}{9^3} - \frac{2}{21^3} < 0,$$

radi (11) i (9) možemo pisati

$$\frac{\Delta}{2^{2i}b_j^2} - \frac{1}{25000 \cdot 2^{3i}b_j^3} < x_{19i+j} < \frac{\Delta}{2^{2i}b_j^2} + \frac{1}{200 \cdot 2^{3i}b_j^3}.$$

Konačno, zbog  $b_j > 2^6$  dobivamo

$$\left(1 - \frac{3}{20000}\right) \cdot \frac{\Delta}{2^{2i}b_j^2} < x_{19i+j} < \left(1 + \frac{3}{200}\right) \cdot \frac{\Delta}{2^{2i}b_j^2} \quad (12)$$

za  $i \geq 0$  te  $0 \leq j \leq 18$ .

Iz (12) odmah slijedi da je  $x_n > 0$  za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  i da red  $\sum_n x_n$  konvergira. Korisno je znati i da je niz  $(x_n)_{n=0}^\infty$  padajući, premda to nije nužno za primjenu teorema 1. Naime, za  $0 \leq j \leq 17$  imamo

$$\frac{x_{19i+j+1}}{x_{19i+j}} < \frac{1 + 3/200}{1 - 3/20000} \left(\max_{0 \leq j \leq 17} \frac{b_j}{b_{j+1}}\right)^2 < 1,$$

dok je

$$\frac{x_{19(i+1)}}{x_{19i+18}} < \frac{1 + 3/200}{1 - 3/20000} \left(\frac{b_{18}}{2b_0}\right)^2 < 1,$$

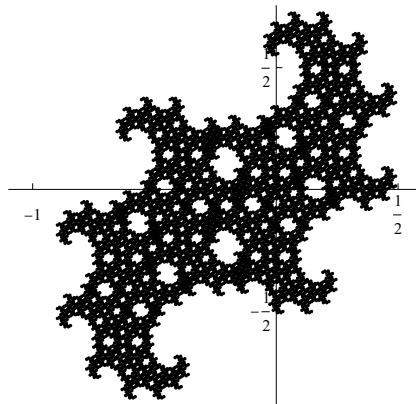
oboje opet zahvaljujući (12). Kako bismo pak provjerili uvjet (1) za  $n \in \mathbb{N}_0$ , zapišimo taj indeks kao  $n = 19i + j$ ,  $i \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq 18$ , primijenimo (12) i prisjetimo se da je  $2^6 < b_j < 2^7$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{19i+j}} \sum_{l=19i+j+1}^{\infty} x_l &> \frac{1}{x_{19i+j}} \sum_{l=19(i+1)}^{19(i+1)+18} x_l \\ &> \frac{(1 - 3/20000) \cdot (1/2^{2i+2}) \cdot 19 \cdot 2^{-14}}{(1 + 3/200) \cdot (1/2^{2i}) \cdot 2^{-12}} > 1. \end{aligned}$$

Po (a) dijelu teorema 1 sada doista znamo da je  $A(x)$  segment pa je moguće odabrati koeficijente  $\epsilon$  na način da je (10) također racionalni broj. Neka je  $(a_k)_{k=1}^\infty$  strogo rastući niz koji enumerira skup  $S_\epsilon$ . Za svaki prirodni broj  $m \geq 6$  samo elementi

$$9 \cdot 2^i b_j, \quad 21 \cdot 2^i b_j \quad \text{ili} \quad 7 \cdot 2^i b_j, \quad 63 \cdot 2^i b_j$$

od  $S_\epsilon$  koji odgovaraju indeksima  $0 \leq i \leq m - 7$ ,  $0 \leq j \leq 18$  mogu biti manji od  $2^m$  pa takvih članova ima najviše  $38(m - 6)$ . Posljedično, ako



Slika 3. Zmajevi blizanci.

za  $k \in \mathbb{N}$  uzmemo prirodni broj  $m \geq 6$  takav da je  $38(m-6) < k \leq 38(m-5)$ , tada imamo

$$a_k \geq 2^m > 2^{k/38} > 1.01^k,$$

što potvrđuje željeni eksponencijalni rast.  $\square$

Zapravo su Tao i autor u radu [11] konstruirali niz  $(a_n)_{n=1}^\infty$  s istim svojstvom koji raste čak dvostruko eksponencijalno, tj.

$$a_n \geq 2^{\beta^n}$$

za neki  $\beta > 1$  i svaki  $n \in \mathbb{N}$ . S druge strane, opće je poznato da niz koji raste brže od  $(2^{\beta^n})_{n=1}^\infty$  za svaki  $\beta$  nužno već samo sumu  $\sum_{n=1}^\infty 1/a_n$  čini iracionalnom [6]. Na taj način je u [11] načelno odgovoreno na Erdősovo pitanje.

Problemi poput prethodnog se prirodnije mogu promatrati u kontekstu proučavanja skupova postignuća redova  $\sum_n x_n$  s članovima  $x_n$  u višedimenzionalnom prostoru  $\mathbb{R}^d$ . Ipak, oni mogu imati vrlo složenu strukturu i do danas nije poznata njihova karakterizacija. Zanimljive fraktalne primjere dao je Manuel Morán [12].

**Primjer 7** ([12]). Uzmimo kompleksni broj  $z = 0.7e^{i7\pi/6}$  te skicirajmo skup postignuća reda  $\sum_{n=1}^\infty z^n$  u  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ . Dobiva se fraktal na slici 3, kojega se nekada zove *zmajevi blizanci* (eng. *twindragon*).

U vezi višedimenzionalnih redova jediničnih razlomaka navodimo dosta općeniti rezultat Taea i autora iz članka [11], koji ne govori mnogo o topološkoj strukturi, osim što garantira da skup postignuća ima nepraznu nutrinu.

**Teorem 3** ([11]). *Neka je  $d \in \mathbb{N}$ . Definiramo niz  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$  u  $\mathbb{R}^d$  tako da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  stavimo*

$$x_n := \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+d-1} \right).$$

*Tada skup postignuća  $A(x)$  reda  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  ima nepraznu nutrinu, tj. sadrži nedegeneriranu  $d$ -dimenzionalnu kuglu.<sup>3</sup>*

Posebni slučaj u  $d = 2$  dimenzije dokazali su Erdős i Ernst Straus, ali nikada nisu objavili dokaz, jer ih je mučila analogna tvrdnja u višim dimenzijama. Autor ovog članka je najprije dokazao trodimenzionalni slučaj [10] konstruirajući kuglicu radijusa  $10^{-24}$  u skupu  $A(x)$ . Dokaz općenitog rezultata iz [11] je složeniji i nije tako eksplicitan, ali je i dalje elementaran.

Spomenimo samo jednu direktnu posljedicu posljednjeg teorema.

**Primjer 8.** Pokažimo da postoji niz potpunih kvadrata  $(b_n)_{n=1}^\infty$  takav da su

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{2}}{b_n - 4} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{3}}{b_n - 9}$$

racionalni brojevi.

Naime, skup

$$\mathbb{Q}\sqrt{2} \times \mathbb{Q}\sqrt{2} \times \mathbb{Q}\sqrt{3} \times \mathbb{Q}\sqrt{3}$$

je gust u  $\mathbb{R}^4$  pa iz teorema 3 slijedi da postoji strogo rastući niz  $(a_n)_{n=1}^\infty$  prirodnih brojeva većih od 3 takav da je

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n - 2} &\in \mathbb{Q}\sqrt{2}, & \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n + 2} &\in \mathbb{Q}\sqrt{2}, \\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n - 3} &\in \mathbb{Q}\sqrt{3}, & \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n + 3} &\in \mathbb{Q}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{4}{a_n^2 - 4} \in \mathbb{Q}\sqrt{2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{a_n^2 - 9} \in \mathbb{Q}\sqrt{3},$$

tj.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{2}}{a_n^2 - 4} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{3}}{a_n^2 - 9} \in \mathbb{Q},$$

što je upravo tražena tvrdnja uz  $b_n = a_n^2$ . □

<sup>3</sup>Zapravo se pokazuje i više: nepraznu nutrinu ima već i skup sastavljen od točaka  $\sum_{n \in S} x_n$  takvih da je  $S$  skup članova dvostruko-eksponencijalno rastućeg niza prirodnih brojeva.

### 3. Zadaci za vježbu

**Zadatak 1.** Ako je  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  apsolutno konvergentni red u  $\mathbb{R}^d$  s članovima  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ , dokažite da je  $A(x)$  uvijek kompaktan skup (tj. zatvoren je i ograničen).

**Zadatak 2.** Dokažite svojevrsan obrat Kakeyinovog teorema 1: ako je  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  padajući niz brojeva iz  $\langle 0, \infty \rangle$  takav da red  $\sum_n x_n$  konvergira i da je  $A(x)$  jednak segmentu  $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$ , tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$  mora vrijediti (1).

**Zadatak 3.** Skup

$$A(x) = \left\{ \sum_{n \in S} \frac{1}{2^n - 1} : S \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

iz primjera 4 je tzv. *debeli Cantorov skup*, što znači da ima pozitivnu duljinu (tj. Lebesgueovu mjeru). Dokažite to!

**Zadatak 4.** Dokažite sljedeće poopćenje (a) dijela Kakeyinovog teorema, formulirano u nedavnom članku Tončija Crmarića i autora [2]. Neka su  $X_1, X_2, X_3, \dots$  konačni podskupovi od  $[0, \infty)$  s barem dva elementa i takvi da  $\sum_n \max X_n$  konvergira. Za svaki  $n \in \mathbb{N}$  označimo

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} (\max X_k - \min X_k)$$

i neka je  $\Delta_n$  najveća duljina intervala na koje  $X_n$  dijeli  $[\min X_n, \max X_n]$ . Ako vrijedi  $r_n \geq \Delta_n$  za sve dovoljno velike indekse  $n \in \mathbb{N}$ , tada je skup

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \in X_n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \right\}$$

jednak konačnoj uniji nedegeneriranih segmenata. Prvi dio teorema 1 se dobiva u posebnom slučaju  $X_n = \{0, x_n\}$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

**Zadatak 5.** Erdős i Graham [5] su pitali postoji li ograničeni niz prirodnih brojeva  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + b_n} \in \mathbb{Q}.$$

Iskoristite prethodni zadatak kako biste pokazali da doista postoji takav niz  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ , čak štoviše s vrijednostima u skupu  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Ovo je posebni slučaj općenitijeg rezultata iz [11].

**Zadatak 6.** Neka je  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  apsolutno konvergentni red s članovima  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  iz  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Može li  $A(x)$  biti jednak kvadratu  $[0, 1]^2$  ?  
 (b) Može li  $A(x)$  biti trokut  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$  ?

**Zadatak 7.** Dokažite da postoje niz prirodnih brojeva  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  i prirodni brojevi  $m_1, \dots, m_6$  takvi da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} &= \sqrt{m_3} - \sqrt{m_4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 2} &= \sqrt{m_5} - \sqrt{m_6}.\end{aligned}$$

## Zahvale

Ovaj članak nastao je na temelju jednog mogjeg predavanja u sklopu fakultativnog predmeta *Studentska natjecanja iz matematike* na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Zahvaljujem studentima koji su slušali predavanje te pokazali interes za gradivo i zadatke. Također zahvaljujem Tončiju Crmariću na čitanju članka i korisnim komentarima te na zajedničkom znanstvenom radu na istu temu.

## Literatura

- [1] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, F. Prus-Wišniowski, *Topological and algebraic aspects of subsums of series*, Traditional and present-day topics in real analysis, 345–366, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź, 2013.
- [2] T. Crmarić, V. Kovač, *On the irrationality of certain superpolynomially decaying series*, prihvaćen za objavljivanje u *Colloq. Math.* **179** (2025), 55–68.
- [3] P. Erdős, *On the irrationality of certain series*, *Math. Student* **36** (1968), 222–226.
- [4] P. Erdős, *On the irrationality of certain series: problems and results*, New advances in transcendence theory (Durham, 1986), Alan Baker (Ed.), 102–109, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

- [5] P. Erdős, R. L. Graham, *Old and new problems and results in combinatorial number theory*, Monographies de L'Enseignement Mathématique **28**, Université de Genève, Ženeva, 1980.
- [6] P. Erdős, E. G. Straus, *On the irrationality of certain Ahmes series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **27** (1964), 129–133.
- [7] J. A. Guthrie, J. E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. **55** (1988), 323–327.
- [8] S. Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Tōhoku Sci. Rep. **3** (1914), 159–164.
- [9] S. Kakeya, *On the set of partial sums of an infinite series*, Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc., 2nd ser. **7** (1914), 250–251.
- [10] V. Kovač, *On the set of points represented by harmonic subseries*, prihvaćen za objavljivanje u Amer. Math. Monthly **132** (2025), no. 9, 895–911.
- [11] V. Kovač, T. Tao, *On several irrationality problems for Ahmes series*, Acta Math. Hungar. **175** (2025), 572–608.
- [12] M. Morán, *Fractal series*, Mathematika, **36** (1989), 334–348.
- [13] J. E. Nymann, R. A. Sáenz, *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. **83** (2000), 1–4.
- [14] A. D. Weinstein, B. Zalmanovich Shapiro. *On the structure of the set of  $\bar{\alpha}$ -representable numbers*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **24** (1980), 8–11.

Vjekoslav Kovač

Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb

*E-mail:* vjekovac@math.hr