ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.8 (2025) 117–134
https://doi.org/10.32817/amssd.8.6

Zaprimljen: 26. lipnja 2025.
Prihvaćen: 11. rujna 2025.

# Zašto je nogomet nepredvidljiviji sport od rukometa?

Goran Kovačević, Damir Vukičević

**Sažetak**

U ovom radu istražujemo razliku u predvidljivosti nogometa i rukometa. Polazimo od empirijske tvrdnje da se u sportovima s manjim brojem postignutih poena po utakmici češće događaju neočekivani ishodi. Matematičkim modeliranjem prikazujemo kako binomna razdioba omogućuje kvantitativnu analizu te pojave. Rezultati potvrđuju da je, unatoč istoj relativnoj snazi timova, nogomet znatno osjetljiviji na slučajnosti od rukometa.

*Ključni pojmovi: teorija vjerojatnosti, binomna razdioba, nogomet, rukomet, nepredvidljivost, modeliranje*

**Abstract**

In this paper, we investigate the difference in predictability between football and handball. We start from the empirical claim that unexpected outcomes occur more often in sports with fewer points scored per game. We show through mathematical modeling how the binomial distribution allows for a quantitative analysis of this phenomenon. The results confirm that, despite the same relative strength of the teams, football is significantly more susceptible to chance than handball.

*Keywords: probability theory, binomial distribution, football, handball, unpredictability, modeling*

# 1. Uvod

Neizvjesnost je sastavni dio sporta pa se ishodi utakmica ponekad teško mogu predvidjeti. No, nogomet je ipak jedan od najnepredvidljivijih sportova. Iznenađenja u njemu su mnogo češća nego u rukometu, košarci i vaterpolu. Može li nam i kako matematika pomoći da objasnimo zašto je to tako? To će biti tema ovog rada.

Promotrit ćemo jednostavni matematički model koji će pomoći čitatelju da dobije bolji uvid u ovaj fenomen, pa čak i kvantificira ove ideje. Za to će nam trebati neki osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti.

# 2. Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

Prije nego se dotaknemo konkretnih problema vezanih za temu, trebat će nam neki pojmovi koje ćemo definirati u ovom dijelu rada. Za bitne pojmove dani su i konkretni primjeri.

## 2.1. Ishod, prostor elementarnih događaja, događaj

Vjerojatnost je grana matematike koja proučava slučajne pokuse i njihove ishode.

*Slučajni pokus* je pokus čiji rezultat ne možemo unaprijed predvidjeti, primjerice bacanje kockice (u igrama poput Čovječe ne ljuti se). Promatrat ćemo isključivo slučajne pokuse i zvat ćemo ih skraćeno – pokusi.

*Rezultat izvođenja nekog pokusa zove se* ***ishod****.* U primjeru s kockicom ishod može biti bilo koji od brojeva $1, 2, \ldots, 6$.

***Prostor elementarnih događaja*** *nekog pokusa je skup svih mogućih ishoda tog pokusa. Prostor elementarnih događaja označavamo s* $\Omega$*.*

Tako je npr. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ prostor elementarnih događaja jednog bacanja igraće kockice.

*Svaki podskup od* $\Omega$ *naziva se* ***događaj****. Događaj koji sadrži točno jedan mogući ishod zove se* ***elementarni događaj****. Primjerice, kod bacanja kockice:* $A = \{1\}$ *je elementarni događaj „pojavila se jedinica”.*

*Za događaj koji sadrži više mogućih ishoda nekog pokusa kažemo da je* ***složeni događaj****. Npr. kod bacanja kockice* $A = \{2, 4, 6\}$ *je složeni događaj „pojavio se paran broj”.*

Unija svih elementarnih događaja je očito $\Omega$ pa se, iz tog razloga, $\Omega$ i naziva prostor elementarnih događaja.

*Događaj* $A \subseteq \Omega$ *se dogodi (tj. realizira ili ostvari) ako je ishod pokusa element skupa* $A$*.*

Događaj $A \cap B$ se realizira samo ako se realiziraju oba događaja ($A$ i $B$). Primjerice, neka je događaj $A =$ „pao je paran broj”, a događaj

$B$ = „pao je broj djeljiv s 3". Što nam znači da su se dogodila oba događaja $A$ i $B$? To znači da je pao broj koji je i djeljiv s 3 i paran broj, a jedini takav broj je 6. Dakle, za $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{3, 6\}$ je

$$A \cap B = \{6\}.$$

Događaj $A \cup B$ se realizira ako se realizira samo događaj $A$ ili ako se realizira samo događaj $B$ ili ako se realiziraju oba događaja (i $A$ i $B$). Promotrimo događaje $A$ i $B$ iz prethodnog primjera. Što nam znači da se dogodio bar jedan od ovih događaja? To znači da je pao broj djeljiv s 3 ili paran broj, a brojevi za koje to vrijedi su 2, 3, 4 i 6. Dakle, za $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{3, 6\}$ je

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}.$$

## 2.2. Klasična definicija vjerojatnosti

**Definicija 1.** *Ako je $\Omega$ konačni prostor jednako mogućih elementarnih događaja nekog pokusa, onda se vjerojatnost $P(A)$ događaja $A \subseteq \Omega$ definira formulom:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

*gdje je $|A|$ broj elemenata skupa $A$ (tj. broj svih mogućih ishoda koje sadrži $A$, odnosno broj svih mogućih ishoda koji realiziraju događaj $A$) i $|\Omega|$ broj elemenata skupa $\Omega$ (tj. broj svih mogućih ishoda).*

Očito je $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$ i $P(\Omega) = 1$.

**Primjer 1.** *Vjerojatnost događaja $A$ = „u bacanju kockice pojavio se paran broj" je*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

*jer $A = \{2, 4, 6\}$ sadrži 3 moguća ishoda (tj. događaj $A$ se može realizirati na 3 načina), a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ svih 6 mogućih ishoda.*

## 2.3. Međusobno nezavisni i isključivi događaji

**Definicija 2.** *Događaji $A$ i $B$ su* ***međusobno nezavisni*** *(ili - događaj $A$ je nazavisan od događaja $B$ i događaj $B$ je nezavisan od događaja $A$) ako vrijedi:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

*gdje $P(A \cap B)$ označava vjerojatnost da se realiziraju oba događaja, i $A$ i $B$.*

**Definicija 3.** *Pokusi* $E_1$ *i* $E_2$ *su* ***međusobno nezavisni*** *ako ishod od* $E_1$ *ne utječe na ishod od* $E_2$*, a ishod od* $E_2$ *ne utječe na ishod od* $E_1$*.*

Na primjer:
- ako je prvi pokus bacanje igraće kockice, a drugi bacanje novčića, onda su ta dva pokusa međusobno nezavisna;
- ako je prvi pokus izvlačenje jednog broja iz bubnja s brojevima od 1 do 39, a drugi bacanje novčića, onda su ta dva pokusa međusobno nezavisna.

**Definicija 4.** *Za pokuse* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *kažemo da su* ***međusobno nezavisni*** *ako ishod bilo kojeg od njih ni na koji način ne ovisi o ishodima ostalih pokusa.*

**Definicija 5.** *Ako je* $A_1$ *događaj čija realizacija ovisi isključivo o ishodu pokusa* $E_1$*,* $A_2$ *događaj čija realizacija ovisi isključivo o ishodu pokusa* $E_2$*, ...,* $A_n$ *događaj čija realizacija ovisi isključivo o ishodu pokusa* $E_n$*, a pokusi* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *su međusobno nezavisni, onda su i događaji* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***međusobno nezavisni*** *te vrijedi:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n).$$

**Definicija 6.** *Kažemo da su događaji* $A$ *i* $B$ ***međusobno isključivi****, ili da se međusobno isključuju, ako nemaju zajedničkih ishoda, tj. ako je* $A \cap B = \emptyset$*. Tada je* $P(A \cap B) = 0$*.*

**Primjer 2.** *Neka je* $A =$ *„pri bacanju kockice pojavila se dvojka" i* $B =$ *„pri bacanju kockice pojavila se četvorka", onda je* $A \cup B =$ *„pri bacanju kockice pojavila se dvojka ili četvorka".*

*Imamo* $A = \{2\}$*,* $B = \{4\}$ *pa je* $A \cup B = \{2, 4\}$*. Događaji* $A$ *i* $B$ *se međusobno isključuju jer je*

$$A \cap B = \emptyset.$$

*Stoga je*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

*odnosno*

$$P(\{2,4\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

*Primjenom formule*

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|}$$

*dobivamo isti rezultat:*

$$P(\{3,4\}) = \frac{|\{3,4\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Definicija 7.** *Kažemo da je $A^c \subseteq \Omega$* ***suprotan događaj*** *događaja $A \subseteq \Omega$ ako su $A$ i $A^c$ međusobno isključivi i vrijedi $A \cup A^c = \Omega$.*
*Tada je*

$$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1.$$

*Dakle, $P(A) + P(A^c) = 1$ pa je formulom*

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

*definirana* ***vjerojatnost suprotnog događaja****. Kako je i $A$ suprotan događaj događaja $A^c$, onda možemo reći da su $A$ i $A^c$* ***međusobno suprotni događaji****.*

**Definicija 8.** *Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su* ***međusobno isključivi*** *ako je*

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

*čim je $i \neq j$. Tada je*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Da rezimiramo najbitnije.

Međusobno nezavisni događaji mogu nastupiti istovremeno, ali pojava jednog ne utječe na vjerojatnost drugog. Vjerojatnosti međusobno nezavisnih događaja $A$ i $B$ se moraju pomnožiti da bi se dobila vjerojatnost događaja $A \cap B$.

Međusobno isključivi događaji ne mogu nastupiti istovremeno, tj. jedan ishod pokusa realizira samo jednog od njih. Vjerojatnosti međusobno isključivih događaja $A$ i $B$ se moraju zbrojiti da bi se dobila vjerojatnost događaja $A \cup B$.

## 2.4. Kombinatorika

***Kartezijev produkt nepraznih skupova*** *$S_1$* ***i*** *$S_2$ je skup $S_1 \times S_2$ čiji su elementi svi uređeni parovi $(s_1, s_2)$ takvi da je $s_1 \in S_1$ i $s_2 \in S_2$.*
*Dakle,*

$$S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) : s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}.$$

*Uređeni parovi $(a, b)$ i $(x, y)$ su jednaki ako i samo ako je*

$$a = x \quad i \quad b = y.$$

Iz toga slijedi da su skupovi $S_1 \times S_2$ i $S_2 \times S_1$ jednaki ako i samo ako je $S_1 = S_2$.

Ako je npr. $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$, onda je

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

Kao što vidimo iz ovog primjera, ako skup $A$ ima 3 elementa, a skup $B$ 2 elementa, onda skup $A \times B$ ima $3 \cdot 2 = 6$ elemenata.

Općenito vrijedi:
Ako skup $A$ ima $m$ elemenata, a skup $B$ $n$ elemenata, onda skup $A \times B$ ima $m \cdot n$ elemenata. Tada pišemo:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Analogno se može definirati **Kartezijev produkt nepraznih skupova** $S_1, S_2, \ldots, S_k$:

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k = \{(s_1, s_2, \ldots, s_k) : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_k \in S_k\},$$

a zatim i pokazati da se broj elemenata skupa $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$ može izračunati formulom:

$$|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_k|.$$

*Svaki element $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ skupa $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$ naziva se **uređena $k$-torka**.*

Vrijedi:

$$(s_1, s_2, \ldots, s_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

samo ako je $s_i = t_i$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

**Primjer 3.** *Koliko ima različitih troznamenkastih brojeva kojima su znamenke elementi skupa $S = \{0, 1, 2, 3\}$?*

Zapravo treba naći broj elemenata skupa $S_1 \times S_2 \times S_3$, gdje je $S_1 = \{1, 2, 3\}$ (jer troznamenkasti broj ne može početi s nulom) i $S_2 = S_3 = S$. Prema tome,

$$|S_1 \times S_2 \times S_3| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48.$$

**Definicija 9.** *Ako neprazni skup $S$ ima $n$ elemenata i $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onda se svaka uređena $k$-torka različitih elemenata skupa $S$ zove **varijacija bez ponavljanja $k$-tog razreda** u skupu $S$. Ukupan broj takvih varijacija označavamo s $V_n^k$.*

Vrijedi:

$$V_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1),$$

jer prvi element možemo odabrati na $n$ načina, drugi na $n-1$ načina (ne smijemo odabrati onog kojeg smo odabrali kao prvi element), treći na $n-2$ načina (ne smijemo odabrati elemente koje smo odabrali za prvi i drugi element) i tako dalje.

Dakle,

$$
\begin{aligned}
V_n^k &= n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!},
\end{aligned}
$$

gdje se funkcija $n!$ (čita se „$n$ faktorijel") definira sljedećim jednakostima:

$$
\begin{aligned}
0! &= 1, \\
n! &= n(n-1)! \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Tako je na primjer:

$$
\begin{aligned}
1! &= 1(1-1)! = 1\cdot 0! = 1\cdot 1 = 1, \\
2! &= 2\cdot(2-1)! = 2\cdot 1! = 2\cdot 1 = 2, \\
&\vdots \\
n! &= n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1.
\end{aligned}
$$

**Definicija 10.** *Svaka varijacija bez ponavljanja $n$-tog razreda u nepraznom skupu $S$ s $n$ elemenata naziva se permutacija elemenata tog skupa. Broj takvih permutacija označavamo s $P_n$.*

Vrijedi:

$$
P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.
$$

**Primjer 4.** *Ishod nogometnog prvenstva je tablica s poredanih 12 klubova.*

a) *Koliko ima različitih ishoda?*

$$
P_{12} = 12! = 479\,001\,600.
$$

b) *Koliko je različitih oklada ako se kladi na 3 prvoplasirana kluba?*

$$
V_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320.
$$

Važno je istaknuti da je kod popisivanja svih varijacija ili permutacija elemenata nekog skupa bitan poredak kojim se pišu elementi jer se radi o uređenim $k$-torkama, odnosno uređenim $n$-torkama. Tako su npr. $(1,2,3)$ i $(3,1,2)$ dvije različite varijacije, odnosno dvije različite permutacije ako skup $S$ sadrži samo brojeve 1, 2 i 3. Što ako poredak pisanja elemenata nije bitan? Tada se radi o kombinacijama. U tom slučaju ne promatramo uređene $k$-torke elemenata zadanog skupa, nego njegove $k$-člane podskupove. Naime, kad zadajemo neki skup, poredak kojim pišemo elemente tog skupa nije bitan. Tako je skup $\{1,2,3\}$ jednak skupu $\{3,1,2\}$.

**Definicija 11.** *Ako neprazni skup $S$ ima $n$ elemenata i $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, onda se svaki $k$-člani podskup od $S$ zove* ***kombinacija bez ponavljanja $k$-tog razreda*** *elemenata skupa $S$. Ukupan broj takvih kombinacija označavamo s $C_n^k$.*

Vrijedi:

$$P_k \cdot C_n^k = V_n^k,$$

jer se svaka od ukupno $C_n^k$ kombinacija može napisati kao uređena $k$-torka na $P_k$ načina. Stoga je

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Izraz

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

označavamo s $\binom{n}{k}$ (čitamo „$n$ povrh $k$" ili „$n$ nad $k$") pa pišemo

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

**Primjer 5.** *Na koliko se načina može izvući 7 (različitih) brojeva u igri LOTO 7 od 39?*

$$C_{39}^7 = \binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15\,380\,937.$$

## 2.5. Binomna razdioba

**Definicija 12.** *Neka je $\Omega$ prostor elementarnih događaja nekog pokusa.* ***Diskretna slučajna varijabla*** *je funkcija čija je domena skup $\Omega$, a skup vrijednosti konačan ili prebrojiv skup.*

*Ako diskretna slučajna varijabla $X$ poprima vrijednost $x_1$ s vjerojatnošću $P(X = x_1) = p_1$, vrijednost $x_2$ s vjerojatnošću $P(X = x_2) = p_2$, itd. (sve dok se ne iscrpe sve moguće vrijednosti funkcije $X$), onda* *kažemo da $X$ ima* ***diskretnu razdiobu*** *zadanu vrijednostima $x_1, x_2, \ldots$ i pripadajućim vjerojatnostima $p_1, p_2, \ldots$, te pišemo*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

*Vrijedi:*

$$\sum_k p_k = 1.$$

*Funkcija $p : \{x_1, x_2, \ldots\} \to [0, 1]$ definirana s*

$$p(x) = P(X = x)$$

*zove se* ***zakon razdiobe*** *ili* ***funkcija vjerojatnosti*** *slučajne varijable $X$.*

**Definicija 13.** *Pretpostavimo da se događaj $A$ u nekom pokusu pojavljuje s vjerojatnošću $p$ koja se ne mijenja tijekom ponavljanja pokusa. Dakle, u svakom ponavljanju pokusa moguća su dva ishoda:*

*$A$ se dogodio, s vjerojatnošću $P(A) = p$*

*ili*

*$A$ se nije dogodio, tj. dogodio se $A^c$ s vjerojatnošću $P(A^c) = 1 - p = q$, jer su $A$ i $A^c$ međusobno suprotni događaji.*

*Svaki niz od $n$ ponovljenih (međusobno nezavisnih) pokusa od kojih svaki ima samo takva dva moguća ishoda naziva se* ***Bernoullijeva shema****.*
*Broj nastupa događaja $A$ u takvih $n$ pokusa predstavlja diskretnu slučajnu varijablu $X$ koja može poprimiti vrijednosti $0, 1, \ldots, n$.*
*Razdioba takve slučajne varijable $X$ zove se* ***binomna razdioba****.*
*Ako neka slučajna varijabla $X$ ima binomnu razdiobu, simbolički pišemo*

$$X \sim B(n, p).$$

Pokažimo na jednostavnom primjeru da je

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{\,n-x}$$

funkcija vjerojatnosti slučajne varijable $X \sim B(n, p)$.

**Primjer 6.** *Bacamo igraču kockicu 5 puta. Označimo s $A$ događaj „pojavila se dvica”.*

*U svakom bacanju kockice, tj. u svakom ponavljanju pokusa, vjerojatnost da se $A$ dogodi je ista, i iznosi*

$$p = \frac{1}{6}.$$

*Vjerojatnost da se $A^c$ dogodi je također u svakom bacanju kockice ista i iznosi $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Dakle, broj pojava broja 2 u 5 bacanja kockice je diskretna slučajna varijabla $X$ koja ima binomnu razdiobu i može poprimiti vrijednosti od 0 do 5. Stoga pišemo*

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right).$$

*Izračunajmo vjerojatnost događaja $P(X = x)$ za svaki $x \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.*

*Neka za $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ $A_i$ označava događaj „u i-tom bacanju kockice pojavila se dvica", a $A_i^c$ njemu suprotan događaj „u i-tom bacanju kockice dvica se nije pojavila".*
*Tada je za svaki i*

$$P(A_i) = p = \frac{1}{6}, \qquad P(A_i^c) = q = \frac{5}{6}.$$

*Sva bacanja kockice su međusobno nezavisni pokusi pa su događaji u različitim bacanjima međusobno nezavisni. Vjerojatnost presjeka međusobno nezavisnih događaja je umnožak njihovih vjerojatnosti.*
*Stoga je*

$$P(X = 0) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_5^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdots P(A_5^c) = q^5 = \frac{3125}{7776}.$$

*Za $X = 1$ imamo*

$$\begin{aligned} P(X = 1) = {} & P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \\ & + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \\ & + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) = 5pq^4 = \frac{3125}{7776}. \end{aligned}$$

*Naime, vjerojatnosti ovdje moramo zbrajati jer se 5 događaja:*

$$\begin{gathered} A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c, \\ A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c, \\ A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c, \\ A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c \end{gathered}$$

*i*

$$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5,$$

*međusobno isključuju. Realizacija bilo kojeg od njih isključuje mogućnost realizacije svih ostalih događaja.*
*Vjerojatnost svakog od ovih pet događaja se računa množenjem jer se događaji s različitim indeksima pojavljuju u različitim (međusobno nezavisnim) bacanjima pa su međusobno nezavisni. Tako je npr.*

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4^c) \cdot P(A_5^c).$$

*Objasnimo što predstavlja broj 5 ispred umnoška* $pq^4$ *kod računanja vjerojatnosti* $P(X = 1)$.
*To je zapravo broj jednočlanih podskupova skupa od 5 elemenata.*
*Naime, ta petica je odgovor na pitanje:*
*Na koliko se načina može izabrati jedno bacanje kockice od njih 5 u kojem će se pojaviti dvica?*
*Da bismo odgovorili na to pitanje trebamo izračunati koliko jednočlanih podskupova ima skup od 5 elemenata, tj. izračunati broj kombinacija* $C_5^1$*:*

$$C_5^1 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5.$$

*Analogno,*

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 q^3 = \frac{625}{3888},$$

*jer se na* $\binom{5}{2}$ *načina mogu izabrati 2 bacanja kockice od njih 5 u kojima će se pojaviti dvica,*

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^2 = \frac{125}{3888},$$

*jer se na* $\binom{5}{3}$ *načina mogu izabrati 3 bacanja kockice od njih 5 u kojima će se pojaviti dvica, itd.*
*Kako je*

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = p^0 = q^0 = 1,$$

*lako se vidi da za svaki* $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *vrijedi:*

$$P(X = x) = \binom{5}{x} p^x q^{5-x}.$$

Sada znamo sve što nam je neophodno znati da bismo mogli rješavati probleme vezane za temu rada. U nastavku ćemo definirati i riješiti konkretni problem, najprije za rukomet, a zatim i za nogomet.

# 3. Modeliranje utakmica

George Box je rekao čuvenu rečenicu: „Svi modeli su pogrešni, ali neki su korisni”. [1] Kako bismo mogli analizirati jako kompleksnu situaciju kao što je rukometna ili nogometna utakmica na jednostavan način, morat ćemo napraviti čitav niz nerealnih pretpostavki. No, unatoč tome, naš model će moći dobro produbiti naše shvaćanje problema koji razmatramo. Ovo je česta metoda u znanosti gdje se koriste brojne simplifikacije kako bi se mogao promotriti kompleksni fenomen.

## 3.1. Modeliranje utakmice za rukomet

Pretpostavljamo da u rukometnoj utakmici obje ekipe imaju po 50 napada. Vjerojatnost realizacije (tj. postizanja gola) u svakom napadu prve ekipe je 60%, a druge 40%.

Pretpostavljamo da se vjerojatnost realizacije napada jedne ekipe ne mijenja tijekom utakmice. Ta pretpostavka je nezgodna jer nepredviđene okolnosti, kao što su npr. radikalne promjene obrambenih taktika, ozljeda ili lošiji dan nekog od ključnih igrača, mogu znatno utjecati na efikasnost napadača. Nažalost, tu pretpostavku je nemoguće izbjeći.

Kolika je vjerojatnost da prva ekipa pobijedi? Kako bismo čitatelju olakšali rješavanje ovog problema, najprije ćemo riješiti četiri uvodna zadatka.

**Zadatak 1.** *Kolika je vjerojatnost da prva ekipa od 50 napada ima 35 uspješnih napada?*

Na svaki napad možemo gledati kao na jedan pokus.

Događaj $A =$ „napad prve ekipe je uspješan” se u jednom napadu (pokusu) pojavljuje s vjerojatnošću od $60\% = 0.6$ koja se ne mijenja tijekom ponavljanja pokusa, tj. u svakom napadu je vjerojatnost pogotka ista i iznosi 0.6.

Dakle, u svakom napadu moguća su 2 ishoda:

$$\text{napad je bio uspješan} - \text{s vjerojatnošću } p = P(A) = 0.6$$

ili

napad nije bio uspješan – s vjerojatnošću $q = P(A^c) = 1-p = 0.4$ jer su

$$A \text{ i } A^c \text{ međusobno suprotni događaji.}$$

Broj nastupa događaja $A$, tj. broj uspješnih napada prve ekipe, predstavlja diskretnu slučajnu varijablu $X$ koja ima binomnu razdiobu. Dakle, vrijedi

$$X \sim B(50, 0.6).$$

Stoga vjerojatnost da prva ekipa od 50 napada ima 35 uspješnih iznosi:

$$P(X=35)=\binom{50}{35}0.6^{35}0.4^{50-35}\approx 0.0415=4.15\%.$$

**Zadatak 2.** *Kolika je vjerojatnost da druga ekipa ima između* 20 *i* 22 *uspješna napada od njih* 50*?*

Broj uspješnih napada druge ekipe je diskretna slučajna varijabla $Y$ koja ima binomnu razdiobu:

$$Y\sim B(50,0.4).$$

Tražimo vjerojatnost $P((Y=20)\cup(Y=21)\cup(Y=22))$. Događaji $Y=20$, $Y=21$ i $Y=22$ se međusobno isključuju jer realizacija jednog od njih isključuje mogućnost pojave nekog drugog. Stoga je

$$\begin{aligned}&P((Y=20)\cup(Y=21)\cup(Y=22))\\&=P(Y=20)+P(Y=21)+P(Y=22)\\&=\binom{50}{20}0.4^{20}0.6^{50-20}+\binom{50}{21}0.4^{21}0.6^{50-21}\\&\quad+\binom{50}{22}0.4^{22}0.6^{50-22}\\&\approx 0.3195=31.95\%.\end{aligned}$$

**Zadatak 3.** *Kolika je vjerojatnost događaja da prva ekipa od 50 napada ima 30 uspješnih, a druga 20 uspješnih napada?*

Tu se traži vjerojatnost događaja $(X=30)\cap(Y=20)$.

Na 50 napada prve ekipe možemo gledati kao na prvi pokus, a na 50 napada druge ekipe kao na drugi pokus. Pretpostavljamo da su ti pokusi međusobno nezavisni, tj. da ishod jednog od njih ne utječe na ishod drugog i obratno.

Iz te pretpostavke slijedi da su i događaji $X=30$ i $Y=20$ međusobno nezavisni. Stoga je:

$$\begin{aligned}&P((X=30)\cap(Y=20))\\&=P(X=30)\cdot P(Y=20)\\&=\binom{50}{30}0.6^{30}0.4^{50-30}\cdot\binom{50}{20}0.4^{20}0.6^{50-20}\\&\approx 0.0131=1.31\%.\end{aligned}$$

**Zadatak 4.** *Kolika je vjerojatnost događaja*

$$((X=31)\cap(Y=20))\ \cup\ ((X=30)\cap(Y=20))?$$

Događaji $(X=31)\cap(Y=20)$ i $(X=30)\cap(Y=20)$ se međusobno isključuju pa je

$$\begin{aligned}
&P\big(((X=31)\cap(Y=20))\cup((X=30)\cap(Y=20))\big)\\
&=P(X=31)\cdot P(Y=20)+P(X=30)\cdot P(Y=20)\\
&=\binom{50}{31}0.6^{31}0.4^{50-31}\cdot\binom{50}{20}0.4^{20}0.6^{50-20}\\
&+\binom{50}{30}0.6^{30}0.4^{50-30}\cdot\binom{50}{20}0.4^{20}0.6^{50-20}\\
&\approx 0.0258=2.58\%.
\end{aligned}$$

Općenito, za sve $a,b,c,d\in\{0,1,\ldots,50\}$ vrijedi:

- događaji $X=a$ i $Y=b$ su nezavisni,
- događaji $(X=a)\cap(Y=b)$ i $(X=c)\cap(Y=d)$ se međusobno isključuju čim je $a\neq c$ ili $b\neq d$.

Sada nije teško naći rješenje našeg problema, odnosno izračunati vjerojatnost pobjede prve ekipe. Prva ekipa može pobijediti samo ako ima bar jedan uspješan napad više. Stoga vjerojatnost događaja $A=$ „prva ekipa pobjeđuje" računamo formulom

$$P_r(A)=\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=0}^{i-1}P(X=i)\cdot P(Y=j),$$

za $X\sim B(50,0.6)$ i $Y\sim B(50,0.4)$.

U prvoj sumi zbrajamo po uspješnim napadima prve ekipe (pa $i$ ne može biti 0 jer za $i=0$ prva ekipa ne bi pobijedila), a u drugoj po uspješnim napadima druge ekipe (pa najveći $j$ mora biti manji od $i$ jer za $j\geq i$ prva ekipa ne bi pobijedila).

Tako dobivamo

$$P_r(A)=\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{50}{i}0.6^{i}0.4^{50-i}\cdot\binom{50}{j}0.4^{j}0.6^{50-j}\approx 0.9729=97.29\%.$$

Vjerojatnost događaja $B=$ „druga ekipa pobjeđuje" je

$$P_r(B)=\sum_{j=1}^{50}\sum_{i=0}^{j-1}P(X=i)\cdot P(Y=j)\approx 0.0168=1.68\%.$$

a događaja $C=$ „utakmica završava bez pobjednika, tj. neriješeno"

$$P_r(C)=\sum_{i=0}^{50}P(X=i)\cdot P(Y=i)\approx 0.0103=1.03\%.$$

## 3.2. Modeliranje utakmice za nogomet

Pretpostavimo najprije da i u nogometnoj utakmici obje ekipe imaju po 50 napada. Vjerojatnost realizacije (tj. postizanja gola) u svakom napadu prve ekipe je 3%, a druge 2%.

Kolika je vjerojatnost da pobijedi prva ekipa?

U nogometu, za razliku od rukometa, nije potpuno jasno kada počinje, a kada završava jedan napad. Je li napad svaki posjed lopte jedne ekipe bez obzira gdje se lopta nalazi i neovisno o tome koliko vremena je ta ekipa zadržala loptu u svom posjedu?

Uzet ćemo da napad jedne od ekipa počinje kada ta ekipa prebaci loptu na onu polovicu igrališta na kojoj se nalazi gol protivničke ekipe ili kad osvoji loptu na istom dijelu terena.

Račun je isti kao kod rukometa.

Prema tome, vjerojatnost $P_n$ događaja $A =$ „prva ekipa pobjeđuje” je

$$P_n(A) = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=0}^{i-1} P(X = i) \cdot P(Y = j),$$

za $X \sim B(50, 0.03)$ i $Y \sim B(50, 0.02)$. Dobivamo

$$\begin{aligned} P_n(A) &= \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{50}{i} 0.03^i 0.97^{50-i} \cdot \binom{50}{j} 0.02^j 0.98^{50-j} \\ &\approx 0.4892 = 48.92\%. \end{aligned}$$

Vjerojatnost događaja $B =$ „druga ekipa pobjeđuje” je

$$P_n(B) = \sum_{j=1}^{50} \sum_{i=0}^{j-1} P(X = i) \cdot P(Y = j) \approx 0.2502 = 25.02\%,$$

a događaja $C =$ „utakmica završava bez pobjednika, tj. neriješeno”

$$P_n(C) = \sum_{i=0}^{50} P(X = i) \cdot P(Y = i) \approx 0.2606 = 26.06\%.$$

Uspoređivanjem dobivenih rješenja naših primjera za rukomet i nogomet, vidimo da je $P_n(A)$ puno manja od $P_r(A)$ te da je vjerojatnost da u nogometnoj utakmici ne pobijedi jača ekipa skoro 19 puta veća od vjerojatnosti da u rukometnoj utakmici ne pobijedi jača ekipa. U našem nogometnom primjeru, u kojem svaka ekipa ima baš po 50 napada, pobjeda statistički jače ekipe nije niti najvjerojatniji događaj jer je vjerojatnost događaja „utakmica će završiti neriješeno ili pobijedit će statistički slabija ekipa” veća od 50%.

Međutim, u nogometnoj utakmici je broj napada statistički jače ekipe najčešće veći od broja napada slabije ekipe. Ako npr. u cijeloj utakmici prva (jača) ekipa ima 60, a druga (slabija) 50 napada, onda je

$$\begin{aligned} P_n(A) &= \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{60}{i}0.03^i0.97^{60-i}\cdot\binom{50}{j}0.02^j0.98^{50-j} \\ &+ \sum_{i=51}^{60}\sum_{j=0}^{50}\binom{60}{i}0.03^i0.97^{60-i}\cdot\binom{50}{j}0.02^j0.98^{50-j} \\ &\approx 0.5634 = 56.34\%, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n(B) &= \sum_{j=1}^{50}\sum_{i=0}^{j-1}\binom{60}{i}0.03^i0.97^{60-i}\cdot\binom{50}{j}0.02^j0.98^{50-j} \\ &\approx 0.2056 = 20.56\% \end{aligned}$$

i

$$P_n(C) = \sum_{i=0}^{50}\binom{60}{i}0.03^i0.97^{60-i}\cdot\binom{50}{i}0.02^i0.98^{50-i} \approx 0.2310 = 23.1\%$$

pa vidimo da je u tom slučaju vjerojatnost pobjede jače ekipe veća od 50%, ali i dalje dosta manja nego u rukometu.

Tako smo, našim modelom, i numerički dokazali da je nogomet zaista nepredvidljiviji sport od rukometa.

## 4. Zaključak

U ovom radu pokazali smo kako se pomoću jednostavnog modela, primjenom binomne razdiobe, mogu procijeniti vjerojatnosti svih mogućih ishoda rukometne i nogometne utakmice ako znamo prosječan broj napada i prosječnu vjerojatnost realizacije svakog napada obje ekipe.

Iako je model dosta pojednostavljen i ne uzima u obzir sve okolnosti koje mogu utjecati na ishod (kao što su, primjerice, kvaliteta obrane, psihološki faktori, vremenski uvjeti i sl.), njegova snaga leži u interpretabilnosti i mogućnosti da se iz osnovnih podataka dobiju intuitivne i kvantitativne procjene. Na taj je način kvantitativno dokazana tvrdnja da je nogomet nepredvidljiviji sport od rukometa, što se često ističe u sportskim komentarima.

Model se lako prilagođava različitim ekipama, a primjenom Poissonove razdiobe moguće ga je dodatno proširiti kako bi bolje opisivao rijetke situacije s većim brojem postignutih pogodaka. Također, model bi mogao poslužiti kao temelj u izgradnji složenijih sustava predviđanja koji koriste stvarne podatke prikupljene tijekom utakmica.

Zaključno, ovaj rad pokazuje kako se alati teorije vjerojatnosti mogu uspješno primijeniti u analizi sportskih utakmica te time potiče daljnji razvoj matematičkih modela u sportu.

Literatura [2]–[7] može poslužiti zainteresiranom čitatelju kao vodič za dublje proučavanje pojmova teorije vjerojatnosti i slučajnih varijabli, kao i metoda korištenih u radu.

## Literatura


[1] G. E. P. Box, *Robustness in the strategy of scientific model building*, in: R. L. Launer, G. N. Wilkinson (ur.), *Robustness in Statistics*, Academic Press, New York, 1979, 201–236.

[2] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika, 1. Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, Wiley, 3. izdanje, 1968.

[4] C. M. Grinstead, J. L. Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 1997.

[5] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 11. izdanje, 2014.

[6] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[7] P. Vranjković, *Zbirka zadataka iz vjerojatnosti i statistike*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.



Goran Kovačević
Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet, Ruđera Boškovića 37, 21 000 Split
*E-mail:* `gkovacev@pfst.hr`

Damir Vukičević
Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split

*E-mail:* Damir.Vukicevic@pmfst.hr