ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.8 (2025) 135–151
https://doi.org/10.32817/amssd.8.7

Zaprimljen: 11. listopada 2025.
Prihvaćen: 30. studenog 2025.

Osnove time scale računa i primjene

Josipa Barić, Nelija Lučić Lavčević

Sažetak

Teoriju time scale računa uveo je S. Hilger u svojoj doktorskoj disertaciji 1988. godine kao ujedinjenje teorije diferencijskih jednadžbi s teorijom diferencijalnih jednadžbi, dajući tako formalizam za proučavanje hibridnih diskretnih i kontinuiranih dinamičkih sustava. U ovom radu definirani su osnovni alati time scale računa i opisani neki primjeri primjena time scale računa u nejednakostima i ekonomiji. Radi prepoznatljivosti prikazanih rezultata zadržali smo u radu engleski naziv ”time scale” te za neke pojmove, uz prijevod na hrvatski jezik, spomenuli i nazive na engleskom jeziku.

Ključni pojmovi: time scale, dinamički sustavi, Jensenova nejednakost

Abstract

The theory of time scale calculations was introduced by S. Hilger in his doctoral dissertation in 1988 as the unification of the theory of differential equations with the theory of differential equations, thus providing a formalism for studying hybrid discrete and continuous dynamic systems. Basic tools are defined in this paper time scale calculation and described some examples of time scale calculation applications in inequalities and economics. For the sake of recognition of the displayed results we kept the English name ”time scale” in the work, and for some terms, in addition to the translation into Croatian, we also mentioned the names in English.

Keywords: time scale, dynamical systems, Jensen's inequality

1. Osnove time scale računa

Osnove teorije time scale računa postavio je 1988. godine njemački matematičar S. Hilger u svojoj disertaciji *Ein Masskettenkalkü mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeite*, PhD thesis, Universit ät Würzburg. Nakon objavljivanja knjiga [8] i [7] sve se više znanstvenika uključuje u istraživanje ovog područja matematike.

Time scale $\mathbb{T}$ je neprazan zatvoren podskup skupa $\mathbb{R}$ (pretpostavljamo da $\mathbb{T}$ nasljeđuje topologiju iz $\mathbb{R}$). Primjeri time scale skupova su: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $[0,1]\cup[2,3]$, $[0,1]\cup\mathbb{N}$, Cantorov skup.

Primjeri skupova koji nisu time scale: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$.

Da bismo u jednom računu mogli objediniti diskretnu i kontinuiranu teoriju definirat ćemo sljedeće pojmove.

Definicija 1. *Neka je $t\in\mathbb{T}$. Tada definiramo:*

a) $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}\in\mathbb{T}$ *operator skoka unaprijed (forward jump operator),*

b) $\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}\in\mathbb{T}$ *operator skoka unatrag (backward jump operator),*

c) $\mu(t)=(\sigma(t)-t)\in[0,\infty)$ *funkcija prednje zrnatosti (forward graininess function),*

d) $\nu(t)=(t-\rho(t))\in[0,\infty)$ *funkcija stražnje zrnatosti (backward graininess function).*

Sukladno definiranim operatorima, sada možemo klasificirati točke time scale skupa na sljedeći način.

Definicija 2. *Kažemo da je točka $t\in\mathbb{T}$:*

1. *desno-raspršena (right-scattered) ako je:* $\sigma(t)>t$,
2. *lijevo-raspršena (left-scattered) ako je* $\rho(t)<t$,
3. *izolirana ako je i lijevo-raspršena i desno-raspršena,*
4. *desno-gusta (right-dense) ako je* $\sigma(t)=t$,
5. *lijevo-gusta (left-dense) ako je* $\rho(t)=t$,
6. *gusta ako je i lijevo-gusta i desno-gusta.*

Primjer 1. *Ako je $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, onda za svaki $t\in\mathbb{R}$ vrijedi:*
$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{R}:s>t\}=\inf(t,\infty)=t$,
$\rho(t)=t$,
$\mu(t)=0$.
Dakle, svaka točka $t\in\mathbb{R}$ je gusta.

Primjer 2. *Ako je* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$*, onda za svaki* $t \in \mathbb{Z}$ *vrijedi:*
$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\} = t+1,$
$\rho(t) = t - 1,$
$\mu(t) = 1.$
Dakle, svaka točka $t \in \mathbb{Z}$ *je izolirana.*

1.1. Diferencijabilnost u $\mathbb{T}$

Da bismo opisali pojam diferencijabilnosti u time scale računu uvedimo sljedeće oznake: neka je $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}\backslash\{M\}$ ako $\mathbb{T}$ ima lijevo-raspršeni maksimum M, inače neka je $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.

Definicija 3. *Za funkciju* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *kažemo da je delta diferencijabilna u* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *ako postoji* $f^\triangle(t) \in \mathbb{R}$ *takav da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji okolina* U *od* t *(tj.* $U = (t-\lambda, t+\lambda) \cap \mathbb{T}$ *za neki* $\lambda > 0$*) tako da je*

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\triangle(t)(\sigma(t) - s)| \le \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad s \in U.$$

Tada $f^\triangle(t)$ nazivamo delta derivacijom funkcije f u točki t.
Funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je *delta* diferencijabilna na $\mathbb{T}$ ako je f *delta* diferencijabilna za sve $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Neka je $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}\backslash\{m\}$ ako $\mathbb{T}$ ima desno-raspršeni minimum m, inače neka je $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$.

Definicija 4. *Za funkciju* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *kažemo da je nabla diferencijabilna u* $t \in \mathbb{T}_\kappa$ *ako postoji* $f^\nabla(t) \in \mathbb{R}$ *takav da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji okolina* U *od* t*, tako da je*

$$|(f(\rho(t)) - f(s)) - f^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \le \varepsilon|\rho(t) - s|, \quad s \in U.$$

Tada $f^\nabla(t)$ nazivamo nabla derivacijom funkcije f u točki t.
Funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je *nabla* diferencijabilna na $\mathbb{T}$ ako je f *nabla* diferencijabilna za sve $t \in \mathbb{T}_\kappa$.

Primjer 3. *Neka je* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *zadana sa* $f(t) = \alpha$*, gdje je* $\alpha \in \mathbb{R}$ *konstanta. Tada je* $f^\triangle(t) = 0$ *jer za svaki* $\epsilon > 0$ *vrijedi*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0\,(\sigma(t) - s)\,| = |\alpha - \alpha| = 0 \le \epsilon|\sigma(t) - s|, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Primjer 4. *Neka je* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *zadana sa* $f(t) = t$*. Tada je* $f^\triangle(t) = 1$ *jer za svaki* $\epsilon > 0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - 1(\sigma(t) - s)| &= |(\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| \\ &= 0 \le \epsilon|\sigma(t) - s|, \quad s \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Za derivaciju u time scale računu vrijedi:

- ako je f *delta* diferencijabilna u t onda je f neprekidna u t,
- ako je f neprekidna u t i t je desno-raspršena, ($\mu(t) > 0$), onda je f *delta* diferencijabilna u t i vrijedi
$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$
- ako je t desno-gusta, ($\mu(t) = 0$), onda je f *delta* diferencijabilna u t ako postoji $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ za $s \in \mathbb{T}$ i tada vrijedi
$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Primjer 5. *Ako je $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ onda je svaka točka $t \in \mathbb{R}$ gusta pa slijedi da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* delta *diferencijabilna u t ako i samo ako*

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

postoji i tada je $f^{\triangle}(t) = f'(t)$, pri čemu je $f'(t)$ uobičajena oznaka za derivaciju realne funkcije u točki t.

Primjer 6. *Ako je $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ onda je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$* delta *diferencijabilna u t i vrijedi*

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t),$$

gdje je Δ obični diferencijski *operator.*

Ideja računa u time scale skupovima je izbjegavati odvojenu diskusiju za slučajeve kada je $\mu(t) = 0$ i $\mu(t) > 0$.
U tu svrhu koristimo formule koje vrijede za oba slučaja:

- $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\triangle}(t)$,
- $(f + g)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t) + g^{\triangle}(t)$,
- $(\alpha f)^{\triangle}(t) = \alpha f^{\triangle}(t), \alpha \in \mathbb{R}$,

- $(fg)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\triangle}(t) = f(t)g^{\triangle}(t) + f^{\triangle}(t)g(\sigma(t))$,
- $$\left(\frac{f}{g}\right)^{\triangle}(t) = \frac{f^{\triangle}(t)g(t) - f(t)g^{\triangle}(t)}{g(t)g(\sigma(t))},$$

pri čemu su f i g diferencijabilne funkcije u $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ i $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$.

Primjer 7. *Odredimo delta derivaciju funkcije $f(t) = t^2$. Vrijedi*

$$(t^2)^{\triangle} = (tt)^{\triangle} = t^{\triangle}t + \sigma(t)t^{\triangle} = t + \sigma(t),$$

prema produktnom pravilu koje smo prethodno naveli.

Primjer 8. *Odredimo delta derivaciju funkcije $f(t) = \frac{1}{t}, t \neq 0$. Vrijedi*

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{\triangle} = \frac{1^{\triangle}t - 1t^{\triangle}}{t\sigma(t)} = \frac{0-1}{t\sigma(t)} = \frac{-1}{t\sigma(t)}.$$

1.2. Neprekidnost u $\mathbb{T}$

Definicija 5. *Za funkciju $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kažemo da je rd-neprekidna ako je neprekidna u svim desno-gustim točkama u $\mathbb{T}$ i njeni limesi slijeva su konačni u svim lijevo-gustim točkama u $\mathbb{T}$.*

Oznaka sa skup svih rd-neprekidnih funkcija je $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Definicija 6. *Za funkciju $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kažemo da je ld-neprekidna ako je neprekidna u svim lijevo-gustim točkama u $\mathbb{T}$ i njeni limesi sdesna su konačni u svim desno-gustim točkama u $\mathbb{T}$.*

Oznaka za skup svih ld-neprekidnih funkcija je $C_{ld}(\mathbb{T})$.

Za neprekidnu funkciju u time scale računu vrijedi:

- skup neprekidnih funkcija na skupu $\mathbb{T}$ sadrži i skup $C_{rd}(\mathbb{T})$ i skup $C_{ld}(\mathbb{T})$,
- operator σ (t) je rd-neprekidni operator,
- ako je funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ neprekidna, funkcija $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-neprekidna i $g(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$ onda je njihova kompozicija $f \circ g$ također rd-neprekidna.

1.3. Integriranje u $\mathbb{T}$

Analogno delta i nabla derivacijama, u nastavku ćemo posebno definirati delta i nabla antiderivacije, odnosno delta i nabla integrale. Inače, radi analogije rezultata delta i nabla derivacija i integrala, u znanstvenim se radovima rezultati prikazuju uglavnom samo za jedan od tih smjerova (ili delta ili nabla).

Definicija 7. *Funkcija $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je delta antiderivacija funkcije $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ako je $F^{\triangle}(t) = f(t)$ za sve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.* ***Delta integral*** *definiramo sa*

$$\int_a^t f(s)\Delta s = F(t) - F(a).$$

Definicija 8. *Funkcija $G : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je nabla antiderivacija funkcije $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ako je $G^{\nabla}(t) = f(t)$ za svaki $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$. Nabla integral definiramo sa*

$$\int_a^t f(s)\nabla s = G(t) - G(a).$$

Vrijedi: svaka rd - neprekidna funkcija ima delta antiderivaciju i svaka ld - neprekidna funkcija ima nabla antiderivaciju.

Primjer 9. *Neka je $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Odredimo neodređeni integral $\int a^t \triangle t$, gdje je $a \neq 1$ konstanta.*
Iz

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\triangle} = \triangle\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

slijedi da je

$$\int a^t \triangle t = \frac{a^t}{a-1} + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Osnovna svojstva delta integrala, koja najčešće koristimo u integralnom računu u time scale skupovima, opisana su u sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 9. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ i $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$. Tada vrijedi*

1. $\int_a^b (f(t) + g(t))\triangle t = \int_a^b f(t)\triangle t + \int_a^b g(t)\triangle t$;

2. $\int_a^b \alpha f(t)\triangle t = \alpha \int_a^b f(t)\triangle t$;

3. $\int_a^b f(t)\triangle t = -\int_b^a f(t)\triangle t$;

4. $\int_a^b f(t)\triangle t = \int_a^c f(t)\triangle t + \int_c^b f(t)\triangle t$;
5. $\int_a^a f(t)\triangle t = 0$;
6. *ako je* $f(t) \geq 0$ *za sve* $a \leq t < b$, *onda je* $\int_a^b f(t)\triangle t \geq 0$;
7. *ako je* $f^{\triangle} \geq 0$, *onda je* f *neopadajuća funkcija.*

Propozicija 10. *Neka su* $a, b \in \mathbb{T}$ *i* $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$. *Vrijedi:*

1. *ako je* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *onda je* $\int_a^b f(t)\triangle t = \int_a^b f(t)dt$,
2. *ako je* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *onda je:*

$$\int_a^b f(t)\triangle t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b, \\ 0, & a = b, \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b, \end{cases}$$

3. *ako su sve točke u* $[a, b] \cap \mathbb{T}$ *izolirane točke, onda je*

$$\int_a^b f(t)\triangle t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t), & a < b, \\ 0, & a = b, \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t), & a > b. \end{cases}$$

2. Diamond-α derivacija i integral

Ubrzo nakon konstruiranja osnovnih pojmova i alata u time scale računu znanstvenici dolaze na ideju objedinjavanja pojmova delta i nabla derivacija, donosno integrala, u pojam *diamond-α* derivacija (integrala) čime se omogućava dobivanje poopćenih rezultata koji, kao specijalne slučajeve, daju rezultate nad delta, odnosno nabla računom. Diamond-α derivacija i integral definirani su na sljedeći način.

Definicija 11. *Neka je* $0 \leq \alpha \leq 1$ *i* $\mathbb{T}_\kappa^\kappa = \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa$. *Ako je* f *diferencijabilna u* $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ *i u delta i u nabla smislu, onda je* f *diamond-α diferencijabilna u* t *i dinamička derivacija* $f^{\diamond\alpha}(t)$ *je dana sa*

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^{\triangle}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t).$$

Diamond-α derivacija postaje:

- standardna delta ($\triangle$) derivacija za $\alpha = 1$,
- standardna nabla (∇) derivacija za $\alpha = 0$.

Definicija 12. *Neka je $a, t \in \mathbb{T}, 0 \leq \alpha \leq 1$ i $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Tada je diamond-$\alpha$ integral funkcije h od a do t definiran sa*

$$\int_a^t h(\tau) \diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t h(\tau)\triangle\tau + (1-\alpha) \int_a^t h(\tau)\nabla\tau.$$

Vrijedi: diamond-α integral funkcije h postoji ako je h neprekidna funkcija.

Primjer 10. *Neka je $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. Diamond-$\alpha$ derivacija za funkciju na skupu $\mathbb{T}$, definirana je na skupu $\mathbb{T}^\kappa_\kappa = \{1, 2\}$. Promotrimo funkciju $f(t) = 0$. Funkcije F i G neka su definirane na sljedeći način:*

$$\begin{array}{ll} F(0) = 0, & G(0) = 1; \\ F(1) = 5, & G(1) = -3; \\ F(2) = 0, & G(2) = 1; \\ F(3) = 5, & G(3) = -3. \end{array}$$

Tada je

$$\begin{aligned} F^{\diamond\alpha}(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F(2) - F(1)}{2-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{F(1) - F(0)}{1-0} \\ &= \frac{1}{2}(0-5) + \frac{1}{2}(5-0) = 0 = f(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{\diamond\alpha}(2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F(3) - F(2)}{3-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{F(2) - F(1)}{2-1} \\ &= \frac{1}{2}(5-0) + \frac{1}{2}(0-5) = 0 = f(2). \end{aligned}$$

Za funkciju G slijedi:

$$\begin{aligned} G^{\diamond\alpha}(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{G(2) - G(1)}{2-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G(1) - G(0)}{1-0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1-(-3)) + \frac{1}{2} \cdot (-3-1) = 0 = f(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{\diamond\alpha}(2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{G(3)-G(2)}{3-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{G(2)-G(1)}{2-1} \\ &= \frac{1}{2}(-3-1)+\frac{1}{2}(1-(-3))=0=f(2), \end{aligned}$$

pa vrijedi

$$F^{\diamond\alpha(t)}=G^{\diamond\alpha}(t)=f(t).$$

Vidimo da su obje funkcije F i G diamond-α antiderivacije funkcije f na skupu $\mathbb{T}_\kappa^\kappa$. Vrijedi

$$F(2)-F(1)=-5\neq 4=G(2)-G(1).$$

Ovaj primjer može biti definiran za bilo koji α, $0<\alpha<1$, i za bilo koji diskretni time scale $\mathbb{T}$.

Više o diamond-α dinamičkoj derivaciji može se pročitati u [9]. Višestruki Riemannov integral i višestruki Lebesgov integral u time scale računu opisani su detaljno u radovima [5] i [6].

3. Primjene na nejednakosti

U ovom poglavlju ilustrirat ćemo primjenu time scale računa na neke od najpoznatijih nejednakosti nad konveksnim i superkvadratnim funkcijama kao što su Jensenova nejednakost, Jensen-Mercerova nejednakost i Hölderova nejednakost, a više rezultata o nejednakostima u time scale računu može se pronaći u [3]. Krenut ćemo od definicije konveksne funkcije.

Definicija 13. *Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Za funkciju $f: I\to\mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na I ako za $x,y\in I$ i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi*

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Ako u gornjoj nejednakosti za $x\neq y$ i $\lambda\in(0,1)$ vrijedi stroga nejednakost, onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna.
Ako u gornjoj nejednakosti vrijedi suprotna nejednakost, onda kažemo da je funkcija f konkavna.

Jednostavna geometrijska interpretacija konveksnosti (konkavnosti) bila bi da dio grafa između dviju točaka na grafu uvijek leži ispod (iznad) tetive koja spaja te dvije točke. Iz toga se lako vidi da su afine funkcije jedine funkcije koje su istodobno i konveksne i konkavne.

Teorija konveksnih funkcija razvija se ubrzano od pojave radova J. L. W. V. Jensena, a dominantnu ulogu u istraživanju konveksnih funkcija i općenito matematičkih nejednakosti ima Jensenova nejednakost.

Originalnu Jensenovu nejednakost za integrale navodimo u sljedećem teoremu.

Teorem 14. *Neka je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i pretpostavimo da je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Ako je $\Phi : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i $f : [a, b] \to I$ neprekidna funkcija onda vrijedi*

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b f(t)\ dt}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \Phi(f(t))\ dt}{b-a}.$$

Autori R. P. Agarwal, M. Bohner i A. Peterson su u radu [1] dokazali sljedeći oblik Jensenove nejednakosti za rd-neprekidnu funkciju f na time scale intervalu.

Teorem 15. *Neka je $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, $[a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T}$ i $I \subset \mathbb{R}$. Ako je $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to I$ rd-neprekidna i $\varphi : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, onda je*

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(t))\Delta t}{b-a}. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $x_0 \in I$. Tada postoji $\beta \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \beta(x - x_0) \quad x \in I. \tag{2}$$

Budući je f rd-neprekidna,

$$x_0 = \frac{\displaystyle\int_a^b f(\tau)\,\Delta\tau}{b-a}$$

je dobro definiran. $\varphi \circ f$ je također rd-neprekidna pa možemo primjeniti (2) uz $x = f(t)$. Integriranjem od a do b dobivamo

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \varphi(f(t))\Delta t-(b-a)\varphi\left(\frac{\int_a^b f(\tau)\Delta\tau}{b-a}\right) \\
= \quad & \int_a^b \varphi(f(t))\Delta t-(b-a)\varphi(x_0) \\
= \quad & \int_a^b \left(\varphi(f(t))-\varphi(x_0)\right)\Delta t \geq \beta\int_a^b \left(f(t)-x_0\right)\Delta t \\
= \quad & \beta\int_a^b [f(t)-x_0]\Delta t=\beta\left[\int_a^b f(t)\Delta t-x_0(b-a)\right]=0
\end{aligned}$$

čime je dokaz dovršen. □

Primjenimo li Jensenovu nejednakost u time scale računu na superkvadratne funkcije dobit ćemo profinjenje prethodne nejednakosti.

Superkvadratne funkcije predstavljaju poopćenje pojma konveksnih funkcija i definirane su na sljedeći način.

Definicija 16. *Funkcija $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ je superkvadratna ako postoji funkcija $C:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ takva da je*

$$\varphi(y)-\varphi(x)-\varphi(|y-x|)\geq C(x)(y-x) \quad za \quad x,y\geq 0.$$

Ako je φ superkvadratna i $\varphi\geq 0$ onda je φ konveksna i $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$.

Na primjer, funkcija $\varphi(x)=x^p$ je superkvadratna za $p\geq 2$.

U radu [4], autori J. Barić, R. Bibi, M. Bohner i J. Pečarić, primjenom alata time scale računa, dobivaju profinjenja Jensenove nejednakosti, konverzne Jensenove nejednakosti, Jensen-Mercerove i Hölderove nejednakosti promatranjem superkvadratne umjesto konveksne funkcije. Neke od tih rezultata navodimo u nastavku. Najprije pokažimo kako je dobivena Jensenova nejednakost za superkvadratne funkcije u time scale računu.

Teorem 17. *Neka je $a,b\in\mathbb{T}$. Pretpostavimo da je $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to[0,\infty)$ rd-neprekidna i $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ neprekidna i superkvadratna. Tada je*

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\left[\varphi\left(f(s)\right)-\varphi\left(\left|f(s)-\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right|\right)\right]\Delta s.$$

Dokaz. Neka je $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ superkvadratna funkcija i $x_0 \in [0,\infty)$. Prema Jensenovoj nejednakosti za superkvadratne funkcije postoji konstanta $C(x_0)$ takva da je

$$\varphi(y) \geq \varphi(x_0) + C(x_0)(y - x_0) + \varphi(|y - x_0|).$$

Uvrštavanjem $x_0 = \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}$ i $y = f(s)$ u gornju nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi(f(s)) \quad &\geq \quad \varphi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right) + C(x_0)\left(f(s) - \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right)\\ &+ \quad \varphi\left(\left|f(s) - \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right|\right).\end{aligned}$$

Integriranjem od a do b, slijedi

$$\begin{aligned} & \int_a^b \varphi(f(s))\Delta s - \int_a^b \varphi\left(\left|f(s) - \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right|\right)\Delta s \\ - \quad & \int_a^b \varphi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right)\Delta s \\ = \quad & \int_a^b \left[\varphi(f(s)) - \varphi\left(\left|f(s) - \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right|\right)\right]\Delta s \\ - \quad & (b-a)\varphi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right) \\ \geq \quad & C(x_0)\int_a^b \left[f(s) - \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right]\Delta s \\ = \quad & C(x_0)\left[\int_a^b f(s)\Delta s - (b-a)\cdot x_0\right] \\ = \quad & 0, \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Na sličan način, primjenom superkvadratnih funkcija i poznatih rezultata o nejednakostima u time scale računu, dobivamo sljedeće profinjenje Hölderove nejednakosti.

Teorem 18. *Neka su* $a, b \in \mathbb{T}$. *Za* $p \geq 2$ *definiramo* q *sa* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tada za rd-neprekidne funkcije $g, h : [a, b]_{\mathbb{T}} \to [0, \infty)$ *vrijedi*

$$\int_a^b (gh)(t)\Delta t \leq \left[\int_a^b g^p(t)\Delta t - \int_a^b \left|g(s) - h^{q-1}(s)\frac{\int_a^b (gh)(t)\Delta t}{\int_a^b h^q(t)\Delta t}\right|^p \Delta s\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot \left(\int_a^b h^q(t)\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Jensen-Mercerova nejednakost u time scale računu, koja profinjuje poznatu Jensen-Mercerovu nejednakost za konveksne funkcije, dobivena je u sljedećem teoremu.

Teorem 19. *Neka su* $a, b \in \mathbb{T}$. *Neka je* $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *neprekidna superkvadratna funkcija i* $0 \leq m < M < \infty$. *Ako je* $g : [a, b]_{\mathbb{T}} \to [m, M]$ *rd-neprekidna funkcija, onda je*

$$\varphi\left(m + M - \int_a^b g(t)\Delta t\right) \leq \varphi(m) + \varphi(M) - \int_a^b \varphi(g(t))\Delta t$$

$$- \frac{2}{M-m}\int_a^b \left[(g(t) - m)\varphi(M - g(t)) + (M - g(t))\varphi(g(t) - m)\right]\Delta t$$

$$- \int_a^b \left[\varphi\left(\left|g(t) - \int_a^b g(s)\Delta s\right|\right)\right]\Delta t.$$

Na sličan način dokazana je i sljedeća konverzna Jensenova nejednakost u time scale računu.

Teorem 20. *Pretpostavimo da je* $a, b \in \mathbb{T}$ *i* $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *superkvadratna funkcija. Tada za svaku* $f : [a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa} \to [m, M] \subseteq [0, \infty)$ *takvu da je* $f, \varphi \circ f \in C_{rd}(\mathbb{T})$, *vrijedi*

$$\int_a^b \varphi\left(f(t)\right)\Delta t + R \leq \frac{M - \int_a^b f(s)\Delta s}{M-m}\varphi(m) + \frac{\int_a^b f(s)\Delta s - m}{M-m}\varphi(M),$$

pri čemu je

$$R = \frac{1}{M-m}\int_a^b \left[(M - f(t))\varphi(f(t) - m) + (f(t) - m)\varphi(M - f(t))\right]\Delta t.$$

4. Primjena time scale računa u ekonomiji

Teorija time scale računa može se primjeniti na bilo koje područje u kojem se dinamički proces može opisati diskretnim i kontinuiranim modelima, npr. u

- elektrotehnici,
- biologiji,
- ekonomiji i financijama,
- fizici,
- kemiji,
- društvenim znanostima,
- medicinskim znanostima,
- matematičkom obrazovanju, itd.

Ovdje ćemo ukratko opisati dinamički optimizacijski problem iz ekonomije i za njega konstruirati time scale model. Detaljniji raspis rješenja tog modela može se pronaći u radu [2].

Budući su mnogi ekonomski modeli u stvari dinamički modeli, rezultati time scale računa su direktno primjenjivi na ekonomiju. Na primjer, u diskretnom modelu potrošač dobiva neka primanja kroz određeno vrijeme i odlučuje koji dio će potrošiti, a koji sačuvati kroz to vrijeme. Dakle, sve odluke donosi kroz jednako razdvojene vremenske intervale. Time scale pristup ovakvom problemu je mnogo fleksibilniji i realističiji. Na primjer, potrošač dobije neka primanja u određenom trenutku, o štednji odlučuje u neko drugo vrijeme, a potrošnja se također događa u bilo kojem trenutku. Štoviše, odluke o potrošnji i štednji mogu se modelirati tako da se događaju u proizvoljnoj vremenskoj frekvenciji.

Najčešće se dinamički optimizacijski modeli u ekonomiji postavljaju na sljedeći način: potrošač nastoji maksimizirati doživotnu korisnost uz određena ograničenja. Tijekom svakog perioda života potrošač mora donositi odluke o tome koliko će sačuvati, a koliko potrošiti.

Uvedimo sada terminologiju koja će nam omogućiti matematičku interpretaciju problema. *Korisnost* je funkcija koju potrošač želi maksimizirati. U najjednostavnijem slučaju ona ovisi samo o potrošnji jednog proizvoljnog produkta C. *Korisnost* $u(C)$, tj. zadovoljstvo nakon potrošnje, ima $u'(C) > 0$ i $u''(C) < 0$, što znači da bi potrošač uvijek htio potrošiti više ali svaka nova potrošnja kroz neko vrijeme stvara manje koristi (zadovoljstva) nego prethodna.

U nastavku ćemo koristiti sljedeću vrstu funkcija.

Definicija 21. *Kažemo da je funkcija* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ν *- regresivna ako je* $1 - \nu(t)p(t) \neq 0$*, za* $t \in \mathbb{T}_\kappa$*.*

Klasu svih ν - regresivnih funkcija na $\mathbb{T}_\kappa$ označavamo sa
$\mathcal{R}_\nu = \{p : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : p \quad \text{je} \quad \text{ld-neprekidna} \quad \text{i} \quad \nu - \text{regresivna}\}$.

Definicija 22. *Za* $p \in \mathcal{R}_\nu$ *definiramo nabla eksponencijalnu funkciju*

$$\hat{e}_p\,(t, s) = exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}\,(p(\tau))\,\nabla_\tau\right),$$

za $s, t \in \mathbb{T}$*, pri čemu je* $\hat{\xi}_\nu$ ν*- cilindrična transformacija zadana kao u [7, str.49.].*

U slučaju kada je $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ vrijedi $\hat{e}_\alpha\,(t, s) = e^{\alpha(t-s)}$, a kada je $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ vrijedi $\hat{e}_\alpha\,(t, s) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{t-s}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 1$.

4.1. Diskretni model

Ovaj problem je dinamički jer potrošač mora donositi odluke za cijeli niz C-ova, C_0, ..., C_T, pri čemu T može biti konačan broj ili beskonačan. Dakle, problem je pronaći putanju potrošnje koja maksimizira doživotnu korisnost U:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^s u(C_s),$$

gdje je C_s potrošnja u periodu s, u korisnost jednog perioda i U doživotna korisnost. Tu je također parametar $\delta \in (0, 1)$ kao popustni faktor - naime, radije trošimo danas nego sutra, tj. buduća trošenja cijenimo manje nego sadašnja pa umanjujemo 'budućnost' po stopi δ.

Dakle, problem se može izraziti kao maksimiziranje funkcije

$$maxU = \sum_{s=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^s u(C_s)$$

uz uvjet $A_{s+1} = (1 + r)A_s + Y_s - C_s$, za sve $s \in [0, T)$ i $A_T \left(\frac{1}{1+r}\right)^T \geq 0$ (detalje o korištenim oznakama čitatelj može pronaći u [2]). Drugim riječima, trebamo maksimizirati svoju životnu korisnost, ali smo ograničeni činjenicom da vrijednost naše potrošnje treba biti jednaka vrijednosti naših prihoda plus dodatci koje možda imamo. Uz to, imamo i dodatni uvjet $A_T \left(\frac{1}{1+r}\right)^T \geq 0$ kojeg možemo interpretirati na sljedeći način: „nije nam dozvoljeno neograničeno zaduživanje“.

4.2. Kontinuirani model

Razmišljajući kao i u prethodnom slučaju, promatramo problem maksimiziranja doživotne korisnosti, koja je zbroj trenutnih koristi:

$$U = \int_0^T u(C_s)e^{-\delta s}\, ds$$

obzirom na niz $\{C_s\}_{s=0}^T$ i uvjet

$$A'_s = A_s r + Y_s - C_s.$$

4.3. Time scale model

Maksimiziramo

$$U = \int_0^{\sigma(T)} u\left(C(\rho(s))\right)\hat{e}_{-\delta}\left(\rho(s),0\right)\ \nabla s$$

uz uvjet

$$A^{\nabla}(s) = rA\left(\rho(s)\right) + Y\left(\rho(s)\right) - C\left(\rho(s)\right), \qquad s \in [\sigma(0), T].$$

Primjetimo da ovaj model u sebi sadrži oba prethodna modela kao posebne slučajeve, za $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ i $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, redom.

Kada se ovaj problem riješi primjenom alata time scale računa, pokazuje se da stope rasta potrošnje mogu varirati ako se potrošnja ne događa kroz fiksne intervale. Na taj način, time scale model daje informacije i za probleme s nejednako raspoređenim intervalima, za koje standarni diskretni i kontinuirani modeli ne osiguravaju informacije.

Literatura

[1] R. P. Agarwal, M. Bohner, A. Peterson, *Inequalities on time scale: a survey*, Mathematical Inequalities and Applications 4, 2001., 535-557.

[2] F. M. Atici, D. C. Biles, A. Lebedinsky, *An application of time scale to economics*, Mathematical and Computer Modelling 43, 2006., 718-726.

[3] J. Barić, R. Bibi, M. Bohner, A. Nosheen, J. Pečarić, *Jensen Inequalities on Time Scales*, Element, Zagreb, 2015.

[4] J. Barić, R. Bibi, M. Bohner, J. Pečarić, *Time Scales Integral Inequalities for Superquadratic Functions*, Journal of the Korean Mathematical Society, 50 2013., 465-477.

[5] M. Bohner, G. Sh. Guseinov, *Multiple integration on time scales*, Dynamic Systems and Applications 14, 2005., 579-606.

[6] M. Bohner, G. Sh. Guseinov, *Multiple Lebesgue integration on time scales*, Advances in Difference Equations, Art. ID 26391, 2006.

[7] M. Bohner, A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser Boston, 2003.

[8] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic equations on Time Scales*, Boston, Basel, Berlin

[9] J. W. Rogers Jr, Q. Sheng, *Notes on the Diamond-α dynamic derivative on times scale*, Journal of Mathematical Analysis and Application, 32, 2007., 228-241.

Josipa Barić
University of Split, Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Croatia
E-mail: `jbaric@fesb.hr`

Nelija Lučić Lavčević
University of Split, Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Croatia
E-mail: `nlucic00@fesb.hr`