

Metodički prikaz rješavanja nekih nestandardnih matematičkih zadataka

Branka Gotovac, Josipa Gotovac

Sažetak

Ovim se radom želi ukazati na važnost i dobrobiti korištenja nestandardnih zadataka u procesu razvijanja matematičkih kompetencija učenika i potaknuti nastavnike¹ na implementaciju nestandardnih zadataka u nastavu matematike počevši od nižih razreda osnovne škole.

U radu je dano šest takvih zadataka. Zadaci su matematičke zagonetke: *Zacrni polja*, *Suko*, *Više manje* iz dnevnih novina. Za svaku vrstu zagonetki, mogući pristup rješavanju ilustriran je na dva zadatka. Prikaz rješenja zadataka je detaljan, a danim usmjeravajućim pitanjima simulira se rješavanje zadataka u učionici.

Ključni pojmovi: matematička kompetencija, nestandardni matematički zadaci, nastava matematike

Abstract

This paper aims to highlight the importance and benefits of using non-standard tasks in the process of developing students' mathematical competencies and to encourage teachers² to implement non-standard tasks in mathematics teaching, starting from the lower grades of primary school.

¹pojmovi učenik i nastavnik u širem smislu riječi, neovisno o nivou obrazovanja

²terms student and teacher in the broadest sense of the word, regardless of the level of education

The paper provides six such tasks. The tasks are mathematical puzzles: *Zacrni polja*, *Suko*, *Više manje* from daily newspapers. For each type of puzzle, a possible approach to solving is illustrated in two tasks. The presentation of the solution to the tasks is detailed, and the given guiding questions simulate solving the tasks in the classroom.

Keywords: mathematical competence, non-standard mathematical tasks, mathematics teaching

1. Uvod

U procesu razvijanja matematičkih kompetencija učenika nestandardni matematički zadaci imaju značajnu ulogu. Nestandardni zadaci su oni kod kojih je nepoznata barem jedna od sastavnica zadatka: postavljeni uvjeti, cilj zadatka, neophodna teorijska osnova tj. teorijske činjenice usko povezane s uvjetima i ciljem, i način rješavanja (Kurnik, 2000.). Istovremeno isti zadatak, za učenika kojemu je način rješavanja nepoznat, bit će nestandardan, dok će drugom učeniku biti standardan (Khalmuratovna, 2020.). Nivo znanja, prethodno iskustvo i poznavanje strategija rješavanja problema neki su od faktora koji određuju je li učeniku zadatak standardni ili nestandardni (Škultéty i Pastor, 2020.).

Rješavanje nestandardnih zadataka zahtjeva veći umni napor i koncentraciju, dublju analizu, ustrajnost i dosjetljivost, te doprinosi razvoju logičkog mišljenja i kreativnih sposobnosti (Kurnik, 2000.). Također, ovakvi zadaci razvijaju motivaciju, metakogniciju i znanje (Škultéty i Pastor, 2020.), i kako naglašava Madaminova (2023.) mogu biti izvrstan alat za pobuđivanje i zadržavanje motivacije i interesa za matematiku kao obveznog nastavnog predmeta.

O nestandardnim zadacima ne treba misliti kao o iznimno teškim, gotovo nerješivim zadacima. Georg Polya, veliki matematičar i pedagog 20. stoljeća, čije se ideje u poučavanju matematike i danas ostvaruju, u svojoj knjizi (Polya, 1945.) ističe vrijednost otkrića i procesa rješavanja nekog problema, ma kako velik bio. *Veliko otkriće rješava veliki problem, ali u rješenju svakog problema postoji zrnce otkrića. Vaš problem može biti skroman; ali ako izaziva vašu znatiželju i potiče vaše stvaralačke sposobnosti, te ako ga riješite vlastitim snagama, možete doživjeti uzbuđenje i uživati u trijumfu otkrića. Takva iskustva u osjetljivoj dobi mogu stvoriti sklonost mentalnom radu i ostaviti trag u umu i karakteru za cijeli život. Stoga učitelj matematike ima veliku priliku. Ako svoje predviđeno vrijeme ispuni drilom učenika u rutinskim operacijama, ubija njihovu zainteresiranost, sputava njihov intelektualni razvoj i propušta svoju priliku.*

Ali ako potakne znatiželju svojih učenika dajući im probleme razmjerne njihovom znanju i pomažući im da riješe svoje probleme poticajnim pitanjima, može im dati priliku, i neke načine, za samostalno razmišljanje.

I najmanji problem može biti prilika za rast i prerasti u dragocjeno iskustvo. Stoga je bitno pred učenike stavljati i zadatke koji će im to omogućiti. Nestandardni zadaci imaju takav potencijal. Dobrobiti rješavanja nestandardnih zadataka su višestruke mada plodovi korištenja takvih zadataka u nastavi matematike ne moraju biti vidljivi odmah.

Cilj rada je ukazati na važnost korištenja nestandardnih zadataka u nastavi matematike, ponuditi nekoliko takvih zadataka i mogući pristup u njihovom rješavanju kao doprinos razvoju matematičkih kompetencija učenika, te potaknuti i ohrabriti nastavnike³ na implementaciju nestandardnih zadataka u nastavu matematike. Posljedično, može se očekivati, da će učenici i sami rado posezati za sličnim zadacima i rješavati ih. S uvođenjem takvih zadataka u nastavni proces treba započeti što ranije, već od nižih razreda osnovne škole.

Zadaci dani u radu matematičke su zagonetke preuzete iz dnevnih novina kroz koje učenici mogu spoznati ili iznova potvrditi primjenjivost matematike izvan učionice i povezanost matematike sa svakodnevnim životom. Radom su obuhvaćene tri vrste zagonetki: *Zacrni polja*, *Suko*, *Više manje*, i za svaku su dana po dva zadatka. Autorice su za svaku skupinu zadataka ponudile odgovarajući pristup njihovu rješavanju. Realno je pretpostaviti da će nastavnici i učenici imati i druge ideje pristupa rješavanju zadataka (npr. za rješavanje *Suko*-a koristeći Gaussovu metodu eliminacije na proširenoj matrici sustava, odnosno Cramerovo pravilo⁴). Zadaci su detaljno riješeni, u pravilu popraćeni usmjeravajućim pitanjima (simulira se rješavanje zadataka u učionici) koja će za neke učenike biti od iznimne pomoći tijekom rješavanja zadatka.

Vjerujemo da se većina učenika, osobito mlađi, nije susrela s ovakvim zadacima i da će otkrivanje načina rješavanja zadataka za mnoge od njih biti izazovno.

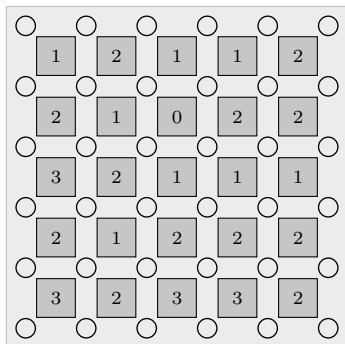
³u širem kontekstu (uključujući i učitelje u osnovnoj školi)

⁴za rješavanje Cramerovog sustava (sustav od n jednadžbi s n nepoznanica kod kojega je matrica sustava invertibilna)

2. Zacrni polja

2.1. Zadaci⁵

Zadatak ZP1: Zacrnite krugove tako da njihov broj oko svakog pojedinog polja odgovara broju u tom polju.



Tablica ZP1.1.

Popunite prazna mjesta:

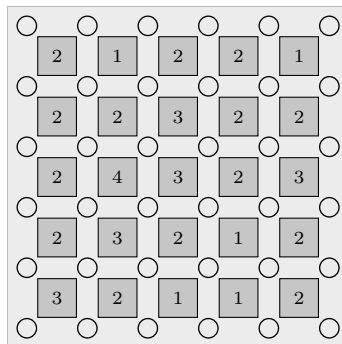
$a_{11} = -, a_{12} = -, a_{13} = -, a_{14} = -, a_{15} = -,$
 $a_{21} = -, a_{22} = -, a_{23} = -, a_{24} = -, a_{25} = -,$
 $a_{31} = -, a_{32} = -, a_{33} = -, a_{34} = -, a_{35} = -,$
 $a_{41} = -, a_{42} = -, a_{43} = -, a_{44} = -, a_{45} = -,$
 $a_{51} = 3, a_{52} = -, a_{53} = -, a_{54} = -, a_{55} = -.$

Pomoćna tablica:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Tablica ZP1.2.

Zadatak ZP2: Zacrnite krugove tako da njihov broj oko svakog pojedinog polja odgovara broju u tom polju.



Tablica ZP2.1.

Popunite prazna mjesta:

$a_{11} = -, a_{12} = -, a_{13} = -, a_{14} = -, a_{15} = -,$
 $a_{21} = -, a_{22} = -, a_{23} = -, a_{24} = -, a_{25} = -,$
 $a_{31} = -, a_{32} = -, a_{33} = -, a_{34} = -, a_{35} = -,$
 $a_{41} = -, a_{42} = -, a_{43} = -, a_{44} = -, a_{45} = -,$
 $a_{51} = 3, a_{52} = -, a_{53} = -, a_{54} = -, a_{55} = -.$

Pomoćna tablica:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Tablica ZP2.2.

⁵Prvi i drugi zadatak *Zacrni polja* (kraće ZP1, odnosno ZP2) matematičke su zagonetke redom *Zacrni polja* (26. siječnja 2025.) i *Zacrni polja* (23. ožujka 2025.) proširene tablicama.

2.2. Rješenja

Ključ rješenja zadatka ZP1 i ZP2 je određivanje početnog polja, te razmatranje utjecaja definiranih polja (za koja znamo boju svakog pojedinog kruga oko njega) na okolna polja. Prvi zadatak ZP1 je detaljno riješen i popraćen usmjeravajućim pitanjima, a za drugi zadatak ZP2 dano je konačno rješenje zadatka i konačna pomoćna tablica.

Rješenje zadatka ZP1

Sliku danu u zadatku ZP1 promatrajmo kao **tablicu** s 5 redaka i 5 stupaca, i 25 brojeva (tablica ZP1.1.).

- Koji su to brojevi?

Tablica sadrži brojeve 0, 1, 2 i 3.

Provjerite da je npr. u 5. retku i 1. stupcu broj 3. To možemo zapisati ovako: $a_{51} = 3$. Koristeći taj zapis, popunite prazna mjesta ispod tablice ZP1.1. odgovarajućim brojem.

- Odakle bismo mogli **početi**? Koliko je krugova oko svakog polja? Ako je u polju broj 1 (ili 2 ili 3) znamo li koje ćemo krugove oko tog polja zacrniti? Dakle, odakle ćemo početi?

Počet ćemo od polja koje sadrži broj 0⁶.

Radi boljeg snalaženja korisno je u tablici ZP1.1. krugove koji ostaju bijeli nekako označiti, npr. **znakom viđeno**. Tako ćemo ih razlikovati od krugova oko polja koja još nismo „obradili“. Znači, u prvoj tablici ćemo krugove oko polja u kojem je broj 0 označiti znakom viđeno (tablica ZP1.1.).

Kako bi se lakše orijentirali dana je i **pomoćna tablica** (tablica ZP1.2.). Ona će nam omogućiti bolji uvid u ono što smo već napravili, koja polja smo „obradili“, i usmjeriti nas dalje, odnosno na polja koja ćemo sljedeća promatrati. U pomoćnu tablicu upisivat ćemo faze (korake) rada i prečrtavati ono što smo obavili. Pokažimo kako.

U početnom, prvom koraku, iznad a_{23} ($a_{23} = 0$) napisat ćemo broj 1, a a_{23} ćemo precrtati budući su krugovi oko tog polja već određeni; svi su bijeli i označeni znakom viđeno (tab. ZP1.2.).

Zadržimo se još malo na toj tablici i promotrimo **okolna polja**, polja u

⁶Uputno je pitati učenike bi li polje u ovakvoj tablici moglo sadržavati neki drugi broj (i zašto) od kojeg bismo mogli početi, odnosno od polja koje ga sadrži. U pitanju je broj 4 (vidjeti zadatak ZP2).

neposrednom okruženju polja a_{23} .

- Koliko je takvih polja?

Ima ih četiri: gornje polje, donje, lijevo i desno.

- Koje je od njih određeno (određeni su krugovi oko polja, znamo kakve su boje)?

Tablica ZP1.1.1.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}^1	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Tablica ZP1.2.1.

Pogledamo li tablicu (tab. ZP1.1.) vidimo da je u pitanju desno polje, odnosno ono koje sadrži $a_{24} = 2$. Naime, znamo da preostala dva kruga moraju biti crna. Zacrtnimo te krugove (tab. ZP1.2.), a u pomoćnoj tablici iznad a_{24} napišimo broj 2 i precrtajmo a_{24} (tab. ZP1.2.).

Kao i u prethodnom koraku, zadržat ćemo se na toj tablici i promotriti „neobrađena“ polja u neposrednom okruženju polja a_{24} .

Tablica ZP1.1.2.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}^1	a_{24}^2	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Tablica ZP1.2.2.

- Koliko je takvih polja?

Tri: gornje polje, donje i desno.

- Koje je od njih određeno?

Pogledamo li tablicu (tab. ZP1.2.) vidimo da su sva tri određena. To su polja koja sadrže $a_{14} = 1$, $a_{34} = 1$ i $a_{25} = 2$. Budući svi preostali krugovi oko tih polja ostaju bijeli označimo ih znakom viđeno (tab. ZP1.1.3.). U pomoćnoj tablici iznad a_{14} , a_{34} i a_{25} napišimo broj 3 i precrtajmo a_{14} , a_{34} i a_{25} (tab. ZP1.2.3.).

Dalje bismo promatrali polja u neposrednom okruženju polja a_{14} , a_{34} i a_{25} , ispitivali koja su određena i prema tome razvijali obje tablice.

Tablica ZP1.1.3.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}^3	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}^1	a_{24}^2	a_{25}^3
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}^3	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Tablica ZP1.2.3.

Nastavljajući opisani postupak najzad dolazimo do konačnog rješenja zadatka (tab. ZP1.14.). Tablica ZP1.24. je konačna pomoćna tablica.

Tablica ZP1.14.

$-a_{11}^{10}$	$-a_{21}^9$	$-a_{31}^4$	$-a_{41}^3$	$-a_{51}^4$
$-a_{12}^9$	$-a_{22}^8$	$-a_{32}^1$	$-a_{42}^2$	$-a_{52}^3$
$-a_{13}^8$	$-a_{23}^7$	$-a_{33}^4$	$-a_{43}^3$	$-a_{53}^4$
$-a_{14}^7$	$-a_{24}^6$	$-a_{34}^5$	$-a_{44}^4$	$-a_{54}^5$
$-a_{15}^8$	$-a_{25}^7$	$-a_{35}^6$	$-a_{45}^7$	$-a_{55}^6$

Tablica ZP1.24.

Rješenje zadatka ZP2

Primjenjujući postupak koji je opisan u prethodnom zadatku dolazimo do konačnog rješenja zadatka ZP2 (tab. ZP2.1k.). Tablica ZP2.2k. je konačna pomoćna tablica.

Tablica ZP2.1k.

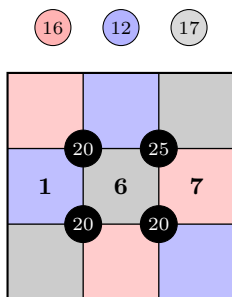
a_{11}^{10}	a_{12}^9	a_{13}^8	a_{14}^7	a_{15}^6
a_{21}^3	a_{22}^2	a_{23}^3	a_{24}^4	a_{25}^5
a_{31}^2	a_{32}^1	a_{33}^4	a_{34}^5	a_{35}^6
a_{41}^9	a_{42}^8	a_{43}^7	a_{44}^6	a_{45}^7
a_{51}^{10}	a_{52}^9	a_{53}^8	a_{54}^9	a_{55}^8

Tablica ZP2.2k.

3. Suko

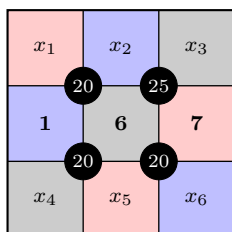
3.1. Zadaci⁷

Zadatak S1: U crnim kružićima dani su zbrojevi brojeva u okolnim kvadratima, dok su u obojenim kružićima dani zbrojevi brojeva u jednako obojenim kvadratima! U prazna polja upišite preostale⁸ brojeve od 1 do 9 tako da zbrojevi budu točni!



Tablica S1.1.

Pomoćna tablica:

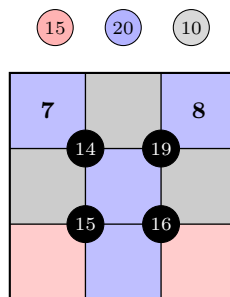


Tablica S1.2.

(1)	$x_1 + x_2 =$	
(2)	$x_2 + x_3 =$	
(3)	$x_4 + x_5 =$	
(4)	$x_5 + x_6 =$	
(5)	$x_1 + x_5 =$	
(6)	$x_2 + x_6 =$	
(7)	$x_3 + x_4 =$	

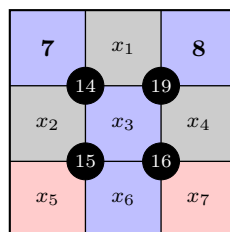
Tablica S1.3.

Zadatak S2: U crnim kružićima dani su zbrojevi brojeva u okolnim kvadratima, dok su u obojenim kružićima dani zbrojevi brojeva u jednako obojenim kvadratima! U prazna polja upišite preostale brojeve od 1 do 9 tako da zbrojevi budu točni!



Tablica S2.1.

Pomoćna tablica:



Tablica S2.2.

(1)	$x_1 + x_2 + x_3 =$	
(2)	$x_1 + x_3 + x_4 =$	
(3)	$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 =$	
(4)	$x_3 + x_4 + x_6 + x_7 =$	
(5)	$x_5 + x_7 =$	
(6)	$x_3 + x_6 =$	
(7)	$x_1 + x_2 + x_4 =$	

Tablica S2.3.

3.2. Rješenja

Zadaci S1 i S2 su detaljno riješeni i popraćeni usmjeravajućim pitanjima. U svakom koraku se razmatra utjecaj najjednostavnije jednačbe (ima najmanje nepoznanica, i čiji se zbroj može realizirati samo na jedan način) na preostale jednačbe sustava sve dok ne odredimo barem jednu nepoznanicu. U sljedećim koracima, po istom principu, razmatra se njihov utjecaj.

Rješenje zadatka S1

Obilježimo nepoznate brojeve u praznim poljima redom s x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i x_6 (tab. S1_2.). Daljnji koraci u rješavanju zadatka, opisani niže, označeni su brojevima od I do VI, i istaknuti su u stupcima u tablici S1_3₁.

I

- Koliko je $x_1 + x_2$?

Iz uvjeta $x_1 + x_2 + 1 + 6 = 20$ slijedi da je $x_1 + x_2 = 13$.

- Koji su ostali uvjeti? Ispišite ih. Što oni određuju?

Iz 7 uvjeta koji su u zadatku dani proizlazi 7 jednačbi. Sada lako možemo popuniti drugi stupac u tablici S1_3. i u svakom retku stupca odrediti zbroj. Dobit ćemo sustav od 7 jednačbi s gore navedenim nepoznicama (tab. S1_3₁., stupac I).

II

- Koje vrijednosti (međusobno različite) mogu poprimiti nepoznanice x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i x_6 ?

Navedene nepoznanice mogu poprimiti vrijednosti 2, 3, 4, 5, 8 i 9.

- Na koliko načina, koristeći te brojeve, možete dobiti npr. broj 12 kao zbroj dvaju brojeva? (12 je redom drugi zbroj u tablici S1_3.)

⁷Prvi i drugi zadatak *Suko* (kraće S1, odnosno S2) matematičke su zagonetke redom *Suko* (2025.) i *Suko* (2024.) proširene tablicama. Tekst je preciznije formuliran, pa se umjesto originalnog teksta npr. „zbrojevi okolnih kvadrata“ navodi: „zbrojevi brojeva u okolnim kvadratima“.

⁸Napomena: Riječ „preostale“ nije sadržana u originalnom tekstu.

Koristeći te brojeve, broj 12 možemo dobiti na dva načina: kao zbroj brojeva 9 i 3, te kao zbroj brojeva 8 i 4. Objе mogućnosti unesite u odgovarajući redak (drugi) sljedećeg stupca tablice.⁹ Na isti način popunite preostale retke u tom stupcu (tab. S1.3₁., stupac II).

III

- Koji bi mogao biti sljedeći korak? Odakle početi?¹⁰

Zbroj u jednadžbi (5), za razliku od ostalih, može se realizirati samo na jedan način, kao zbroj brojeva 4 i 5. Jedna nepoznanica (x_1 ili x_5) mora biti 4, a druga 5.

- Što nam to kazuje? Kako to utječe na ostale jednadžbe?

U prvoj jednadžbi se pojavljuje x_1 , a budući može biti 4 ili 5, obje mogućnosti mogu opstati. U drugoj jednadžbi se ne pojavljuju ni x_1 , ni x_5 , pa mogućnost 8, 4 otpada jer niti jedna od nepoznanica u jednadžbi (2) ne može imati vrijednost 4. Preglednosti radi, promjene nastale u ovom koraku možemo istaknuti u novom stupcu tablice (tab. S1.3₁., stupac III).¹¹ Razmatranjem ostalih jednadžbi u odnosu na jednadžbu (5) može se ustanoviti da utjecaja nema (sve mogućnosti opstaju). Na temelju prethodno pokazanog razmotrite i verbalizirajte!

IV

- Što bi mogli napraviti sljedeće?

Zbroj u jednadžbi (2) može se realizirati samo na jedan način, kao zbroj brojeva 9 i 3, pa ćemo, kao i prethodno, ispitati kako to utječe na ostale jednadžbe. Promatrajmo najprije jednadžbe (2) i (1).

- Koja se nepoznanica pojavljuje i u jednadžbi (2) i (1)? Što možete zaključiti?

Nepoznanica x_2 pojavljuje se u obje jednadžbe, i mora biti 9 ili 3, pa mogućnost 8, 5 moramo odbaciti. Štoviše, jasno je i da je $x_2 = 9$.¹² (tab. S1.3₁., stupac IV) Promatrajmo sada jednadžbe (2) i (3).

⁹Prvu mogućnost, primjerice, zapisat ćemo u odgovarajućem retku tablice (tab. S1.3₁., stupac II), jednostavnosti radi, kao 9, 3. Pri tom podrazumijevamo da su nepoznanice x_2, x_3 iz skupa $\{9, 3\}$ i $x_2 \neq x_3$.

¹⁰Za razliku od prethodna dva, na ovom bi koraku učenici mogli dulje zastati pitajući se odakle krenuti.

¹¹Kako bi dobili prostora za dodatne stupce, učenici mogu tablicu precrtati u bilježnicu.

¹²Odavde, znajući da je $x_2 = 9$, direktnim uvrštavanjem mogu se odrediti sve ostale nepoznanice; $x_1 = 4$ iz jednadžbe (1), $x_3 = 3$ iz jednadžbe (2) i $x_6 = 2$ iz jednadžbe (6), pa npr. $x_4 = 8$ iz jednadžbe (7), te $x_5 = 5$ iz neke od jednadžbi (3), (4) ili (5).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica x_2 ili x_3 , iz jednadžbe (2), u jednadžbi (3)? Što odatle zaključujemo?

U jednadžbi (3) ne pojavljuje se ni x_2 , ni x_3 , pa mogućnost koja sadrži broj 9 treba odbaciti (tab. S1.3_{1.}, stupac IV). Promatramo dalje jednadžbe (2) i (4).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica x_2 ili x_3 , iz jednadžbe (2), u jednadžbi (4)? Što odatle zaključujemo?

U jednadžbi (4) ne pojavljuje se ni x_2 , ni x_3 , pa mogućnost koja sadrži broj 3 treba odbaciti (tab. S1.3_{1.}, stupac IV). Promatramo još jednadžbe (2) i (6).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica x_2 ili x_3 , iz jednadžbe (2), u jednadžbi (6)?

Nepoznanica x_2 pojavljuje se u obje jednadžbe, i mora biti 9 ili 3, pa opstaju obje mogućnosti jer svaka od njih sadrži ili 9 ili 3. Potvrdite da obje mogućnosti u jednadžbi (7) za sada opstaju. (tab. S1.3_{1.}, stupac IV)

V i VI

- Koji mogu biti sljedeći koraci?

Direktnim uvrštavanjem $x_2 = 9$ u jednadžbu (1) dobivamo da je $x_1 = 4$. Uvrštavanjem $x_2 = 9$ u jednadžbu (2) i (6) dobivamo redom $x_3 = 3$ i $x_6 = 2$.

- Pojavljuje li se x_2 u jednadžbi (7)? Što odatle zaključujemo?

U jednadžbi (7) ne pojavljuje se x_2 , pa mogućnost koja sadrži 9 treba odbaciti. (tab. S1.3_{1.}, stupac V)

- Koje još nepoznanice treba odrediti?

U prethodnom smo koraku odredili i $x_1 = 4$, $x_3 = 3$, te $x_6 = 2$. Preostaje odrediti x_4 i x_5 . Direktnim uvrštavanjem $x_6 = 2$ u jednadžbu (4) dobivamo da je $x_5 = 5$, a uvrštavanjem $x_3 = 3$ u jednadžbu (7) da je $x_4 = 8$ (tab. S1.3_{1.}, stupac VI)¹³.

Tako smo odredili sve nepoznanice. Naposljetku, provjerimo zadovoljavaju li dobivena rješenja svaku od jednadžbi. Konačno rješenje istaknuto je i u polaznoj formi tablice (tab. S1.4).

¹³Uvrštavanjem $x_1 = 4$ u jednadžbu (5) također dobivamo da je $x_5 = 5$. Preglednosti radi, u tablici ćemo $x_5 = 5$ evidentirati samo na prvom mjestu pojavljivanja.

	I	II	III	IV	V	VI
(1)	$x_1 + x_2 = 13$	9,4 8,5		$x_2 = 9$	$x_1 = 4$	
(2)	$x_2 + x_3 = 12$	9,3 8,4	9,3		$x_3 = 3$	
(3)	$x_4 + x_5 = 13$	9,4 8,5		8,5		
(4)	$x_5 + x_6 = 7$	2,5 3,4		2,5		$x_5 = 5$
(5)	$x_1 + x_5 = 9$	4,5				
(6)	$x_2 + x_6 = 11$	9,2 8,3			$x_6 = 2$	
(7)	$x_3 + x_4 = 11$	9,2 8,3			8,3	$x_4 = 8$

Tablica S1.3₁.

4	9	3
1	6	7
8	5	2

Tablica S1.4.

Rješenje zadatka S2

Obilježimo nepoznate brojeve u praznim poljima redom s x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 i x_7 (tab. S2.2.). Daljnji koraci u rješavanju zadatka, opisani niže, označeni su brojevima od I do VI, i istaknuti su u stupcima u tablici S2.3₁.

I

- Koliko je $x_1 + x_2 + x_3$?

Iz uvjeta $7 + x_1 + x_2 + x_3 = 14$ slijedi da je $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

- Koji su ostali uvjeti? Ispišite ih. Što oni određuju?

Iz 7 uvjeta koji su u zadatku dani proizlazi 7 jednadžbi. Sada lako možemo popuniti drugi stupac u tablici S2_3. i u svakom retku stupca odrediti zbroj. Dobit ćemo sustav od 7 jednadžbi s gore navedenim nepoznicama (tab. S2_3₁., stupac I).

II

- Koje vrijednosti (međusobno različite) mogu poprimiti nepoznanice $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ i x_7 ?

Navedene nepoznanice mogu poprimiti vrijednosti 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 9.

- Koliko je jednadžbi s dvije nepoznanice, a koliko s tri, odnosno s četiri nepoznanice?

Imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, tri jednadžbe s tri nepoznanice i dvije jednadžbe s četiri nepoznanice.

- Na koliko načina, koristeći te brojeve, možete dobiti npr. broj 5 kao zbroj dvaju brojeva (redom šesti zbroj u tablici S2_3.)?

Broj 5 možemo dobiti na dva načina: kao zbroj brojeva 1 i 4, te 2 i 3. Obje mogućnosti unesite u odgovarajući redak (šesti sljedećeg stupca tablice.¹⁴ Na isti način popunite preostale retke u tom stupcu (tab. S2_3₁., stupac II).

III

- Koji bi mogao biti sljedeći korak?

Promatrajmo najprije jednadžbe s najmanje nepoznanica. To su jednadžbe (5) i (6). Zbroj nepoznanica u jednadžbi (5), za razliku od zbroja nepoznanica u jednadžbi (6), može se realizirati samo na jedan način, kao zbroj brojeva 9 i 6. Jedna od nepoznanica (x_5 ili x_7) mora biti 9, a druga 6 (tab. S2_3₁., stupac II).

- Što nam to kazuje? Kako to utječe na ostale jednadžbe?

Promatrajmo najprije jednadžbe (5) i (2).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica x_5 ili x_7 , iz jednadžbe (5), u jednadžbi (2)? Što odatle zaključujemo?

¹⁴Prvu mogućnost, primjerice, zapisat ćemo u odgovarajućem retku tablice (tab. S2_3₁., stupac II), jednostavnosti radi, kao 1, 4. Pri tom podrazumijevamo da su nepoznanice $x_3, x_6 \in \{1, 4\}$ i $x_3 \neq x_6$.

U drugoj jednadžbi se ne pojavljuje ni x_5 ni x_7 , pa mogućnosti 1, 4, 6 i 2, 3, 6 odbacujemo budući niti jedna od nepoznanica u jednadžbi (2) ne može imati vrijednost 6. Promatrajmo sada jednadžbe (5) i (3).

- Koja se nepoznanica pojavljuje i u jednadžbi (5) i (3)? Što možete zaključiti?

Nepoznanica x_5 pojavljuje se u obje jednadžbe, i mora biti 9 ili 6, pa opstaju sve tri mogućnosti jer svaka od njih sadrži ili 9 ili 6. Promatrajmo dalje jednadžbe (5) i (4).

- Zašto opstaju sve tri mogućnosti u jednadžbi (4)?

Nepoznanica x_7 pojavljuje se u obje jednadžbe, i mora biti 9 ili 6, pa opstaju sve tri mogućnosti jer svaka od njih sadrži ili 9 ili 6. Promatrajmo zatim jednadžbe (5) i (6).

- Zašto opstaju obje mogućnosti u jednadžbi (6)?

Jednadžbe nemaju zajedničkih nepoznanica i niti jedna od mogućnosti ne sadrži ni broj 9 ni 6. Promatrajmo još jednadžbe (5) i (7).

- Utječe li jednadžba (5) na jednadžbu (7)?

Ne, jer nemaju zajedničkih nepoznanica i u obje se zbroj može realizirati samo na jedan način. Iz istog razloga nema utjecaja niti na jednadžbu (1).

Preglednosti radi, promjene nastale u ovom koraku možemo istaknuti u novom stupcu tablice (tab. S2_3₁., stupac III).¹⁵

IV

- Što bi mogli napraviti sljedeće?

Pređimo na jednadžbe s tri nepoznanice. To su jednadžbe (1), (2) i (7). Zbroj nepoznanica u svakoj od njih može se realizirati samo na jedan način. Odaberimo jednadžbu (2). Nepoznanicama koje sadrži $(x_1, x_3$ i $x_4)$ moraju biti, u nekom poretku, pridruženi brojevi 2, 4 i 5 (tab. S2_3₁., stupac III).

- Što nam to kazuje? Kako to utječe na ostale jednadžbe?

Promatrajmo najprije jednadžbe (2) i (1).

¹⁵Kako bi dobili prostora za dodatne stupce, učenici mogu tablicu precrtati u bilježnicu.

- Koje se nepoznanice pojavljuju i u jednađbi (2) i (1)? Što možete zaključiti?

Nepoznanice x_1 i x_3 pojavljuju se u obje jednađbe, pa jedna od njih mora poprimiti vrijednost 2, a druga 4. Time je treća nepoznanica u svakoj od jednađbi određena. Dakle, iz jednađbe (1) proizlazi da je $x_2 = 1$, a iz jednađbe (2) da je $x_4 = 5$. (tab. S2_3₁., stupac IV) Promatrajmo sada jednađbe (2) i (3).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica iz jednađbe (2) u jednađbi (3)? Što odatle zaključujemo?

Nepoznanica x_3 pojavljuje se u obje jednađbe, a budući mora poprimiti vrijednost 2 ili 4 ili 5, mogućnost koja sadrži 2 i 4 treba odbaciti. (tab. S2_3₁., stupac IV) Promatrajmo dalje jednađbe (2) i (4).

- Koje se nepoznanice pojavljuju i u jednađbi (2) i (4)? Što možete zaključiti?

Nepoznanice x_3 i x_4 pojavljuju se u obje jednađbe, a budući moraju poprimiti jednu od vrijednosti 2 ili 4 ili 5 (međusobno različite), sve mogućnosti opstaju. (tab. S2_3₁., stupac IV) Promatrajmo zatim jednađbe (2) i (6).

- Pojavljuje li se neka od nepoznanica iz jednađbe (2) u jednađbi (6)? Što odatle zaključujemo?

Nepoznanica x_3 pojavljuje se u obje jednađbe, a budući mora poprimiti vrijednost 2 ili 4 ili 5, obje mogućnosti opstaju. (tab. S2_3₁., stupac IV)

Promatrajmo još jednađbe (2) i (7).

- Koje se nepoznanice pojavljuju i u jednađbi (2) i (7)? Što možete zaključiti?

Nepoznanice x_1 i x_4 pojavljuju se u obje jednađbe, pa jedna od njih mora poprimiti vrijednost 4, a druga 5. Time je treća nepoznanica u svakoj od jednađbi određena. Dakle, iz jednađbe (7) proizlazi da je $x_2 = 1$, a iz jednađbe (2) da je $x_3 = 2$. (tab. S2_3₁., stupac IV)¹⁶

V i VI

- Koji mogu biti sljedeći koraci?

¹⁶Preglednosti radi $x_2 = 1$ nećemo evidentirati u zadnjem retku tablice budući je vrijednost te nepoznanice u ovom koraku već određena i istaknuta u tablici.

Znamo da je $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ i $x_4 = 5$. Direktnim uvrštavanjem $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$ u jednadžbu (1) dobivamo da je $x_1 = 4$. Uvrštavanjem $x_3 = 2$ i $x_4 = 5$ u jednadžbu (2) potvrđujemo da je $x_1 = 4$.

- Uvrstimo li $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$ u jednadžbu (3), što dobivamo?

Uvrštavanjem $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$ u jednadžbu (3) slijedi da je $x_5 + x_6 = 12$. Jedna od nepoznanica (x_5 ili x_6) mora biti 3, a druga 9.

- Uvrstimo li $x_3 = 2$ i $x_4 = 5$ u jednadžbu (4), što dobivamo?

Uvrštavanjem $x_3 = 2$ i $x_4 = 5$ u jednadžbu (4) slijedi da je $x_6 + x_7 = 9$. Jedna od nepoznanica (x_6 ili x_7) mora biti 3, a druga 6.

Nadalje, budući je $x_3 = 2$ iz jednadžbe (6) proizlazi da je $x_6 = 3$, a uvrštavanjem $x_2 = 1$ i $x_4 = 5$ u jednadžbu (7) potvrđujemo da je $x_1 = 4$. (tab. S2.3_{1.}, stupac V)¹⁷

- Koje još nepoznanice treba odrediti?

U prethodnom smo koraku odredili $x_1 = 4$ i $x_6 = 3$. Preostaje odrediti x_5 i x_7 . Direktnim uvrštavanjem $x_6 = 3$ u jednadžbu $x_5 + x_6 = 12$ dobivamo da je $x_5 = 9$, a uvrštavanjem $x_6 = 3$ u jednadžbu $x_6 + x_7 = 9$ da je $x_7 = 6$. (tab. S2.3_{1.}, stupac VI)

Tako smo odredili sve nepoznanice. Najzad, provjerimo zadovoljavaju li dobivena rješenja svaku od jednadžbi. Konačno rješenje istaknuto je i u polaznoj formi tablice (tab. S2.4.).

¹⁷Napomena: U tablici ćemo evidentirati $x_1 = 4$ samo na prvom mjestu pojavljivanja.

	I	II	III	IV	V	VI
(1)	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$	1, 2, 4		$x_2 = 1$ $x_4 = 5^a$	$x_1 = 4$	
(2)	$x_1 + x_3 + x_4 = 11$	1, 4, 6 2, 3, 6 2, 4, 5	2, 4, 5			
(3)	$x_2 + x_3 + x_5$ $+x_6 = 15$	1, 2, 3, 9 1, 3, 5, 6 2, 3, 4, 6		1, 2, 3, 9 1, 3, 5, 6	$x_5 + x_6 = 12$ 3, 9	$x_5 = 9$
(4)	$x_3 + x_4 + x_6$ $+x_7 = 16$	1, 2, 4, 9 1, 4, 5, 6 2, 3, 5, 6			$x_6 + x_7 = 9$ 3, 6	$x_7 = 6$
(5)	$x_5 + x_7 = 15$	9, 6				
(6)	$x_3 + x_6 = 5$	1, 4 2, 3			$x_6 = 3$	
(7)	$x_1 + x_2 + x_4 = 10$	1, 4, 5		$x_3 = 2^b$		

Tablica S2.3₁.

^a $x_4 = 5$ slijedi iz jednadžbe (2) razmatranjem jednadžbi (2) i (1)

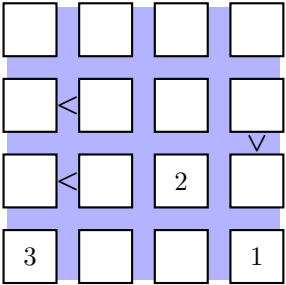
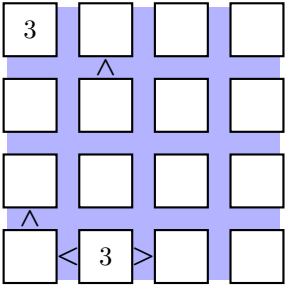
^b $x_3 = 2$ slijedi iz jednadžbe (2) razmatranjem jednadžbi (2) i (7)

7	4	8
1	2	5
9	3	6

Tablica S2.4.

4. Više manje

4.1. Zadaci¹⁸

<p>Zadatak VM1: Umetnite u prazna polja brojeve od 1 do 4 tako da svaki redak i svaki stupac sadrži različite brojeve, s time da se pridržavate umetnutih znakova nejednakosti.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.1.</p>	<p>Zadatak VM2: Umetnite u prazna polja brojeve od 1 do 4 tako da svaki redak i svaki stupac sadrži različite brojeve, s time da se pridržavate umetnutih znakova nejednakosti.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.1.</p>
---	---

4.2. Rješenja

Rješavanje ovih zadataka svodi se na pronalaženje polja kojemu možemo pridružiti broj, odnosno polja s dovoljno uvjeta za određivanje broja u polju. Zadaci VM1 i VM2 su detaljno riješeni. Nastavnik će iz detaljno danih rješenja zadataka lako formirati usmjeravajuća pitanja tako da izjave rečenice preoblikuje u upitne.

Dodajmo da se u zadacima može krenuti i od nekih drugih polja i prve ih popuniti. Tako se u zadatku VM1 može najprije odrediti broj u polju u trećem retku i četvrtom stupcu, tj. broj a_{34} ¹⁹ (ili još jednostavnije broj a_{43} ²⁰), a u zadatku VM2 broj a_{44} ²¹.

¹⁸Prvi i drugi zadatak *Više manje* (kraće VM1, odnosno VM2) matematičke su zagonetke redom *Više manje* (2025.) i *Više manje* (2024.). Originalan tekst: „tako da se ne ponavljaju u stupcu ili koloni“ zbog preciznosti i jasnoće zamijenjen je sljedećim tekstom: „tako da svaki redak i svaki stupac sadrži različite brojeve“. Također, u duhu ovog rada, autorice umjesto originalne riječi „kućice“ koriste riječ „polje“.

¹⁹Naime, iz uvjeta: $a_{34} \neq 1, 2$ i $a_{34} < a_{24}$ slijedi da je $a_{34} = 3$.

²⁰Iz uvjeta $a_{43} \neq 3, 1, 2$ slijedi da je $a_{43} = 4$.

²¹Iz uvjeta: $a_{44} \neq 3$ i $a_{44} \neq 1, 2$, (iz četvrtog retka je $a_{41} < 3 > a_{43}$, pa jedan od brojeva a_{41} ili a_{43} mora biti 1, a drugi 2) slijedi da je $a_{44} = 4$.

Rješenje zadatka VM1

<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>□</td><td>□</td><td>□</td><td>□</td></tr> <tr><td>□</td><td><</td><td>□</td><td>□</td></tr> <tr><td>□</td><td><</td><td>2</td><td>□^v</td></tr> <tr><td>3</td><td>□</td><td>□</td><td>1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.1₁.</p>	□	□	□	□	□	<	□	□	□	<	2	□ ^v	3	□	□	1	<p>Najprije odredimo broj a_{31} (u trećem retku i prvom stupcu, u polju označenom točkom u tablici VM1.1₁.) takav da je:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a_{31} \neq 2, 3$, • $a_{31} < a_{32}$. <p>Iz prvog uvjeta slijedi da je $a_{31} \in \{1, 4\}$, a iz drugog da je $a_{31} \neq 4$. Dakle $a_{31} = 1$, pa tako dobivamo tablicu VM1.1₂.</p> <p>Napomenimo da je u tablici VM1.1₂ iznad $a_{31} = 1$ stavljen broj 1 koji ukazuje da je to polje prvo popunjeno, u prvom koraku.^a</p> <p>^aTako je npr. u tablici VM1.1₂ polje u prvom retku i četvrtom stupcu ($a_{14} = 2$) popunjeno u petom koraku.</p>																
□	□	□	□																														
□	<	□	□																														
□	<	2	□ ^v																														
3	□	□	1																														
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>4^{3A}</td><td>□</td><td>□</td><td>2^5</td></tr> <tr><td>2^{2A}</td><td><</td><td>□</td><td>4^4</td></tr> <tr><td>1^1</td><td><</td><td>4^{3B}</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>□</td><td>□</td><td>1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.1₂.</p>	4^{3A}	□	□	2^5	2^{2A}	<	□	4^4	1^1	<	4^{3B}	2	3	□	□	1	<p>2A i 2B u istoj tablici označavaju dvije mogućnosti „kretanja“, odnosno alternativne, nezavisne puteve u drugom koraku. Možemo krenuti ili od polja u drugom retku i prvom stupcu (put A) ili od polja u trećem retku i četvrtom stupcu (put B).^a</p> <p>U šestom koraku tražimo brojeve (tablica VM1.1₂):</p> $a_{42} \neq 3, 1, 4, \quad a_{43} \neq 3, 1, 2.$ <p>Odavde slijedi $a_{42} = 2$ i $a_{43} = 4$ (tablica VM1.1₃).</p> <p>^aJasno je da je $a_{21} = 2$. Naime, nakon 1. koraka, u prvom stupcu ostaju dva prazna polja koja treba popuniti brojevima 4 i 2. Budući je $a_{21} < a_{22}$ slijedi da je $a_{21} \neq 4$. Isto tako je $a_{34} = 3$. U trećem retku ostaju dva prazna polja (4 i 3), a kako je $a_{34} < a_{24}$ slijedi $a_{34} \neq 4$. Lako se određuju i preostali brojevi u tablici VM1.1₂. (u poljima popunjenim u 3., 4. i 5. koraku).</p>																
4^{3A}	□	□	2^5																														
2^{2A}	<	□	4^4																														
1^1	<	4^{3B}	2																														
3	□	□	1																														
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>4^{3A}</td><td>□</td><td>□</td><td>2^5</td></tr> <tr><td>2^{2A}</td><td><</td><td>□</td><td>4^4</td></tr> <tr><td>1^1</td><td><</td><td>4^{3B}</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2^6</td><td>4^6</td><td>1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.1₃.</p>	4^{3A}	□	□	2^5	2^{2A}	<	□	4^4	1^1	<	4^{3B}	2	3	2^6	4^6	1	<p>U sedmom koraku tražimo broj a_{22} (tablica VM1.1₃.) takav da je:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a_{22} \neq 2, 4$, • $a_{22} > 2$. <p>Iz prvog uvjeta proizlazi da je $a_{22} \in \{1, 3\}$, a iz drugog da je $a_{22} \neq 1$. Prema tome $a_{22} = 3$ (tablica VM1.1₄).</p>																
4^{3A}	□	□	2^5																														
2^{2A}	<	□	4^4																														
1^1	<	4^{3B}	2																														
3	2^6	4^6	1																														
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>4^{3A}</td><td>1^8</td><td>3^9</td><td>2^5</td></tr> <tr><td>2^{2A}</td><td><</td><td>3^7</td><td>1^8</td></tr> <tr><td>1^1</td><td><</td><td>4^{3B}</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2^6</td><td>4^6</td><td>1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.1₄.</p>	4^{3A}	1^8	3^9	2^5	2^{2A}	<	3^7	1^8	1^1	<	4^{3B}	2	3	2^6	4^6	1	<p>Konačno rješenje dano je u tablici VM1.1₄. (istaknuti su koraci rješavanja) i u tablici VM1.2. (izvorni oblik).</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM1.2.</p>	4	1	3	2	2	3	1	4	1	4	2	3	3	2	4	1
4^{3A}	1^8	3^9	2^5																														
2^{2A}	<	3^7	1^8																														
1^1	<	4^{3B}	2																														
3	2^6	4^6	1																														
4	1	3	2																														
2	3	1	4																														
1	4	2	3																														
3	2	4	1																														

Rješenja zadatka VM2

<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>.</td><td><</td><td>3</td><td>></td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.11.</p>	3					^												^			.	<	3	>	<p>Najprije odredimo broj a_{41} (u četvrtom retku i prvom stupcu, u polju označenom točkom u tablici VM2.11.) takav da je:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a_{41} \neq 3$, • $a_{41} < 3$, • $a_{41} > a_{31}$. <p>Iz prvog uvjeta slijedi da je $a_{41} \in \{1, 2, 4\}$, iz drugog da je $a_{41} \in \{1, 2\}$, a iz trećeg slijedi da $a_{41} \neq 1$. Dakle, $a_{41} = 2$ (tab. VM2.12.).</p> <p>Napomenimo da je u tablici VM2.12. iznad $a_{41} = 2$ stavljen broj 1 koji ukazuje da je to polje prvo popunjeno, u prvom koraku.</p>																				
3																																													
	^																																												
	^																																												
.	<	3	>																																										
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4^{3A}</td><td>.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1^{2A}</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2¹</td><td><</td><td>3</td><td>></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1^{2B}</td><td>4^{3B}</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.12.</p>	3					^			4 ^{3A}	.			1 ^{2A}					^			2 ¹	<	3	>			1 ^{2B}	4 ^{3B}	<p>2A i 2B u istoj tablici označavaju dvije mogućnosti „kretanja“, odnosno alternativne, nezavisne puteve u drugom koraku. Naime, možemo krenuti ili od polja u trećem retku i prvom stupcu (putem A) ili od polja u četvrtom retku i trećem stupcu (putem B).^a</p> <p>U četvrtom koraku tražimo broj a_{22} (tab. VM2.12.) takav da je:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a_{22} \neq 4, 3$, • $a_{22} > a_{12}$. <p>Iz prvog uvjeta slijedi da je $a_{22} \in \{1, 2\}$, a iz drugog da je $a_{22} \neq 1$. Dakle, $a_{22} = 2$ (tab. VM2.13.).^b</p> <p>^aJasno je da je $a_{31} = 1$. Naime, nakon 1. koraka, u prvom stupcu ostaju dva prazna polja koja treba popuniti brojevima 4 i 1. Budući je $a_{31} < 2$ slijedi da je $a_{31} \neq 4$. Isto tako je $a_{43} = 1$. Naime, nakon 1. koraka, u četvrtom retku ostaju dva prazna polja koja treba popuniti brojevima 4 i 1. Budući je $a_{43} < 3$ slijedi da je $a_{43} \neq 4$. Tako su u prva tri koraka popunjeni prvi stupac i četvrti redak tablice VM2.12.</p> <p>^bLako se određuju preostala dva broja drugog stupca tablice VM2.13. (polja popunjena u 5. i 6. koraku).</p>																
3																																													
	^																																												
4 ^{3A}	.																																												
1 ^{2A}																																													
	^																																												
2 ¹	<	3	>																																										
		1 ^{2B}	4 ^{3B}																																										
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1⁵</td><td></td><td>.</td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4^{3A}</td><td>2⁴</td><td>.</td><td></td></tr> <tr><td>1^{2A}</td><td>4⁶</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2¹</td><td><</td><td>3</td><td>></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1^{2B}</td><td>4^{3B}</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.13.</p>	3	1 ⁵		.		^			4 ^{3A}	2 ⁴	.		1 ^{2A}	4 ⁶				^			2 ¹	<	3	>			1 ^{2B}	4 ^{3B}	<p>U sedmom koraku tražimo brojeve (tab. VM2.13.):</p> $a_{14} \neq 3, 1, 4, \quad a_{23} \neq 4, 2, 1.$ <p>Oдавde slijedi da je $a_{14} = 2$ i $a_{23} = 3$ (tab. VM2.14.).</p>																
3	1 ⁵		.																																										
	^																																												
4 ^{3A}	2 ⁴	.																																											
1 ^{2A}	4 ⁶																																												
	^																																												
2 ¹	<	3	>																																										
		1 ^{2B}	4 ^{3B}																																										
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1⁵</td><td>4⁸</td><td>2⁷</td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4^{3A}</td><td>2⁴</td><td>3⁷</td><td>1⁸</td></tr> <tr><td>1^{2A}</td><td>4⁶</td><td>2⁹</td><td>3⁹</td></tr> <tr><td></td><td>^</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2¹</td><td><</td><td>3</td><td>></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1^{2B}</td><td>4^{3B}</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.14.</p>	3	1 ⁵	4 ⁸	2 ⁷		^			4 ^{3A}	2 ⁴	3 ⁷	1 ⁸	1 ^{2A}	4 ⁶	2 ⁹	3 ⁹		^			2 ¹	<	3	>			1 ^{2B}	4 ^{3B}	<p>Konačno rješenje dano je u tablici VM2.14. (istaknuti su koraci rješavanja) i u tablici VM2.2. (izvorni oblik).</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Tablica VM2.2.</p>	3	1	4	2	4	2	3	1	1	4	2	3	2	3	1	4
3	1 ⁵	4 ⁸	2 ⁷																																										
	^																																												
4 ^{3A}	2 ⁴	3 ⁷	1 ⁸																																										
1 ^{2A}	4 ⁶	2 ⁹	3 ⁹																																										
	^																																												
2 ¹	<	3	>																																										
		1 ^{2B}	4 ^{3B}																																										
3	1	4	2																																										
4	2	3	1																																										
1	4	2	3																																										
2	3	1	4																																										

5. Zaključak

Iako zadaci izgledaju jednostavni matematička pozadina je sasvim drugačija. U zadacima *Zacrni polja* u pitanju je kombinatorna optimizacija. Rješavač raspolaže različitim kombinacijama i potom bira onu koja zadovoljava određene uvjete. Zadaci *Suko*-a spadaju u problematiku linearne algebre; rješavanje linearnog sustava s n nepoznanica. Zadaci *Više manje* temelje se na relacijama između elemenata.

Ovi su zadaci pogodni za učenike različitih uzrasta. Uostalom, to su matematičke zagonetke iz dnevnih listova namijenjene mlađim i starijim rješavačima, svima koji vole takve izazove. Mogu se upotrijebiti u bilo kojoj etapi sata i u razne svrhe. Na primjer, učenicima nižih razreda osnovne škole zadaci tipa *Zacrni polja* i *Više manje* mogu poslužiti za utvrđivanje nastavnih sadržaja (npr. uspoređivanje prirodnih brojeva do 4). Starijima za opuštanje i odmak od uobičajenih zadataka i načina rada. Ovakve i slične zadatke autorice koriste i u radu sa studentima. Primjerice *Suko* u motivacijske svrhe u uvodnom dijelu nastavnog sata pri uvođenju sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Uvođenje promjena u nastavu matematike u vidu rješavanja zadataka poput nestandardnih moglo bi pozitivno utjecati i na stavove prema matematici (Škultéty i Pastor, 2020.; Putra, 2021.). S tim u vezi, treba uzeti u obzir i postojanje posljedične povezanosti između stavova u matematici i postignuća iz matematike (Ma i Kishor, 1997.; Ma i Xu, 2004.).

Priprema za implementaciju nestandardnih matematičkih zadataka u nastavu složenija je nego inače. Između ostalog, zahtijeva od nastavnika da unaprijed promišlja o mogućim pitanjima učenika, nedoumicama i putovima rješavanja zadatka, ali i da se prilagođava na licu mjesta. Posebno je vrijedno ukazati²² na postojanje različitih načina rješavanja, drukčijih mogućnosti. Boljim učenicima otkrivaju nove poglede na zadatak, dok učenicima kojima matematika nije jača strana pružaju priliku za razumijevanje.

Literatura

- [1] D. A. Khalmuratovna, *The Role of Non-standard Tasks in the Teaching Mathematics of Primary School*, JournalNX, 329.–335., 2020.
- [2] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola, 2(7), 51.–58., 2000.
- [3] X. Ma, N. Kishor, *Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis*,

²²kad god je to moguće

- Journal for Research in Mathematics Education, 28(1), 26.–47., 1997., <https://doi.org/10.2307/749662>
- [4] X. Ma, J. Xu, *Determining the Causal Ordering between Attitude toward Mathematics and Achievement in Mathematics*, American Journal of Education, 110(3), 256.–280., 2004.
- [5] D. S. Madaminova, *Use of Non-standard Lessons in Mathematics at School*, World Bulletin of Social Sciences, 23, 38.–40., 2023., <https://scholarexpress.net/index.php/wbss/article/view/2919>
- [6] G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, 1945.
- [7] Z. H. Putra, *The use of non-standard mathematical tasks to promote teachers' and students' mathematical thinking*, Journal of Physics: Conference Series, 1806(1), 012086, 2021., <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012086>
- [8] *Suko*, Jutarnji list, Razbibriga, 22. prosinca 2024.
- [9] *Suko*, Jutarnji list, Razbibriga, 26. siječnja 2025.
- [10] M. Škultéty, K. Pastor, *Problems in Solving Non-standard Mathematical Tasks*, Proceedings of 13th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI2020), 1018.–1022., 2020., <https://doi.org/10.21125/iceri.2020.0291>
- [11] *Više manje*, Jutarnji list, Razbibriga, 22. prosinca 2024.
- [12] *Više manje*, Jutarnji list, Razbibriga, 6. srpnja 2025.
- [13] *Zacrni polja*, Jutarnji list, Razbibriga, 26. siječnja 2025.
- [14] *Zacrni polja*, Jutarnji list, Razbibriga, 23. ožujka 2025.

Branka Gotovac
Kemijско-tehnološki fakultet, Sveučilište u Splitu
E-mail: gotovac@ktf-split.hr

Josipa Gotovac
United World College, Mostar
E-mail: josipa.gotovac@uwcmostar.ba