

Neki fizikalni zakoni eksponencijalnog pada

Maja Damjanović*, Krešimir Burazin[†]

Sažetak

Zakoni eksponencijalnog rasta i pada prirodno se pojavljuju u medicini, kemiji, biologiji, geologiji, fizici i brojnim drugim granama znanosti. Matematički je to jedan te isti koncept koji se u osnovi svodi na činjenicu da je brzina kojom se neka veličina mijenja proporcionalno samoj toj veličini, što za posljedicu ima da je ovisnost te veličine o varijabli eksponencijalna. Nakon uvođenja pojma derivacije kao mjere promjene i teorijskog obrazloženja zakona eksponencijalnog rasta i pada, isti je ilustriran na nekoliko poznatih fizikalnih zakona: Newtonovom zakonu hlađenja, zakonu promjene atmosferskog tlaka s nadmorskom visinom te zakonu radioaktivnog raspada.

Ključne riječi: *eksponencijalni rast i pad, derivacija, brzina, Newtonov zakon hlađenja, atmosferski tlak, nadmorska visina, radioaktivni raspad*

*Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mandrije@mathos.hr

[†]Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: kburazin@mathos.hr

Some physical laws of exponential decay

Abstract

Laws of exponential growth and decay naturally appear in medicine, chemistry, geology, physics, and many other scientific fields. Mathematically, they are all similar and reduce to the statement that the rate of change of a value is proportional to the value itself, meaning this value depends exponentially on its variable. After introducing the notion of the derivative as the rate of change, and describing the problem of exponential growth and decay, we will illustrate this with several well-known physical laws, namely, Newton's law of cooling, the law of change in atmospheric pressure with respect to altitude, and the law of radioactive decay.

Keywords: *exponential growth and decay, derivative, speed, Newton's law of cooling, atmospheric pressure, altitude, radioactive decay*

1 Osnovni pojmovi

1.1 Derivacija

Pojam derivacije možemo promatrati kroz dva pristupa koja su nezavisno jedan od drugog uveli njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz, te engleski fizičar, matematičar i astronom Isaac Newton. Leibniz je do pojma derivacije došao proučavajući problem tangente na krivulji, a Newton promatrajući brzinu gibanja tijela u nekom vremenskom trenutku. Promotrimo detaljnije Newtonov pristup, odnosno problem brzine.

Neka se tijelo giba po pravcu. Na pravac uvedemo koordinatni sustav te položaj tijela u trenutku t označimo s $s(t)$. Time smo uveli funkciju položaja tijela, $s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Pitamo se koliko iznosi brzina tijela u nekom trenutku t_0 . Od trenutka t_0 , kada se tijelo počne gibati do trenutka $t_0 + \Delta t$ tijelo se pomakne za $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, pa je *prosječna brzina* gibanja tijela u vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t)$ dana s

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

I dok je taj pojam prosječne brzine prilično intuitivan, pojam brzine u nekom trenutku t_0 je svakako složeniji. Naivno laičko zaključivanje bi moglo dovesti u pitanje uopće postojanje takvog pojma jer opažajem tijela samo u trenutku t_0 činilo bi se da tijelo miruje, odnosno ima brzinu nula. S druge strane ako u svakom trenutku ima brzinu nula, onda je pitanje kako

je prešlo neki put u određenom vremenskom intervalu? Newtonova ideja bila je promatrati male vremenske intervale, pa ako je Δt jako mali, onda su male i promjene brzine na tom intervalu, pa cijeli problem možemo promatrati kao jednoliko gibanje po pravcu. Što je taj interval manji to bi prosječna brzina na tom intervalu trebala biti bliža trenutačnoj brzini u trenutku t_0 , te je stoga Newton brzinu u trenutku t_0 definirao kao

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t},$$

ako taj limes postoji.

Gornji limes predstavlja derivaciju funkcije s u trenutku t_0 i pišemo $v(t_0) = s'(t_0)$. Dakle, brzina je derivacija funkcije položaja ili mjera promjene položaja po jedinici vremena. Na isti način interpretiramo i derivaciju bilo koje funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, odnosno derivacija f' funkcije f predstavlja mjeru promjene veličine f u odnosu na varijablu o kojoj ovisi i tu mjeru promjene uobičajeno nazivamo *brzina promjene* ili samo *brzina*.

Ilustrirajmo te pojmove na jednom jednostavnom primjeru.

Primjer 1.1. *Kugla snijega topi se tako da se njezino oplošje smanjuje konstantnom brzinom od $0.9 \text{ cm}^2/\text{min}$. Potrebno je odrediti brzinu kojom se mijenja polumjer kugle snijega po vremenskoj varijabli u trenutku kada je on jednak 9.8 cm .*

Rješenje. Ako s $r(t)$ označimo polumjer kugle snijega u trenutku t , onda je oplošje kugle snijega u trenutku t dano s $O(t) = 4r(t)^2\pi$. Brzina kojom se smanjuje oplošje dana je kao derivacija funkcije O , tj.

$$O'(t) = 8r(t)r'(t)\pi.$$

Kako se oplošje smanjuje, odnosno O je padajuća funkcija, zaključujemo da je njezina derivacija negativna, odnosno (ispuštamo pisanje mjernih jedinica)

$$O'(t) = -0.9,$$

pa lako slijedi da je

$$r'(t) = \frac{-0.9}{8r(t)\pi}.$$

Stoga u trenutku t kada je $r(t) = 9.8 \text{ cm}$ zaključujemo da je brzina kojom se smanjuje polumjer kugle snijega jednaka

$$r'(t) = \frac{-0.9}{8 \cdot 9.8\pi} \approx -0.003654 \text{ cm/min}.$$

1.2 Eksponencijalni rast i pad

Pretpostavimo da je brzina promjene neke veličine y proporcionalna samoj veličini y , odnosno ako y ovisi o vremenskoj varijabli t , onda tu ovisnost možemo zapisati kao

$$y'(t) = ky(t), \quad (1)$$

gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstanta proporcionalnosti.

Izraz (1) možemo zapisati kao

$$k = \frac{y'(t)}{y(t)}, \quad (2)$$

što znači da je relativna brzina promjene veličine y konstantna.

U primjenama je uglavnom y nenegativna funkcija. S obzirom na konstantu k možemo promatrati dva slučaja.

- ako je $k > 0$ tada je i $y' \geq 0$ pa zaključujemo da funkcija y raste. Tada (1) nazivamo zakon prirodnog rasta,
- ako je $k < 0$ tada je i $y' \leq 0$ pa je funkcija y padajuća. Tada izraz (1) nazivamo zakon prirodnog pada.

Jednadžba (1) je obična diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama, te ju lako možemo riješiti. Naime, ako izraz

$$\frac{dy}{dt} = ky(t)$$

podijelimo s $y(t) \neq 0$ i formalno pomnožimo s dt te integriramo, dobivamo

$$\ln |y(t)| = kt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

što je, uz pretpostavku glatkoće funkcije y te oznaku $C = \pm e^c$ ekvivalentno

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad C \neq 0. \quad (3)$$

Čak i oni koji nisu upoznati s diferencijalnim jednadžbama lako mogu provjeriti da funkcija dana s (3) zadovoljava (1). Ako u izraz (3) uvrstimo $t = 0$, dobivamo

$$y(0) = Ce^{k0} = C,$$

odnosno C predstavlja vrijednost funkcije y u početnom trenutku. Stoga je konačno rješenje jednadžbe (1) dano s

$$y(t) = y(0)e^{kt}.$$

Iz izvedenog možemo zaključiti da zakon prirodnog rasta i pada (1) zapravo predstavlja eksponencijalni rast i pad promatrane veličine. Brojni su modeli gdje se takav zakon pojavljuje, što ćemo u nastavku ilustrirati na nekoliko primjera koji potječu iz fizike.

2 Fizikalni zakoni eksponencijalnog rasta i pada

U ovom poglavlju predstaviti ćemo nekoliko zanimljivih primjera iz fizike u kojima se pojavljuje zakon prirodnog pada.

2.1 Newtonov zakon hlađenja

Newtonov zakon hlađenja opisuje brzinu hlađenja tijela, te kao takav ima brojne primjene, primjerice u kulinarstvu, građevini, medicini, forenzici i drugim znanstvenim područjima. On govori da je promjena temperature tijela proporcionalna razlici temperature tijela i temperature okoline u kojoj se tijelo nalazi. Ako s $T(t)$ označimo temperaturu tijela u trenutku t , a s T_o označimo temperaturu okoline, onda Newtonov zakon hlađenja glasi

$$T'(t) = k(T(t) - T_o), \quad (4)$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti. Jednadžba (4) je obična diferencijalna jednadžba prvog reda, koja se supstitucijom $y(t) = T(t) - T_o$ lako svodi na jednadžbu (1), a rješenje te jednadžbe dano je s

$$y(t) = y(0)e^{kt}. \quad (5)$$

Uzimajući u obzira da je $y(0) = T(0) - T_o$, lako dobivamo da je temperatura tijela u trenutku t dana s

$$T(t) = T_o + (T(0) - T_o)e^{kt}.$$

Uočimo da su nam za poznavanje temperature tijela u proizvoljnom trenutku t potrebne informacije o temperaturi okoline, početnoj temperaturi tijela, te konstanti proporcionalnosti k . Ta konstanta opisuje termička svojstva tijela te ovisi o tome od čega je tijelo građeno. Informacija o njoj može se dobiti primjerice ako poznamo temperaturu tijela u nekom fiksnom trenutku $t > 0$, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 2.1. Ana je skuhalo šalicu čaja u kuhinji čija je temperatura bila 22°C . Temperatura tek skuhanog čaja iznosila je 98°C . Ana je pročitala da je okus čaja najfiniji kada je njegova temperatura 60°C , stoga ju je zanimalo koliko se vremena čaj treba još hladiti u kuhinji da bi imao najfiniji okus, ako je nakon 5 minuta hlađenja temperatura čaja iznosila 74°C .

Rješenje. Budući da su zadane vrijednosti početne temperature čaja i temperatura okoline, prema Newtonovom zakonu hlađenja temperatura čaja u trenutku t dana je s

$$T(t) = 22 + 76e^{kt}.$$

Iz uvjeta $T(5) = 74^\circ\text{C}$ dobivamo koeficijent proporcionalnosti k , tj.

$$\begin{aligned} 74 &= 22 + 76e^{5k} \\ k &= \frac{\ln \frac{52}{76}}{5} \approx -0.075898, \end{aligned}$$

pa je temperatura čaja u trenutku t dana s

$$T(t) = 22 + 76e^{-0.0758978t}.$$

Sada iz uvjeta $T(t) = 22 + 76e^{-0.0758978t} = 60$ možemo lako izračunati vrijeme koje je potrebno da se čaj ohladi na 60°C te zaključiti da će čaj imati najfiniji okus nakon što se u kuhinji hladio 9.1326 minuta. ◀

Sljedeći primjer opisuje zanimljivu primjenu Newtonov zakona hlađenja u forenzici pri istraživanju ubojstava. Naime, poznavajući temperaturu tijela možemo odrediti vrijeme smrti, a vrijeme smrti vrlo je važna informacija pri istraživanju ubojstva.

Primjer 2.2. *Pri istraživanju ubojstva u 2 : 30 sati pronađeno je mrtvo tijelo temperature 31.5°C . Temperatura prostorije u kojoj je tijelo nađeno iznosila je 19°C . Sat vremena nakon pronalaska temperatura tijela iznosila je 29.8°C . Ako znamo da temperatura tijela žive osobe iznosi 36.5°C , odredimo vrijeme smrti.*

Rješenje. Označimo s $T(t)$ temperaturu tijela u trenutku t , pri čemu uzimamo da se ubojstvo desilo u trenutku $t = 0$. Tada je početna temperatura tijela $T(0) = 36.5^\circ\text{C}$, $T_0 = 19^\circ\text{C}$, te nas zanima onaj trenutak t_p za koji je $T(t_p) = 31.5^\circ\text{C}$ i $T(t_p + 60) = 29.8^\circ\text{C}$. Naime, taj trenutak odgovara vremenu pronalaska tijela, pa ćemo onda iz njega lako zaključiti i vrijeme ubojstva.

Prema Newtonovom zakonu hlađenja temperatura tijela u trenutku t dana je s

$$T(t) = 19 + 17.5e^{kt}.$$

Koeficijent proporcionalnosti k i traženi trenutak t_p možemo lako izračunati iz sljedećeg sustava jednačbi

$$\begin{aligned} T(t_p) &= 19 + 17.5e^{kt_p} = 31.5 \\ T(t_p + 60) &= 19 + 17.5e^{k(t_p+60)} = 29.8, \end{aligned}$$

te zaključiti da je $k = -0.0024364$ i $t_p \approx 138 \text{ min} = 2 \text{ h } 18 \text{ min}$. Što znači da je tijelo pronađeno 2 sata i 18 minuta nakon ubojstva. S obzirom na to da je tijelo pronađeno u 2 : 30 sati, ubojstvo se dogodilo u 0 : 12 sati. ◀

2.2 Ovisnost atmosferskog tlaka o nadmorskoj visini

Atmosferski tlak javlja se kao posljedica težine molekula zraka. Preciznije, gornji slojevi zraka potiskuju donje svojom težinom i ta težina stupca zraka iznad neke točke određuje atmosferski tlak u toj točki. Što je točka na većoj nadmorskoj visini, to je težina pripadnog stupca zraka iznad nje manja, te zbog toga atmosferski tlak opada s nadmorskom visinom

Talijanski matematičar i fizičar Evangelista Torricelli prvi je izmjerio vrijednost atmosferskog tlaka koristeći težinu stupca žive. Tlak koji je Torricelli izračunao približno je jednak 1 013 hPa, što danas uzimamo kao vrijednost srednjeg godišnjeg atmosferskog tlaka na morskoj razini.

Osim o nadmorskoj visini, atmosferski tlak ovisi o vlažnosti zraka i temperaturi. Mi ćemo se fokusirati na njegovu ovisnost o visini te ćemo dati model koji dosta dobro opisuje pad tlaka s visinom za područje troposfere (područje atmosfere od zemljine površine do otprilike 12 km visine u srednjem geografskom pojasu): označimo s h nadmorsku visinu, $p(h)$ atmosferski tlak na toj nadmorskoj visini, p_0 tlak na morskoj razini, ρ_0 gustoću zraka na morskoj razini te neka je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ akceleracija sile teže. Tvrdnja modela je da je promjena atmosferskog tlaka s obzirom na porast nadmorske visine dana s

$$p'(h) = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p(h), \quad (6)$$

odnosno, analogno kao prije, dobivamo da je vrijednost tlaka na visini h dana s

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}. \quad (7)$$

Pogledajmo sada jedan primjer u kojem se primjenjuje ovaj zakon.

Primjer 2.3. *Želimo izračunati vrijednost atmosferskog tlaka na vrhu Mount Everest, čija visina iznosi 8 848 m, ako znamo da vrijednost atmosferskog tlaka na razini mora iznosi 1 013 hPa, te da se tlak smanji za 12% na 1 000 m nadmorske visine.*

Rješenje. Iz $p_0 = 101\,300 \text{ Pa}$, najprije izračunajmo da je vrijednost tlaka na 1 000 m nadmorske visine jednaka $p(1000) = 0.88p_0 = 89\,144 \text{ Pa}$. Vrijednost tlaka zraka na nekoj nadmorskoj visini h dana je s

$$p(h) = 101\,300 e^{-\frac{9.81\rho_0}{101\,300} h},$$

gdje iz $p(1000) = 89144$ Pa možemo izračunati gustoću zraka ρ_0 :

$$89144 = 101\,300e^{-\frac{9.81\rho_0}{101300}1000}$$

$$\rho_0 = 1.32003 \text{ kg/m}^3.$$

Stoga je vrijednost atmosferskog tlaka na nadmorskoj visini h dana s

$$p(h) = 101\,300e^{-0.000128h},$$

odakle lako izračunamo da je vrijednost tlaka na Mount Everestu jednaka $p(8\,848) = 32\,688$ Pa. ◀

Poznavanje ovisnosti tlaka zraka o visini često se koristi za određivanje nadmorske visine. Naime, tlak zraka možemo pouzdano mjeriti uređajima koje nazivamo barometri i onda na osnovu poznatog tlaka možemo odrediti visinu. Na tom principu rade visinomjeri u avionima (barometarski altimetri), ali u novije vrijeme takvi uređaji su dostupni i na zadnjim generacijama pametnih satova. Pokazuju se vrlo korisnim za alpiniste i planinare koji tako u svakom trenutku znaju na kojoj se nadmorskoj visini nalaze.

2.3 Brzina radioaktivnog raspada

Zakon radioaktivnog raspada opisuje koliko će se radioaktivnih čestica raspasti u nekom uzorku radioaktivne tvari u nekom vremenskom intervalu, te glasi: brzina radioaktivnog raspada proporcionalna je količini neraspadnute tvari. Označimo li s $m(t)$ masu neraspadnute tvari u trenutku t , možemo ga zapisati kao

$$m'(t) = km(t), \tag{8}$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti koji ovisi o vrsti radioaktivne tvari. Rješenje gornje jednadžbe dano je s

$$m(t) = m_0e^{kt}, \tag{9}$$

gdje je m_0 masa neraspadnute tvari u trenutku $t = 0$.

Označimo s T trenutak u kojem će masa neraspadnute tvari biti jednaka polovici početne mase, odnosno $m(T) = \frac{1}{2}m_0$. Uvrštavajući to u izraz (9) dobivamo da je

$$T = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Dakle vidimo da vrijeme T koje je potrebno da se raspadne polovica početne mase radioaktivne tvari ne ovisi o početnoj masi te tvari nego samo o

koeficijentu k , odnosno o tome o kojoj se radioaktivnoj tvari radi. Stoga se taj T naziva vrijeme poluraspada i to je konstanta karakteristična za svaku radioaktivnu tvar. Vremena poluraspada svih radioaktivnih tvari koje se koriste u znanosti i inženjerstvu poznata su i javno dostupna. Zbog toga je korisno iz izraza (10) izlučiti k te ga uvrstiti u (9) da bi dobili ovisnost neraspadnute tvari o vremenu poluraspada

$$m(t) = m_0 e^{\frac{t}{T} \ln \frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Zakon radioaktivnog raspada ima veliku primjenu u nuklearnoj medicini. Nuklearna medicina koristi radioaktivne elemente za snimanje i dijagnosticanje bolesti na organima poput mozga, štitnjače, bubrega, slezene, kostiju i drugih, te za liječenje bolesti poput karcinoma, jer se radioaktivnim zrakama uništavaju bolesne stanice.

Najzastupljeniji radioaktivni element koji se koristi u gotovo svim radiološkim pretragama i terapijama je tehnećij (Tc), odnosno njegov izotop tehnećij 99 m (Tc-99m). On je siguran za medicinske djelatnike i bolesnike jer je njegovo vrijeme poluraspada 6 sati, pa je zbog toga ukupna izloženost zračenju mala. Iako je tako, pacijentima se nakon obavljanja pregleda ili primanja terapije preporučuje izbjegavanje bliskog kontakta s drugim ljudima. U sljedećem primjeru ćemo izračunati koliko vremena treba proći kako bi nakon obavljanja jednog snimanja pacijent izlučio radioaktivne elemente iz tijela.

Primjer 2.4. *Pacijent odlazi na scintigrafiju štitnjače, odnosno na snimanje koje daje dvodimenzionalni prikaz anatomije i fiziologije štitnjače. Prije početka pretrage pacijentu se intravenski daje 2.8 mg Tc-99m. Izračunajmo koliko je sati potrebno da osoba izluči iz tijela 90% ovog radioaktivnog izotopa, ako znamo da je njegovo vrijeme poluraspada 6 sati.*

Rješenje. Prema zakonu radioaktivnog raspada (9), masa uzorka koja preostaje nakon t sati je

$$m(t) = 2.8e^{-0.115524t}.$$

Zanima nas trenutak u kojem će preostala masa iznositi 10% početne mase unesenog tehnećija, što je 0.28 mg. Stoga iz

$$0.28 = 2.8e^{-0.115524t}$$

lako dobivamo

$$t = \frac{\ln \frac{0.28}{2.8}}{-0.115524} \approx 19.9315 \text{ sati,}$$

odnosno zaključujemo da je potrebno oko 20 sati da se iz tijela izluči 90% Tc-99m. Uočimo također da to vrijeme zapravo ne ovisi o početnoj masi ubrizganog tehnećija. ◀

Osim u medicini zakon radioaktivnog raspada ima veliku primjenu i u određivanju starosti arheoloških i geoloških uzoraka. Kada neki predmet nastaje on sadržava određen broj radioaktivnih jezgara radioaktivnog izotopa. Ako poznajemo izotop i njegovo vrijeme poluraspada, na osnovi količine radioaktivnog izotopa možemo odrediti starost predmeta. Metode datiranja koriste izotope različitih radioaktivnih elementa, kao što su ugljik $^{14}_6\text{C}$, uranij $^{238}_{92}\text{U}$, kalij $^{40}_{19}\text{K}$ ili olovo $^{219}_{92}\text{Pb}$. Ovdje koristimo standardno označavanje izotopa kemijskih elemenata, u kojem dolje pišemo *protonski broj* (broj protona), a gore *nukleinski broj* (sumu broja protona i neutrona). Napomenimo i da se ponekad navodi samo nukleinski broj jer on je taj koji čini razliku između dva izotopa istog elementa. Svi živi organizmi na Zemlji imaju u sebi određenu koncentraciju izotopa ugljika $^{14}_6\text{C}$, a nakon što organizam umre, metabolizam više ne održava prisutnu koncentraciju i polovica jezgri se raspadne za 5730 godina.

Primjer 2.5. *Promatramo uzorak ugljika $^{14}_6\text{C}$ mase 180 mg. Zanima nas kolika je masa uzorka nakon 1000 godina, te kada će ta masa iznositi 10 mg.*

Rješenje. Prema zakonu radioaktivnog raspada (9), masa ugljika nakon t godina je

$$m(t) = 180e^{-0.00012096t}.$$

Stoga masa uzorka nakon 1000 godina iznosi

$$m(1000) = 159.49 \text{ mg},$$

a iz

$$10 = 180e^{-0.00012096t}$$

slijedi da je

$$t = \frac{\ln \frac{10}{180}}{-0.00012096} \approx 23\,893.67027 \text{ godina},$$

odnosno masa ugljika bit će jednaka 10 mg za 23 894 godine. ◀

Literatura

- [1] M. L. Bittinger, D. J. Ellenbogen, S. A. Sargent, *Calculus and its applications – 10th ed.*, Pearson Education, Inc., 2012.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and Boundary value problems*, Wiley, 2000.

- [3] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Osijek, 2017.
- [4] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Osijek, 2000.
- [5] <http://www.podvodni.hr/more/meteorologija/1613-sto-je-atmosferski-tlak>, 13. rujna 2022.
- [6] <https://www.mathsisfun.com/algebra/exponential-growth.html>, 13. rujna 2022.
- [7] <https://world-nuclear.org/information-library/non-power-nuclear-applications/radioisotopes-research/radioisotopes-in-medicine.aspx>, 14. rujna 2022.
- [8] <https://www.kbd.hr/odjeli-zavodi-klinike/odjel-za-nuklearnu-medicinu/dijagnostika/scintigrafija/scintigrafija-stitnjace-s-tc-99m-pertehnetatom/>, 15. rujna 2022.
- [9] <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK559013/>, 13. rujna 2022.
- [10] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/eb63acab-6d0c-4a0a-84b8-345fddcdcec2/zakon-radioaktivnog-raspada.html>, 15. rujna 2022.