

Neke primjene funkcija direktne i obrnute proporcionalnosti

Amra Duraković*

Sažetak

U ovom radu opisane su funkcije direktne i obrnute proporcionalnosti te su navedeni primjeri njihove primjene u svakodnevnom životu, ekonomiji i prirodnim znanostima.

Ključne riječi: *direktna proporcionalnost, obrnuta proporcionalnost, koeficijent proporcionalnosti*

Some applications of direct and inverse proportionality functions

Abstract

This paper describes the functions of direct and inverse proportionality and provides examples of their application in everyday life, economics, and the natural sciences.

Keywords: *direct proportionality, inverse proportionality, coefficient of proportionality*

*Pedagoški fakultet, Univerzitet u Bihaću, email: amra.durakovic@unbi.ba

1 Uvod

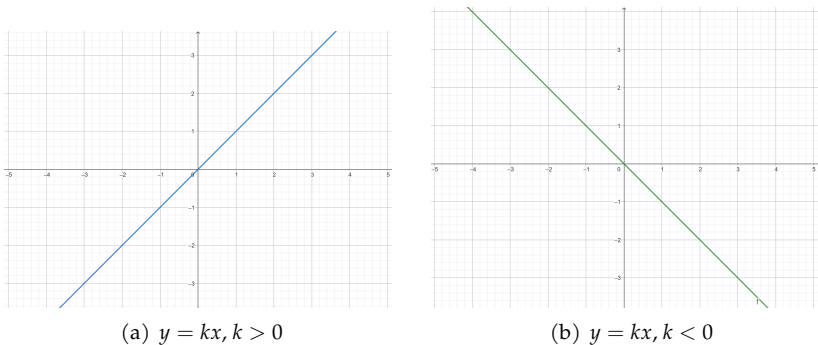
Definicija 1.1. Funkciju definiranu na \mathbb{R} s

$$y = kx, \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$$

nazivamo *homogena linearna funkcija ili funkcija direktne proporcionalnosti*. Broj k zove se *koficijent proporcionalnosti*.

Graf funkcije direktne proporcionalnosti u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava. Ovisno o vrijednosti parametra k razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. Ako je $k > 0$, pravac $y = kx$ prolazi kroz prvi i treći kvadrant i s pozitivnim smjerom osi x zatvara šiljasti kut. U tom slučaju funkcija je rastuća (slika 1a).
2. Ako je $k < 0$, pravac $y = kx$ prolazi kroz drugi i četvrti kvadrant i s pozitivnim smjerom osi x zatvara tupi kut. U tom slučaju funkcija je padajuća (slika 1b).



Slika 1. Graf funkcije direktne proporcionalnosti

Definicija 1.2. Funkciju definiranu na \mathbb{R} s

$$y = \frac{k}{x}, \quad (x \neq 0, k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$$

nazivamo *funkcijom obrnute proporcionalnosti*. Broj k zove se *koficijent obrnute proporcionalnosti*.

Graf funkcije obrnute proporcionalnosti je hiperbola. Ovisno o vrijednosti parametra k razlikujemo sljedeće slučajeve:

- Ako je $k > 0$, graf funkcije $y = \frac{k}{x}$ čine dvije grane hiperbole koje se nalaze u prvom i trećem kvadrantu. U tom slučaju funkcija je padajuća (slika 2a).
- Ako je $k < 0$, graf funkcije $y = \frac{k}{x}$ čine dvije grane hiperbole koje se nalaze u drugom i četvrtom kvadrantu. U tom slučaju funkcija je rastuća (slika 2b).



Slika 2. Graf funkcije obrnute proporcionalnosti

Funkcija $y = \frac{k}{x}$ nema nultočke. Grane hiperbole u oba slučaja ($k > 0$ i $k < 0$) neograničeno se približavaju koordinatnim osima, ali ih nigdje ne sijeku. Pravac kojemu se krivulja približava naziva se asimptota, pa su u ovom slučaju os x horizontalna, a os y vertikalna asimptota.

2 Primjena funkcije direktne proporcionalnosti

2.1 Primjena u svakodnevnom životu

Funkcija direktne proporcionalnosti ima široku primjenu u svakodnevnom životu. U nastavku je prikazano nekoliko primjera njezine primjene.

Primjer 2.1.

- Koliko košta 5 kg šećera ako je cijena jednog kilograma 2.2 KM? Kolika je cijena 200 g šećera?

- b) Za jednu čokoladnu tortu potrebno je 200 g čokolade. Koliko grama čokolade je potrebno za 3 torte?
- c) Dužina ukrasne vrpce iznosi 238.5 cm. Koliko je metara duga vrpca? Kolika je dužina vrpce u milimetrima?
- d) Pretvorite 70 američkih dolara u eure.

- Rješenje. a) Ako x označava količinu šećera u kilogramima, a y cijenu, tada je $y = 2.2x$. Pomoću ove funkcije možemo izračunati cijenu za bilo koju količinu šećera, pa je cijena 5 kg jednaka $y = 2.2 \cdot 5 = 11$ KM, a cijena za 200 g = $\frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0.2$ kg je $y = 2.2 \cdot 0.2 = 0.44$ KM.
- b) Ako x označava broj torti, a y količinu čokolade u gramima, dobivamo $y = 200x$. Za $x = 3$ torte potrebno je $y = 200 \cdot 3 = 600$ g čokolade.
- c) Označimo s x dužinu vrpce u centimetrima, a s y dužinu u metrima. Kako je $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, odnosno $1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$, imamo da je $y = 0.01x$. Za dužinu $x = 238.5 \text{ cm}$ je $y = 0.01 \cdot 238.5 = 2.385 \text{ m}$. Analogno, kako je $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$, slijedi da je dužina vrpce u milimetrima $y = 10x$. Za $x = 238.5 \text{ cm}$ je $y = 10 \cdot 238.5 = 2385 \text{ mm}$.
- d) Označimo s x iznos novca u dolarima (USD), a s y iznos u eurima (EUR). Kako je $1 \text{ USD} = 0.85 \text{ EUR}^1$, slijedi da je $y = 0.85x$, pa za $x = 70 \text{ USD}$ imamo $y = 0.85 \cdot 70 = 59.5 \text{ EUR}$. ◀

2.2 Primjena u ekonomiji

Funkcija prihoda

Ukupni prihod predstavlja umnožak količine određene robe x prodane na tržištu u određenom razdoblju i cijene p po kojoj je ta roba prodana, tj. $P = x \cdot p$, odnosno

$$P = p \cdot x.$$

Ako je cijena konstantna, onda funkcija prihoda predstavlja funkciju direktne proporcionalnosti, tj. prihod je direktno proporcionalan količini prodane robe.

Primjer 2.2. Ako cijena jednog proizvoda iznosi 3.5 EUR:

- a) Koliki će prihod biti ako se proda 200 proizvoda?

¹tečaj na dan 1. 1. 2026.

b) *Koliko proizvoda treba prodati da bi prihod bio 2100 EUR?*

Rješenje. a) Zadana je cijena $p = 3.5$ EUR i količina robe $x = 200$, pa je ukupni prihod $P = p \cdot x = 3.5 \cdot 200 = 700$ EUR.

b) Treba odrediti količinu robe x . Imamo $x = \frac{P}{p} = \frac{2100}{3.5} = 600$ proizvoda. ◀

Jednostavni kamatni račun

Kamate predstavljaju naknadu koju banka isplaćuje štediši za njegov uloženi novac ili koju korisnik kredita plaća banci za posuđeni novac. Kamatna stopa je omjer godišnjeg iznosa kamata i glavnice, izražen u postotcima. Iznos kamata ovisi o glavnici, kamatnoj stopi i trajanju štednje ili kredita. U jednostavnom kamatnom računu iznos kamata (k) dobivamo tako da pomnožimo glavnicu (g), kamatnu stopu (s) i vrijeme (v) koje je izraženo u godinama. Dakle,

$$k = g \cdot s \cdot v.$$

Kamata i glavnica iskazuju se u novčanim jedinicama, kamatna stopa u postotcima, a vrijeme u godinama.

Primjer 2.3. *Ines je uložila 2000 EUR na štednju u banci. Koliki iznos ima na štednoj knjižici nakon pet godina, uz kamatnu stopu od 2,5% godišnje, kada se kamata obračunava prema jednostavnom kamatnom računu?*

Rješenje. Kako je glavnica $g = 2000$ EUR, kamatna stopa $s = 2.5\% = 0.025$ i vrijeme $v = 5$ godina, kamata je:

$$k = g \cdot s \cdot v = 2000 \cdot 0.025 \cdot 5 = 250 \text{ EUR.}$$

Ukupni iznos na štednoj knjižici, uključujući glavnicu i kamatu, bit će:

$$Ukupno = g + k = 2000 + 250 = 2250 \text{ EUR.}$$

Dakle, nakon 5 godina Ines će imati 2250 EUR na štednoj knjižici. ◀

2.3 Primjena u prirodnim znanostima

Primjena u fizici

- 1) Kod jednolikog pravocrtnog gibanja, koje je opisano jednadžbom $s = v \cdot t$, prijeđeni put s koji prijeđe tijelo koje se kreće konstantnom brzinom v direktno je proporcionalan vremenu t za koje tijelo prijeđe taj put. Konstanta proporcionalnosti je brzina v .

Primjer 2.4. Jedan od najbržih vlakova na svijetu, japanski vlak Shinkansen, dostiže brzinu od 320 km/h. Ako se vlak kreće jednoliko pravocrtno:

- Koliki put će prijeći za 2 h?
- Za koje vrijeme će prijeći put od 1600 km?

Rješenje. a) Kako je $v = 320$ km/h i $t = 2$ h, slijedi da je $s = 320 \cdot 2 = 640$ km. Dakle, za 2 sata vlak će prijeći put od 640 km.

- Iz formule $s = v \cdot t$, slijedi da je $t = \frac{s}{v}$. Kako je $v = 320$ km/h i $s = 1600$ km, slijedi da je $t = \frac{1600}{320} = 5$ h. Dakle za 5 sati vlak će prijeći put od 1600 km. ◀

- Masa tijela direktno je proporcionalna njegovu volumenu, tj. $m = \rho \cdot V$. Konstanta proporcionalnosti je gustoća tijela ρ .

Primjer 2.5. Kolika je masa 1000 cm³ bakra, a kolika 1000 cm³ aluminijska?

Rješenje. Gustoća bakra je $\rho \approx 8.96$ g/cm³, pa je $m = 8.96 \cdot V$. Kako je $V = 1000$ cm³, to je $m = 8.96 \cdot 1000 = 8960$ g = 8.96 kg. Gustoća aluminijska je $\rho \approx 2.7$ g/cm³, pa je $m = 2.7 \cdot V$. Kako je $V = 1000$ cm³, to je $m = 2.7 \cdot 1000 = 2700$ g = 2.7 kg. ◀

- Drugi Newtonov zakon: Ubrzanje tijela proporcionalno je intenzitetu sile koja na njega djeluje, tj. $a = \frac{F}{m}$. Konstanta proporcionalnosti je $\frac{1}{m}$.

Primjer 2.6. Koliko će biti ubrzanje teniske loptice mase 0.057 kg koja je udarena silom od 20 N?

Rješenje. Masa loptice je $m = 0.057$ kg, a sila $F = 20$ N, pa je $a = \frac{20}{0.057} = 350.9$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. ◀

- Sila trenja direktno je proporcionalna normalnoj sili (reakciji podloge), tj.

$$F_{tr} = \mu \cdot N,$$

gdje je μ koeficijent trenja. Ako je podloga horizontalna, tada je sila trenja proporcionalna težini tijela, tj. $F_{tr} = \mu \cdot G$.

Primjer 2.7. Na horizontalnoj podlozi nalazi se kutija mase $m = 5$ kg. Kolika je sila trenja koja djeluje na kutiju ako je koeficijent trenja između kutije i podloge $\mu = 0.3$?

Rješenje. Budući da je podloga horizontalna, vrijedi $F_{tr} = \mu \cdot G$. Izračunajmo težinu kutije. Vrijedi $G = m \cdot g$, gdje je $m = 5$ kg masa kutije, a $g = 9.81$ m/s² ubrzanje sile teže. Dakle, $G = 5 \cdot 9.81 = 49.05$ N, pa je sila trenja $F_{tr} = \mu \cdot G = 0.3 \cdot 49.05 = 14.715$ N. ◀

- 5) Arhimedov princip: Težina tekućine koju objekt istisne direktno je proporcionalna volumenu istisnute tekućine. Jednostavno rečeno, princip tvrdi da je sila uzgona na objekt jednaka težini tekućine koju je objekt istisnuo. Težina tekućine koju je tijelo istisnulo jednaka je: $Q = m \cdot g$, a kako je $m = \rho \cdot V$, onda je $Q = \rho \cdot V \cdot g = F_p$. Dakle, formula za silu uzgona je

$$F_p = \rho \cdot V \cdot g,$$

gdje je ρ gustoća tekućine, V volumen tijela (potopljeni dio tijela) i g ubrzanje Zemljine sile teže. Ovisno o tome koliko tijelo uronjeno u vodu teži u odnosu na težinu istisnute tekućine, tijelo može ploviti na vodi, potonuti ili ostati uronjeno.

Primjer 2.8. *Izračunajte silu uzgona na tijelo volumena 0.4 m³ potpuno uronjeno u vodu.*

Rješenje. Kako je $V = 0.4$ m³, gustoća vode $\rho = 1000$ kg/m³ i $g = 9.81$ m/s², slijedi da je $F_p = \rho \cdot V \cdot g = 1000 \cdot 0.4 \cdot 9.81 = 3924$ N. ◀

Primjena u kemiji

1. Masa i broj molova: Broj molova tvari (n) direktno je proporcionalan masi tvari (m). Vrijedi

$$n = \frac{m}{M}$$

gdje je M molarna masa tvari (u g/mol) - konstanta. Također, možemo reći i da je masa tvari direktno proporcionalna broju molova tvari. tj. $m = n \cdot M$.

Primjer 2.9. a) *Koliko molova ima 36 grama vode? Molarna masa vode je 18 g/mol.*

b) *Koliko grama magnezija ima u 3 mola magnezija? Molarna masa magnezija je $M = 24.31$ g/mol.*

Rješenje. a) Kako je $m = 36$ g i $M = 18$ g/mol, broj molova je $n = m/M = 36/18 = 2$ mol. Dakle, u 36 g vode je točno 2 mola. Kada bismo imali, na primjer 72 g vode, broj molova bio bi 4.

b) Poznato je $n = 3$ mol i $M = 24.21$ g/mol, pa je $m = n \cdot M = 3 \cdot 24.31 = 72.63$ g. ◀

2. Broj jedinki (atoma, molekula, iona) u tvari možemo izračunati pomoću Avogadrove konstante i količine tvari (u molovima). Formula je

$$N = n \cdot N_A,$$

gdje je N broj jedinki, n je broj molova tvari, N_A je Avogadrova konstanta ($6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Dakle, brojnost čestica (N) i množina tvari (n) su direktno proporcionalne, a proporcionalnost je definirana Avogadrovom konstantom.

Primjer 2.10. *Koliko molekula vode sadrži 2 mola vode?*

Rješenje. Količina tvari je $n = 2$ mol, te kako je Avogadrova konstanta $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, slijedi da je $N = n \cdot N_A = 2 \cdot 6.022 \cdot 10^{23} = 1.2044 \cdot 10^{24}$ molekula. Primijetimo da bi, na primjer 4 mola vode sadržavala dva puta više molekula jer je u tom slučaju $N = 4 \cdot 6.022 \cdot 10^{23} = 2.4088 \cdot 10^{24}$ molekula. ◀

3. Charlesov zakon: Volumen plina V i temperatura T su direktno proporcionalni pri konstantnom tlaku. To znači da ako temperatura plina (izražena u Kelvinima) raste, volumen plina će se proporcionalno povećati, i obrnuto, ako temperatura padne, volumen će se smanjiti. Matematički oblik Charlesovog zakona:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

gdje je V_1 volumen plina na početnoj i V_2 na konačnoj temperaturi, T_1 i T_2 početna i konačna temperatura (u Kelvinima).

Primjer 2.11. *Početni volumen plina iznosi 150 cm^3 pri temperaturi od $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Ako se temperatura poveća na $80 \text{ }^\circ\text{C}$, koliki će biti novi volumen plina, pod pretpostavkom da je tlak konstantan?*

Rješenje. Prema Charlesovom zakonu je $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, odakle je $V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1}$. Kako je $V_1 = 150 \text{ cm}^3$, $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 20 + 273.15 = 293.15$ K i $T_2 = 80 \text{ }^\circ\text{C} = 80 + 273.15 = 353.15$ K, slijedi da je novi volumen plina $V_2 = \frac{150 \cdot 353.15}{293.15} = 180.7 \text{ cm}^3$. ◀

3 Primjena funkcije obrnute proporcionalnosti

U nastavku je navedeno nekoliko primjera primjene obrnute proporcionalnosti u svakodnevnom životu i prirodnim znanostima.

3.1 Primjena u svakodnevnom životu

Raspodjela resursa (hrana, novac, vrijeme, ...) jedan je od ključnih primjera obrnute proporcionalnosti u svakodnevnom životu. U ovom kontekstu, obrnuta proporcionalnost znači da kako se broj ljudi koji koriste određeni resurs povećava, količina resursa koja je dostupna svakom pojedincu se smanjuje.

Primjer 3.1. (*Dijeljenje hrane*) *Pretpostavimo da imamo 3 čokolade koje trebamo podijeliti na*

a) 6 osoba,

b) 9 osoba.

Koliko čokolade će dobiti svaka osoba?

Rješenje. Ako x označava broj osoba, a y količinu čokolade koju će dobiti svaka osoba, tada je $y = \frac{3}{x}$. U tom slučaju imamo:

a) $y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tj. svaka osoba će dobiti $\frac{1}{2}$ čokolade;

b) $y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, tj. svaka osoba će dobiti $\frac{1}{3}$ čokolade. ◀

Vrijeme potrebno za izvršavanje nekog zadatka i broj ljudi ili resursa uključenih u taj zadatak su obrnuto proporcionalne veličine.

Primjer 3.2. (*Radnici i vrijeme*) *Pet radnika okopa vinograd za 16 sati. Za koliko sati taj isti vinograd okopa 8 radnika?*

Rješenje. Ako 5 radnika okopa vinograd za 16 sati, to znači da je ukupno vrijeme rada za 5 radnika $5 \cdot 16 = 80$ radnih sati. Ukupna količina posla (u radnim satima) ostaje konstantna i to je konstanta proporcionalnosti. Ako t označava vrijeme, a n broj radnika vrijedi $t = \frac{80}{n}$ što znači da će 8 radnika posao završiti za $t = \frac{80}{8} = 10$ sati. ◀

Primjer 3.3. (*Broj cijevi i vrijeme punjenja*) *Ako 4 cijevi napune bazen za 3 sata, za koliko će sati bazen napuniti 8 cijevi?*

Rješenje. Ako 4 cijevi napune bazen za 3 sata, vrijeme potrebno za punjenje bazena iznosi $4 \cdot 3 = 12$ sati. Ako s t označimo vrijeme, a n broj cijevi, vrijedi $t = \frac{12}{n}$ što znači da će 8 cijevi bazen napuniti za $t = \frac{12}{8} = 1.5$ sati, odnosno za 1 sat i 30 minuta. ◀

3.2 Primjena u prirodnim znanostima (fizika i kemija)

1. Brzina i vrijeme: Kod jednolikog pravocrnog gibanja brzina i vrijeme daju dobar primjer obrnuto proporcionalnih veličina u slučaju kada je prijeđeni put konstanta.

Primjer 3.4. Grad A udaljen je 50 km od grada B.

- a) Ako se automobil kreće brzinom od 40 km/h, koliko će trajati putovanje od A do B?
- b) Ako je putovanje trajalo 30 min, kojom se brzinom kretao automobil?

Rješenje. Znamo da je prijeđeni put $s = v \cdot t$. Kako je $s = 50$ km, slijedi da je $v \cdot t = 50$.

- a) Kako je $v = 40$ km/h, slijedi da je $t = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} = 1.25$ h, što je 1 sat i 15 min.
- b) Ovdje je poznato vrijeme $t = 30$ min $= \frac{30}{60} = 0.5$ h pa je $v = \frac{50}{0.5} = 100$ km/h. ◀

2. Drugi Newtonov zakon: Ako je sila konstantna, ubrzanje je obrnuto proporcionalno masi tijela. To znači da kako masa tijela raste, ubrzanje opada, i obratno, kako masa opada, ubrzanje raste.

Primjer 3.5. *Pretpostavimo da imamo automobil mase 1000 kg i bicikl mase 20 kg. Na oba objekta primjenjujemo istu silu od 200 N. Izračunajte ubrzanja automobila i bicikla.*

Rješenje. Prema Newtonovom zakonu, $a = \frac{F}{m}$, ubrzanje automobila je $a_{\text{automobila}} = \frac{200}{1000} = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a ubrzanje bicikla je $a_{\text{bicikla}} = \frac{200}{20} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Kao što se vidi, oba objekta (automobil i bicikl) pod istom silom od 200 N imaju različita ubrzanja. Bicikl (manje mase) ima znatno veće ubrzanje od automobila (veće mase). ◀

3. Boyleov zakon (poznat i kao Boyle-Mariotteov zakon): Volumen plina pri stalnoj temperaturi obrnuto je proporcionalan tlaku, tj. $P \cdot V = k$ (k - konstanta proporcionalnosti) ili

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2,$$

gdje su P_1 i V_1 početni tlak i volumen, P_2 i V_2 tlak i volumen plina nakon promjene.

Primjer 3.6. *Neki plin se tlači s tlaka 1 bar na tlak od 3 bara, a početni volumen tog plina bio je 1 m^3 . Koliki je volumen tog plina nakon procesa tlačenja?*

Rješenje. Kako je $P_1 = 1 \text{ bar}$, $V_1 = 1 \text{ m}^3$, $P_2 = 3 \text{ bar}$ prema Boyleovom zakonu, vrijedi $1 \cdot 1 = 3 \cdot V_2$, odakle slijedi da je $V_2 = 1/3 \approx 0.33 \text{ m}^3$. Dakle, tlak plina se povećao s 1 bar na 3 bar, dok se volumen plina smanjio s 1 m^3 na približno 0.33 m^3 , uz konstantnu temperaturu. Ovo pokazuje kako povećanje tlaka rezultira smanjenjem volumena plina prema Boyleovom zakonu. ◀

Literatura

- [1] Australian Mathematical Sciences Institute (AMSI), *The Improving Mathematics Education in Schools (TIMES) Project Proportion*, 2011, https://amsi.org.au/teacher_modules/pdfs/Proportion.pdf
- [2] A. Hodžić, *Matematika: za I razred srednje učiteljske i tehničke škole*, Sarajevo, 1997.
- [3] M. Kerenović, E. Bajramović, *Fizika I*, Viša tehnička škola, Bihać, 1990.
- [4] M. Nurkanović, O. Kurtanović, *Matematika za ekonomiste*, Tuzla, 2013.
- [5] Jednostavni kamatni račun, https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/641300/html/4457_Jednostavni_kamatni_racun.html
- [6] Plinski zakoni, https://www.chem.pmf.hr/_download/repository/01_Plinski_zakoni.pdf