

Stručni rad

# **KNJIŽEVNA DJELA U NASTAVI MATEMATIKE**

Ivan Budimir

Sveučilište u Zagrebu Grafički fakultet

## Sažetak

Iako se na prvi pogled čine strogo odvojenim svjetovima, matematika i književnost imaju mnogo toga zajedničkog. Književna mašta je mnogo puta potaknula matematičare na dublje istraživanje u brojnim matematičkim disciplinama. S druge strane postoji mnogo književnih dijela koja tematiziraju matematiku, u kojima se sama matematika razotkriva na drugačiji način koji je često puta povezan s emocijama kao metaforama unutrašnjih proživljavanja ili s filozofskim raspravama koje vode glavni likovi. Matematički pojmovi unutar književnosti nikada nisu prikazani kao strogo formalni i suhoparni. Oni se oživljavaju u književnim djelima i tako postaju emotivni znakovi koji izražavaju osjećaje ljepote i reda, ili s druge strane mogu biti simboli prijete i kaosa koji uzrokuju egzistencijalnu tjeskobu čovjeka. Tako matematika u književnosti zadobiva novu dimenziju, što može biti vrlo poticajno svima onima koji se na bilo koji način i na bilo kojoj razini obrazovanja bave matematikom.

**Ključne riječi:** matematika, umjetnost, literatura

## 1.UVOD

Nastava matematike na svim razinama, od osnovne i srednje škole do fakulteta, može imati puno koristi od književnosti koja tematizira matematiku. Klasična predavanja je dobro osvježiti čitanjem kratkih književnih ulomaka. Učenike i studente se može motivirati da čitaju književna djela, pišu eseje ili seminare na temu određenog djela u kojem se matematika pojavljuje u književnosti. Tako nastavni proces u kojem se književnost povezuje s matematikom može biti most prema apstraktnim matematičkim sadržajima.

Cilj ovog kratkog osvrtu je pokazati kako se neka književna djela mogu koristiti na nastavi matematike. Lekcije iz matematike koje se javljaju na svim razinama obrazovanja, od osnovne škole do fakulteta, poput poglavlja o Euklidskoj i ne-Euklidskoj geometriji, matematičkoj i klasičnoj logici, vjerojatnosti i statistici, teoriji igara, matričnom računu, limesima nizova i funkcija, integrala i td. se mogu potkrijepiti primjerima iz književnosti.

Matematika je apstraktna i općenita znanost i kao takva ponekad može djelovati hladno i suhoparno. Onima koji pohađaju matematička predavanja gradivo često puta može postati teško i dosadno, posebno ako se predaje bez primjera iz realnog konteksta. To može stvoriti uvjerenje učenika i studenata kako nisu dovoljno dobri u matematici, pa čak i izazivati frustracije. Pristup nastavi u kojem se naglašava kako je matematika prisutna u svijetu koji nas okružuje, počevši od prirode, sporta, igara, glazbe, financija, umjetnosti i književnosti vrlo pozitivno utječe na percepciju matematike.

U idućem poglavlju je protumačeno mišljenje koje Albert Einstein ima o matematici i poeziji. Izabrano je nekoliko književnih djela u kojima se mogu pronaći matematički odjelci i jedna matematička pjesma, te je na tim primjerima analizirano na koji način se književnost može koristiti u nastavi matematike.

## 2.MATEMATIKA U IZABRANIM KNJIŽEVNIM DJELIMA

Albert Einstein je dobro shvaćao da [1]

*„postoji veza između umjetnika, istraživača i mislioca koji nisu poput većine ljudi usmjereni prema svjetovnim dobrima“.*

Najljepša i najuzbudljivija iskustva su, misli Einstein [1],

*„uvijek povezana s razvojem vlastitih osjećaja, mišljenja i djelovanja.“*

Ovi citati se mogu pronaći *Posmrtnom osvrtu na Emmy Noether* koji je Einstein napisao u maju davne 1935. godine i objavio u *NY Timesu* u povodu smrti ove velike njemačke matematičarke. Razmišljajući o matematičkim radovima u polju algebre

Emmy Noether, Einstein je toliko zadivljen razinom kreativnosti i elegancije koja se nalazi u strukturi teorijske matematike da je uspoređuje s poezijom. Čuveni su njegovi redci [1]:

*„Čista teorijska matematika je, na svoj način, poezija logičkih ideja. Ona je u potrazi za najopćenitijom idejom operacija koje će u jednostavnom, logičnom i jedinstvenom obliku ujediniti najveći mogući krug formalnih odnosa. U toj potrazi za logičkom ljepotom otkrivaju se duhovne formule, koje su bitne za dublje razumijevanje zakona prirode.“*

Za Einsteina je samorazumljiva veza između matematike i poezije koja izvire iz logičke savršenosti apstraktnih algebarskih obrazaca koji se mogu primijeniti na mnoštvo raznovrsnih matematičkih objekata. Poput poezije i matematika su svaka na svoj način usmjerene prema istom cilju, a to je duboko razumijevanje prirode. Ovaj kratki Einsteinov tekst bi trebao pročitati svaki učenik koji voli matematiku i svaki student matematike, kako bi intuitivno shvatio smisao i ljepotu koja se može pronaći u teorijskoj matematici.

Za argentinskog književnika Jorgea Luisa Borgesa kojega mnogi s punim pravom smatraju jednim od najvažnijih pisaca 20. stoljeća matematika ima iznimnu važnost. Jedna od njegovih omiljenih matematičkih tema je beskonačnost. Svatko tko je pročitao fantastičnu priču *Babilonska knjižnica* osjetio je fasciniranost beskonačnošću Knjižnice-Univerzuma koji je daleko veći od ljudske skromne mogućnosti shvaćanja [2]. Našavši se u Knjižnici koja se sastoji od gotovo beskonačnog broja šesterokutnih galerija, u kojoj se nalaze knjige koje sadrže sve moguće istine i sve moguće laži, čovjek se osjeća nemoćno i izgubljeno. Čitatelja na prvi pogled zbunjuje savršena pravilnost knjižnice, polica i knjiga [2]:

*„Svaki zid svakog šesterokuta ima pet polica; na svakoj su polici trideset i dvije knjige jednakog formata; svaka knjiga ima četiri stotine i deset stranica; svaka stranica ima četrdesetak redaka; svaki redak oko osamdeset crnih slova.“*

Borges uvodi čitatelja u fascinantni svijet kombinatorike tako što opisuje strukturu svake knjige. Naime, „*veliki mislilac*“ koji je živio u toj knjižnici je otkrio da se svaka knjiga sastoji od točno dvadeset i dva slova, razmaka, točkaka i zareza. Kako svaka knjiga ima četiri stotine i deset stranica te je napisana s konačno mnogo znakova radi se o varijacijama s ponavljanjima [2]:

*„Odgonetnut je i sadržaj: pojmovi kombinatorne analize, potkrijepljeni primjerima varijacija s neograničenim ponavljanjem.“*

Pisac je stvorio svijet koji fascinira milijardama i milijardama mogućnosti, njih gotovo beskonačno mnogo, koje se dobiju pomoću varijacija s ponavljanjem nad dvadeset i dva slova s razmacima, točkama i zarezima. Sve knjige koje je moguće zamisliti se nalaze u ovoj knjižnici. Međutim, problem je što tako ogroman, gotovo neograničeni broj mogućnosti različitih varijacija dovodi do apsurdne situacije da je gotovo

nemoguće pronaći dvije jednake knjige. Još i više, nije moguće pronaći niti jednu jedinu knjigu koja ima ikakvog smisla jer su takve toliko rijetke da je vjerojatnost njihovog pronalaženje jednaka nuli. Zato su ljudi osuđeni na vječno čitanje apsurdnih besmislenih knjiga, ne bi li slučajno naišli na bilo kakav sadržaj koji ima barem neko značenje. Čak ni uništavanje knjiga koje su poduzeli „*fanatici*“ nema nikakvog smisla, jer je [2]

*„knjižnica tako golema da je bilo kakav gubitak prouzročen ljudskom rukom zapravo infinitezimalan.“*

Čovjek je jednostavno premalen da bi shvatio strukturu i smisao beskonačne biblioteke tako da su svi njegovi napori su osuđeni na propast. Ova situacija kod čitatelja izaziva strah, zbunjenost i nelagodu. Iako je ljudska potraga za istinom osuđena na propast, beskonačno je ujedno utješno zbog mogućnosti postojanja reda koji se sigurno mora pojaviti zbog sigurnog ponavljanja knjige sa istom pričom. Priča završava na ovaj način [2]:

*Usudim se nagovijestiti ovakvo rješenje vjekdašnjeg pitanja: Knjižnica je neograničena i periodička. Kad bi vječni putnik pošao u bilo kojem smjeru, utvrdio bi, nakon mnogo stoljeća, da se isti svesci ponavljaju u istom neredu (koji bi ponavljen, bio Red). Ta ljupka nada blaži mi samoću.*

Zanimljivo je spomenuti da je William Goldbloom Bloch, profesor matematike na Wheaton Colledge-u u Massachusettsu, napisao knjigu *Nezamisliva matematika Borgesove Babilonske knjižnice* [3]. Bloch je izračunao da je broj knjiga u Borgesovoj knjižnici jednak  $25^{1312000}$  što je nezamislivo velik broj, koji je veći od bilo čega stvarnog u svemiru. Kako se radi o varijacijama s ponavljanjem 25 dopuštenih znakova, ispisanih na 450 stranica koje imaju 40 redaka i 80 znakova po retku broj različitih knjiga mora biti jednak  $25^{410 \cdot 40 \cdot 80} = 25^{1312000}$ . Bloch je analizirao i geometriju Babilonske knjižnice kao i vjerojatnost da se pronađe knjiga koja bi imala smisla, koja praktički iznosi nula. Na internetskom stranicama *libraryofbabel* [4] je moguće pronaći digitalnu realizaciju Babilnoske knjižnice.



**Slika 1.** Prva stranica nasumično izabrane knjige [4]

Borgesovo djelo je izuzetno poticajno za sve koji se bave matematikom, posebno teorijom skupova, kombinatorikom i logikom kao i problemima beskonačnosti, limesa i diferencijalnog računa. Ova kratka Borgesova matematičko-filozofska fikcija se može preporučiti svim učenicima i studentima koji uče lekcije koje su posvećene prethodnim temama i to iz mnogo razloga. Prije svega zbog vrlo jakog dojma koji ova kratka i čudna priča stvara na čitatelja, te književnih i filozofskih ideja koji je povezuju s matematikom.

Pilot koji je prevezio poštu na rutama iznad Sahare i Južne Amerike, vojni pilot Francuske vojske za vrijeme drugog svjetskog rata na opasnim izviđačkim zadacima, inženjer koji je prijavljivao nove patente i briljantni pisac Aitoine de Saint Exupery u svom najvažnijem djelu *Mali princ* tematizira matematiku [5]. Matematika se u Malom princu koristi kao metafora za otuđenog, hladnog i proračunatog čovjeka. Na primjer, njegov poslovni čovjek koji živi na maloj planeti neprestano broji zvijezde za koje misli da ih posjeduje, ali istovremeno potpuno zanemaruje bitne stvari u životu (Slika 2.). Exupery u dijalogu Malog princa i poslovnog čovjeka ističe besmislenost materijalističke želje za posjedovanjem. Pisac naglašava besmisleno gomilanje koristeći se brojevima kao simbolima pretjerane racionalizacije i čiste mjerljivosti. Poslovnom čovjeku nedostaje mašte i sposobnosti da uočava bitne stvari u životu, što je lijepo opisano u ovom dijalogu [5]:

*„Poslovni čovjek: Tri i dva su pet. Pet i sedam su dvanaest. Dvanaest i tri su petnaest. Dobar dan. Petnaest i sedam su dvadeset i dva. Dvadeset i dva i šest su dvadeset i osam. Nemam vremena da je ponovo zapalim. Dvadeset i šest i pet su trideset i jedan. Uh! Znači to čini pet stotina i jedan milion šest stotina dvadeset dvije tisuće sedam stotina trideset i jedan.*

*Mali princ: Pet stotina miliona čega?*

*Poslovni čovjek: Ha? Još si tu? Pet stotina miliona ne znam više čega... Toliko imam posla! Ja sam ozbiljan, ne bavim se glupostima.“*



**Slika 2.** Aitoine de Saint Exupery: Piščeva ilustracija poslovnog čovjeka [5]

U ovoj modernoj bajci Exupery ukazuje na jednu važnu činjenicu, a to je da suhoparna matematika bez primjera iz stvarnog života može rezultirati gubitkom smisla i radosti. Ova ideja se može primijeniti na učenje matematike. Naime, učenje matematike kroz pretjeranu usmjerenost na formule, metode računanja i gola pravila može kod onoga koji se bavi matematikom ubiti kreativnost, maštu i radoznalost. Pritom učenik ili student matematike može u nekim slučajevima imati i visoke ocijene, a da se one temelje samo na vještom korištenju formula, a ne na stvarnom razumijevanju matematičkih ideja i koncepata. Mali princ se može navesti kao tema za analizu na nastavi matematike kako bi se kritizirao pogrešni računalski mentalitet u nastavi matematike koji može čak i uništiti volju za učenjem matematike.

Osim u prozi, matematika se mnogo puta u raznim varijantama pojavljivala i u poeziji. Vrlo zanimljiva pjesma Micaela L. Johnsona *M.C. Escher Circle Limit III* [6,7] dana je u nastavku.

### ***M.C. Escher's Circle Limit III***

*Michael L. Johnson*

*This tessellated hyperbolic plane*

*is definitely non-Euclidean,*

*though inside, not on, its circumference  
points correspond. Outside is emptiness.*

*The fish swim back and forth but cannot sense  
how they progressively grow small or large  
by distance from the unreachable edge  
where hypercycles shrink to nothingness.*

*Thus miracled infinity is viewed,  
but only by a god of finitude.*

Pjesma je inspirirana grafikama poznatog nizozemskog slikara M.C. Eschera (Slika 3.) koji je na umjetnički način prikazao teselacije hiperboličkog prostora. U pjesmi je naglašen doživljaj ovog prostora neizmjerne matematičke ljepote nadilazi ljudsko razumijevanje. Johnson je na izuzetno dojmljiv način istaknuo estetsku dimenziju hiperboličkog prostora, kako je vidi sam Escher. Prostor nije prazna matematička apstrakcija, nego živi prostor pun ritma u kojem se nalaze ribe koje plivaju prema rubu kruga gdje se pretvaraju u ništavilo. Time je slikovito prikazana matematička ideja limesa niza. U prikazanom prostoru se isprepleću konačno i beskonačno. Ova pjesma može poslužiti kao izvrstan uvod u matematičke lekcije o hiperboličkim geometrijama, kao i u poglavlja o limesima nizova. Ne samo da povezuje matematiku i poeziju, nego i matematiku i likovnu umjetnost, što može biti izuzetna inspiracija i poticaj za matematiku učenicima umjetničkih i grafičkih škola ili na primjer studentima dizajna.



**Slika 3.** M. C. Escher Circle Limit III. [8]

### 3.ZAKLJUČAK

Matematika i književnost razvijaju maštu, potiču razmišljanje, kreativnost i razumijevanje struktura. Izabrana književna djela u nastavi matematike motiviraju učenike i studente na učenje matematike, bude emocije i daju novi dublji smisao matematičkim sadržajima. Može se primijetiti da su u književnosti česte rasprave među likovima. Glavni junaci književnih dijela iznose vlastite argumente, dokazuju svoje stavove, što može biti izvrstan put prema stjecanju vještine preciznog matematičkog mišljenja koje je važno kod dokazivanja teorema. Možda je najveća korist što učenici i studenti putem književnosti mogu otkriti da matematika nije izolirana disciplina.

Ukratko, korištenje književnosti u nastavi matematike može pridonijeti slijedećem:

- književnost povećava motivaciju za bavljenje matematikom;
- pomaže emocionalnom uključivanju u matematičke teme;
- potiče znatiželju i smanjuje strah od matematike;
- pomaže sagledavanju veze koju matematika ima s problemima iz realnog konteksta;
- potiče interdisciplinarno razmišljanje;

- spaja društveno, humanističko i prirodoslovno područje;
- osnažuje logičko zaključivanje i uočavanje struktura;
- jača sposobnost argumentacije što je važno kod dokaza teorema;
- poboljšava sposobnost razumijevanja i tumačenja matematičkih ideja;
- pokazuje da se matematika ne može svesti samo na račun.

Sve prethodno navedeno vodi prema zaključku da književnost razvija matematičke kompetencije, te omogućava maštovitije i kreativnije razmišljanje što matematiku čvršće povezuje sa stvarnim svijetom.

#### 4. POPIS LITERATURE

[1] Albert Einstein (1935). *Emmy Noether NY Times obituary*. Dostupno na [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Obituaries/Noether\\_Emma\\_Einstein/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Obituaries/Noether_Emma_Einstein/) [pristupljeno: 22.11.2025.]

[2] Jorge Luis Borges (1941). *Babilonska knjižnica*. Dostupno na [https://hr.izzi.digital/DOS/2517/datastore/10/publication/2517/files/2019/07/19/1563556263\\_jorge\\_luis\\_borges\\_babilonska\\_biblioteka.pdf?v=1603184161](https://hr.izzi.digital/DOS/2517/datastore/10/publication/2517/files/2019/07/19/1563556263_jorge_luis_borges_babilonska_biblioteka.pdf?v=1603184161) [pristupljeno: 25.11.2025.]

[3] Bloch, W. G. (2008). *The Unimaginable Mathematics of Borges' Library of Babel*. Oxford University Press.

[4] <https://libraryofbabel.info/> [pristupljeno: 25.11.2025.]

[5] Aitoine de Saint Exupery (1943). *Mali princ-s piščevim crtežima*. Prevela Sanja Lovrenčić. E-Lekture. Dostupno na [https://hrlektire.com/wp-content/uploads/2023/11/d\\_saint-exupery\\_mali-prince.pdf](https://hrlektire.com/wp-content/uploads/2023/11/d_saint-exupery_mali-prince.pdf) [pristupljeno: 17.11.2025.]

[6] M. Johnson, *Familiar Stranger*, Flowerpot Mountain Press, Lawrence KA, 1983.

[7] Sarah Glaz (2011) Poetry inspired by mathematics: a brief journey through history. *Journal of Mathematics and the Arts*. Vol. 5. No. 4. pp. 171-183. <https://doi.org/10.1080/17513472.2011.599019> [pristupljeno: 28.11.2025.]

[8] <https://mcescher.com/gallery/> [pristupljeno 30.11.2025.]