Pomorstvo, god. 13 (1999), str. 189-196

Mr. sc. **Željko Glavan**
Visoka pomorska škola u Rijeci

UDK: 517.9:519.85:531.01
Pregledni članak

MATEMATIČKI MODEL TORZIONIH OSCILACIJA OSOVINE

U članku je definiran matematički model torzionih oscilacija osovine na koju su pričvršćeni rotacijski diskovi i osovina, izrađeni od homogenog materijala, ne nužno istog. Model je konstruiran primjenjujući linearizirane Lagrangeove jednadžbe mehanike u generaliziranim koordinatama.

1. OSNOVNI POJMOVI LAGRANGEOVE MEHANIKE

Lagrangeove jednadžbe

Promatrajmo sustav od n materijalnih točaka. Neka je položaj sustava u svakom trenutku t jednoznačno određen sa s realnih veličina $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$. Minimalni broj veličina potrebnih za jednoznačno određenje položaja sustava materijalnih točaka u svakom trenutku t nazivamo brojem stupnjeva slobode tog sustava. Taj je broj uvijek manji ili jednak $3n$.

Drugim riječima, "položaj" sustava od n materijalnih točaka određen je vektorom $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_s)$ kao točkom u prostoru R^s. U tom slučaju prostor R^s nazivamo konfiguracijskim prostorom promatranog mehaničkog sustava, a veličine $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ generaliziranim koordinatama sustava u trenutku t. Vrijednosti generaliziranih koordinatta ovise o vremenskom trenutku i one se s vremenom mogu mijenjati.

Analogno se, kao i u "običnim" koordinatama, tako i u generaliziranim, definiraju ostali mehanički pojmovi. Generaliziranim brzinama u trenutku t_0 nazivamo veličine definirane formulom:

$$q_i(t_0) = \frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|_{t=t_0}, \; i = 1,2,3,\dots,s$$

a vektor $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_s)$ vektorom brzine.

Pri gibanju konzervativnog sustava materijalnih točaka (sustava u kojemu vrijedi zakon o sačuvanju energije), generalizirani vektor q kao funkcija vremena t zadovoljava sustav *Lagrangeovih jednadžbi mehanike* [1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.1}$$

gdje je L Lagrangeova funkcija koja je kod konzervativnih jednaka:

$$L = T - U \tag{1.2}$$

U gornjom formuli sa T je označena kinetička, a sa U potencijalna energija sustava.

Linearizacija

Mehanički sustav zovemo lineariziranim ako potencijalna i kinetička energija imaju oblik:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \ , \ a_{ij} = a_{ij}\ (0)\ , \ i \neq j \tag{1.3}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{1,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j \ , \ b_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} =\Big|_{q=0} \tag{1.4}$$

Praksa i teorija pokazale su da je linearizacija dovoljno dobra aproksimacija uz uvjet da su početne "smetnje", prouzrokovane vanjskim silama (silom težom, pomicanjem zbog naprezanja), koje otklanjaju sustav iz položaja ravnoteže, dovoljno male da možemo zanemariti nelinearne članove. To posebno dolazi do izražaja pri progibu ili zakretu izazvanima elastičnom silom, kada je elasticitet dovoljno "jak" da uvijek nastoji sustav vratiti u položaj ravnoteže [3].

Iz (1.3) i (1.4) vidljivo je da su T i U kvadratne forme s pozitivnim elementima. Izraze za potencijalnu i kinetičku energiju možemo zapisati u obliku:

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q} / \dot{q}) \tag{1.5}$$

$$U = \frac{1}{2}(Bq / q) \tag{1.6}$$

gdje je (x / y) skalarni produkt vektora x i y.

U tako napisanim izrazima A i B su matrice s konstantnim članovima. Uvrštavajući te izraze u Lagrangeove jednadžbe (1.1) dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje male oscilacije oko stabilnog položaja ravnoteže:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 + \ldots + a_{1n}\ddot{q}_n = -b_{11}q_1 - b_{12}q_2 - b_{13}q_3 - \ldots - b_{1n}q_n \\
&a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 + \ldots + a_{2n}\ddot{q}_n = -b_{21}q_1 - b_{22}q_2 - b_{23}q_3 - \ldots - b_{2n}q_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + a_{n3}\ddot{q}_3 + \ldots + a_{nn}\ddot{q}_n = -b_{n1}q_1 - b_{n2}q_2 - b_{n3}q_3 - \ldots - b_{nn}q_n
\end{aligned} \tag{1.7}$$

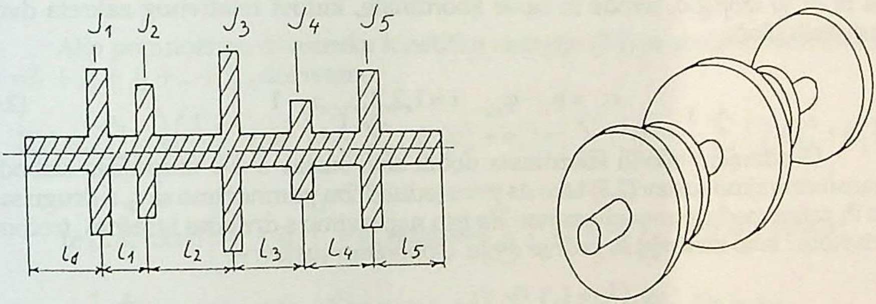
ili u matričnom zapisu:

$$A\ddot{q} = -Bq \tag{1.8}$$

2. PRIMJENA LAGRANGEOVIH JEDNADŽBI NA MODEL ELASTIČNE OSOVINE S *n* DISKOVA

Promatrajmo ravnu osovinu koja se može okretati oko svoje osi i na kojoj se nalaze učvršćeni diskovi (slika 1.)

Neka su ploče podvrgnute takvim naprezanjima da se zakreću oko osi osovine kao osi rotacije. Promatrat ćemo torzione oscilacije osovine.



Slika 1.

Označimo moment inercije diskova s $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$, a sa $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ koeficijente elastičnosti pojedinih dijelova osovine između susjednih diskova tako da je c_1 koeficijent za dio osovine između i-tog i $i+1$-og diska. Tako definiran sustav predstavlja mehanički sustav s n stupnjeva slobode. Koeficijenti $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ ovise o svojstvima materijala od kojih je osovina napravljena. Ako je osovina napravljena od homogenog materijala i $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l_{n-1}$, gdje su l_i udaljenosti između susjednih ploča, vrijedi $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_{n-1}$.

Umjesto tako opisane osovine, za potrebe matematičkog modela osovinu ćemo smatrati štapom kojemu je masa koncentrirana u konačnom broju točaka i to u onim točkama u kojima su pričvršćeni diskovi. Između tih točaka vrijedi jednadžba torzionih oscilacija štapa.

Položaj sustava u svakom ćemo trenutku odrediti kutom φ_i, za koje se disk zakrene pri naprezanjima. Kinetička energija tako definiranog sustava ima oblik:

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2 + \ldots + J_n\dot{\varphi}_n^2) \tag{2.1}$$

a potencijala:

$$U = \frac{1}{2}(c_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \ldots + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n)^2) \tag{2.2}$$

Ako se izrazi (2.1) i (2.2) uvrste u Lagrangeovu jednadžbu, dobiju se jednadžbe torzionih oscilacija osovine s n diskova:

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1 = -c_1(\varphi_1-\varphi_2)\\
&J_2\ddot{\varphi}_2 = c_1(\varphi_1-\varphi_2)-c_2(\varphi_2-\varphi_3)\\
&J_3\ddot{\varphi}_3 = c_2(\varphi_2-\varphi_3)-c_3(\varphi_3-\varphi_4)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&J_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} = c_{n-2}(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1})-c_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)\\
&J_n\ddot{\varphi}_n = c_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

U tako definiranim generaliziranim koordinatama rješenje sustava nije jedinstveno jer uključuje i običnu rotaciju osovine bez relativnog zakreta diskova. Da bi se to izbjeglo, uvode se nove koordinate, kutovi relativnog zakreta dviju susjednih ploča:

$$\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1} \quad i = 1,2,3,\ldots,n-1 \tag{2.4}$$

Uvođenjem takvih koordinata dobili smo sustav s n–1 stupnjeva slobode. Transformirajmo sustav (2.3) tako da prvu jednadžbu pomnožimo sa J_2, a drugu sa J_1 pa ih zatim međusobno oduzmimo. To isto napravimo s drugom i trećom, trećom i četvrtom i tako na kraju sa zadnje dvije. Dobivamo sustav:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}_1 = -\frac{c_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}\alpha_1 + \frac{c_2}{J_2}\alpha_2\\
&\ddot{\alpha}_2 = \frac{c_1}{J_1}\alpha_1 - \frac{c_2(J_2+J_3)}{J_2J_3}\alpha_2 + \frac{c_3}{J_3}\alpha_3\\
&\ddot{\alpha}_3 = \frac{c_2}{J_2}\alpha_2 - \frac{c_3(J_3+J_4)}{J_3J_4}\alpha_3 + \frac{c_4}{J_4}\alpha_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot{\alpha}_{n-2} = \frac{c_{n-3}}{J_{n-3}}\alpha_{n-3} - \frac{c_{n-2}(J_{n-2}+J_{n-1})}{J_{n-2}J_{n-1}}\alpha_{n-2} + \frac{c_{n-1}}{J_{n-1}}\alpha_{n-1}\\
&\ddot{\alpha}_{n-1} = \frac{c_{n-2}}{J_{n-2}}\alpha_{n-2} - \frac{c_{n-1}(J_{n-1}+J_n)}{J_{n-1}J_n}\alpha_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

U sljedećem koraku sustav (2.5) prevest ćemo na oblik $q = -K\ddot{q}$.

U koordinatama α_i potencijalna energija ima oblik:

$$U = \frac{1}{2}(c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + c_3\alpha_3^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1}^2)$$

Treba naći izraz za kinetičku energiju. Zbroje li se sve jednadžbe (2.3), dobije se:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + J_2\ddot{\varphi}_2 + J_3\ddot{\varphi}_3 + \ldots + J_n\ddot{\varphi}_n = 0 \tag{2.6}$$

odnosno:

$$J_1\dot{\varphi}_1 + J_2\dot{\varphi}_2 + J_3\dot{\varphi}_3 + \ldots + J_n\dot{\varphi}_n = const. \tag{2.7}$$

Zbroj u izrazu (2.7) zakretni je moment količine gibanja osovine u odnosu na os. Iz relacije (2.7) proizlazi da je taj zakretni moment konstantan, tj. da ne postoje vanjske sile koje ga mogu promijeniti.

Pretpostavimo da u početnom trenutku diskovi zauzimaju položaj $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n)$ i da osovina miruje. Tada desna strana formule (2.7) postaje jednaka nuli:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i\dot{\varphi}_i = 0 \tag{2.8}$$

Ako pomnožimo dvostruku kinetičku energiju (2.1) sa zbrojem momenata $A = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n$, dobivamo:

$$2TA = \left(\sum_{i=1}^{n} J_i\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i\dot{\varphi}_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} J_iJ_j(\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_j^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} J_i^2\dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} J_iJ_j(\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_j^2)\right)$$

Iz (2.8) izlazi $\left(\sum_{i=1}^{n} J_i\dot{\varphi}_i\right)^2 = 0$, odnosno $\sum_{i=1}^{n} J_i^2\dot{\varphi}_i^2 = -2\sum_{i<j} J_iJ_j\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j$. Tada je:

$$2TA = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} J_iJ_j(\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_j^2) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} J_iJ_j\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} J_iJ_j(\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_j^2 - 2\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} J_iJ_j(\dot{\varphi}_i^2 - \dot{\varphi}_j^2)^2$$

Prema definiciji je $\varphi_i - \varphi_{i+1} = \alpha_i$, pa je i $\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1} = \dot{\alpha}_i$, odnosno:

$$\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j = \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_{i+i} - \dot{\varphi}_{i+2} - \ldots - \dot{\varphi}_{j-1} + \dot{\varphi}_{j+1} + \dot{\varphi}_j = \alpha_1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$$

Ako to uvrstimo u izraz za $2TA$, dobiva se:

$$2TA = \sum_{i=1}^{n} J_i \sum_{j=i+1}^{n} J_j(\dot{\alpha}_i + \dot{\alpha}_{i+1} + \dot{\alpha}_{i+2} + \ldots + \dot{\alpha}_{j-1})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} J_iJ_j\sum_{k=1}^{j-1}(\alpha_k)^2$$

Razvrstajmo sada članove uz izraze $\dot{\alpha}_i^2$ i $\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$. Nakon jednostavnog računa izlazi:

$$2TA = \sum_{i=1}^{n-1}\dot{\alpha}_i^2\left(\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=i+1}^{n} J_jJ_k\right) + 2\sum_{i+1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j\left(\sum_{k=j+1}^{n} J_iJ_k\right)$$

odnosno:

$$2TA = \sum_{i=1}^{n-1}\dot{\alpha}_i^2\left(\sum_{j=1}^{i} J_j\right)\left(\sum_{j=i+1}^{n} J_j\right) + 2\sum_{i+1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j\left(\sum_{k=1}^{i} J_k \cdot \sum_{k=j+1}^{n} J_i\right) \tag{2.9}$$

Tako dobiveni izraz za kinetičku energiju kvadratna je forma po $\dot{\alpha}_i$ u koordinatama α_i. Uvrsti li se (2.9) i (2.6) u Lagrangeov sustav, dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi za torzione oscilacije osovine u generaliziranim koordinatama α_i:

$$c\alpha = \frac{1}{A} J\ddot{\alpha} \tag{2.10}$$

gdje su $c = (c_1, c_2, c_3, \ldots, C_{n-1})$ koeficijenti elastičnosti; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1})$; $\ddot{\alpha} = (\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_3, \ldots, \ddot{\alpha}_{n-1})$, a J je matrica kvadratne forme kinetičke energije čiji su elementi:

$$j_{ii} = \left(\sum_{j=1}^{i} J_i\right)\left(\sum_{j=i+1}^{n} J_j\right)$$

$$j_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{j} J_k \cdot \sum_{k=i+1}^{n} J_k\right), \; i \neq j, \; i < j$$

$$j_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{j} J_k \cdot \sum_{k=i+1}^{n} J_k\right), \; i \neq j, \; i > j$$

Na primjeru kada je $n = 5$, matrica J je jednaka:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(J_2+J_3+J_4+J_5) & J_1(J_3+J_4+J_5) & J_1(J_4+J_5) & J_1J_5 \\ J_1(J_3+J_4+J_5) & (J_1+J_2)(J_3+J_4+J_5) & (J_1+J_2)(J_4+J_5) & (J_1+J_2)J_5 \\ J_1(J_4+J_5) & (J_1+J_2)(J_4+J_5) & (J_4+J_5)(J_1+J_2+J_3) & J_5(J_1+J_2+J_3) \\ J_1J_5 & (J_1+J_2)J_5 & J_5(J_1+J_2+J_3) & J_5(J_1+J_2+J_3+J_4) \end{pmatrix}$$

Iz dobivenog se vidi da je J simetrična matrica. Time se problem sveo na rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi oblika:

$$q = -K\ddot{q}$$

I sustav (2.5) standardnog je oblika $\ddot{s} = -Cs$, samo što matrica sustava nije simetrična.

Da bismo još malo drukčije napisali matematički model torzionih oscilacija osovine s n diskova, uvedimo novi generalizirani koordinatni sustav:

$$\psi_i = \alpha_i c_i \;, \; i = 1,2,3,\ldots,n-1 \tag{2.11}$$

U tako definiranom koordinatnom sustavu, sustav (2.5) poprima oblik:

$$\ddot{\psi} = F\psi$$

gdje je F matrica:

$$f_{ii} = \frac{c_i(J_{i+1})}{J_i J_{i+1}} + \frac{\sqrt{c_i c_{i+1}}}{J_{i+1}} \;, \; i = 1,2,3,\ldots,n-2$$

$$f_{n-1,n-1} = -\frac{c_{n-1}(J_{n-1} + J_n)}{J_{n-1}J_n}$$

$$f_{i,i-1} = \frac{\sqrt{c_{i-1}c_i}}{J_i} \;, \; i = 2,3,4,\ldots,n-1$$

inače je $f_{ij}=0$

ili za $n = 5$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}+\frac{\sqrt{c_1c_2}}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{c_1c_2}}{J_2} & -\frac{c_2(J_2+J_3)}{J_2J_3}+\frac{\sqrt{c_2c_3}}{J_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{c_2c_3}}{J_3} & -\frac{c_3(J_3+J_4)}{J_3J_4}+\frac{\sqrt{c_2c_3}}{J_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{c_3c_4}}{J_4} & -\frac{c_4(J_4+J_5)}{J_4J_5} \end{pmatrix}$$

U koordinatama ψ_i sustav (2.10) poprima oblik:

$$\psi = G\ddot{\psi} \tag{2.13}$$

gdje je G matrica s elementima:

$$g_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{i} J_k \cdot \sum_{k=j+1}^{n-1} J_k}{\sum_{k=1}^{n-1} J_k \sqrt{c_i c_j}}$$

Jednadžbe (2.13) matematički su model gibanja osovine s n diskova pri malim torzionim oscilacijama. Sustav diferencijalnih jednadžbi sustav je drugoga reda s konstantnim koeficijentima, a uz to je matrica sustava simetrična, tako da se mogu primijeniti jednostavne numeričke metode za rješavanje takva sustava.

LITERATURA

[1] Vladimir Igorevič, D. Arnol. Matematičeskie metody klassičeskoj mehaniki. Moskva, Izd. "Nauka" 1974.

[2] Vladimir Igorevič, D. Arnol, Obyknovennye differencial nye uravnenija. Moskva, Izd. "Nauka" 1971.

[3] Ivan Mihaljevič Babakov, Teorija kolebanii. 3. izd. Moskva, Izd. "Nauka" 1968.

[4] Nikolaj Nikolaevič, C. Buhgol, Osnovnoj kurs teoretičeskoj mehaniki. Čast "2. Dinamika sistemy materijal" nyh toček. 5. izd. Moskva, Izd. "Nauka" 1969.

Summary

MATHEMATICAL MODEL OF THE SHAFT TORSION OSCILLATIONS

The paper deals with the mathematical model of the shaft torsion oscillations, with rotating discs fastened on the shaft and made of the same homogeneous material as the shaft itself. The model is formed by applying the linearized mechanic Lagrange equation in generalized coordinates.