

Mr. sc. **Željko Glavan**
Visoka pomorska škola u Rijeci

Prethodno priopćenje
UDK: 517.9:519.85:531.01

SVOJSTVENE OSCILACIJE LINEARIZIRANOG SUSTAVA MATERIJALNIH TOČAKA

U članku je izložen problem traženja svojstvenih vrijednosti za linearizirani sustav materijalnih točaka s n stupnjeva slobode, koji je podvrgnut elastičnim silama. Takav sustav oscilira oko položaja ravnoteže. Koristeći se poznatim teoremom o istovremenoj dijagonalizaciji dvoiju kvadratnih formi, od kojih je jedna pozitivno definitna, izloženo je kako se do rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi, koje opisuju gibanje sustava, može jednostavnije doći uvođenjem sustava glavnih koordinata. Uvođenjem glavnih koordinata, sustav diferencijalnih jednadžbi svodi se na rješavanje n neovisnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Na kraju je članka kao primjer prikazan sustav od dva matematička njihala povezana elastičnom oprugom, u kojem dolazi do pojave zvane "efekt pretakanja energije".

1. SVOJSTVENE OSCILACIJE I GLAVNE KOORDINATE

Pri malim oscilacijama mehaničkog sustava s n stupnjeva slobode, izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju kvadratne su forme \dot{q} odnosno q , gdje je \dot{q} generalizirana brzina, a q generalizirane koordinate sustava:

$$T = \frac{1}{2} (A \dot{q} / \dot{q}) \quad (1.1)$$

$$U = \frac{1}{2} (B q / q) \quad (1.2)$$

gdje je (x/y) skalarni produkt vektora x i y [1].

Izraz za kinetičku energiju pozitivno je definitna kvadratna forma.

Iz teorije kvadratnih formi poznato je da ako imamo dvije kvadratne forme A i B , od kojih je jedna pozitivno definitna, postoji takav linearni operator da se obje forme u odgovarajućoj bazi istovremeno dijagonaliziraju [5]. Ako se to primijeni na forme (1.1) i (1.2), proizlazi da postoji sustav generaliziranih koordinata $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ u kojem izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju primaju oblik:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{Q} / \dot{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i^2 \quad (1.3)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i^2 = \frac{1}{2} (\Lambda Q / Q) \quad (1.4)$$

gdje je Λ matrica:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Postoji linearni operator C takav da bude:

$$C^{-1}AC = I \quad (1.6)$$

$$C^{-1}BC = \Lambda \quad (1.7)$$

gdje je I jedinična matrica.

Ako se zna koordinata položaja promatranog sustava u sustavu q , tada se njegov položaj u generaliziranim koordinatama Q računa prema formuli:

$$Q = Cq. \quad (1.8)$$

Generalizirane koordinate u kojima su kinetička i potencijalna energija dijagonalne kvadratne forme, nazivaju se glavne ili normalne koordinate promatranoga mehaničkog sustava. Lagrangeove jednadžbe gibanja mehaničkog sustava u generaliziranim koordinatama q jesu:

$$A\ddot{q} = -Bq \quad (1.9)$$

Ako se uvedu glavne koordinate, sustav jednadžbi (1.9) poprima oblik:

$$\ddot{Q} = \Lambda Q. \quad (1.10)$$

Dobiveni sustav je sustav od n međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, pa svaku od njih možemo zasebno riješiti. Svaka pojedina jednadžba predstavlja gibanje sustava s jednim stupnjem slobode. Brojeve λ_i nazivamo svojstvenim vrijednostima matrice B u odnosu prema matrici A , odnosno svojstvenim vrijednostima mehaničkog sustava.

Promotrimo npr. i -tu jednadžbu:

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i. \quad (1.11)$$

Razlikujemo tri slučaja [2]:

1.) $\lambda_i = \omega^2 > 0$

tada je rješenje jednadžbe (1.11) jednako:

$$Q_i = C_{i1} \cos \omega t + C_{i2} \sin \omega t;$$

2.) $\lambda_i = 0$

tada je rješenje jednadžbe (1.11):

$$Q_i = C_{i1} + C_{i2} t;$$

3.) $\lambda_i = -k^2 < 0$

tada je rješenje jednadžbe (1.11) dodano u obliku:

$$Q_i = C_{i1} \cosh kt + C_{i2} \sinh kt.$$

U prvom se slučaju radi o malim oscilacijama oko stabilnog položaja ravnoteže, u drugom je slučaju položaj ravnoteže neodređen, a u trećem je nestabilan.

Neka je $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$ jedna od svojstvenih vrijednosti, a η svojstveni vektor, tj. vektor za koji je:

$$B\eta = \lambda_i A\eta \quad (1.12)$$

i neka su početni uvjeti gibanja takvi da su C_{j1} i C_{j2} jednaki nuli za svako $i \neq j$. Tada se sustav giba tako daje položaj sustava u svakom trenutku dan izrazom:

$$q(t) = (C_{i1} \cos \omega t + C_{i2} \sin \omega t)\eta \quad (1.13)$$

gdje su komponente vektora izražene u generaliziranim koordinatama q .

Gibanje opisano jednadžbom (1.13) u sustavu je glavnih koordinata gibanje koje se dobije superpozicijom jednodimenzionalnog gibanja $Q_i = C_{i1} \cos \omega_i t + C_{i2} \sin \omega_i t$ i trivijalnih gibanja $Q_i = 0$, $j \neq i$. Takvo se gibanje naziva i -tim svojstvenim osciliranjem sustava, a ω_i i -tom svojstvenom frekvencijom.

Negativne svojstvene vrijednosti također generiraju svojstvena gibanja koja se također nazivaju svojstvene oscilacije, iako nisu periodične.

Svojstvene oscilacije međusobno su okomite jer je sustav koordinata Q okomit u smislu skalarnog produkta $(A\dot{q} / \dot{q})$.

Sustav s n stupnjeva slobode u općem slučaju nema n različitih pozitivnih svojstvenih vrijednosti. No u slučaju kada je i potencijalna energija pozitivno definitna kvadratna forma, sve su svojstvene vrijednosti pozitivne i postoji n linearno nezavisnih svojstvenih oscilacija.

Promatrajmo izraz (1.13) u slučaju da je $\lambda_i = \lambda_1$. Tada u normalnom koordinatnom sustavu vektor η ima komponente $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Njegove koordinate u polaznom generaliziranom koordinatnom sustavu q dobiju se transformacijom $C^{-1}\eta$ gdje je C matrica transformacije sustava q u sustav Q .

Sada se sustav (1.13) može pisati u obliku:

$$Q = (C_{11} \cos \omega_1 t + C_{12} \sin \omega_1 t) C^{-1} \eta, \quad (1.14)$$

gdje je η izražen u koordinatama Q .

U slučaju kada postoji n različitih pozitivnih svojstvenih vrijednosti, gibanje sustava oko stabilnog položaja ravnoteže je superpozicija n glavnih harmoničkih oscilacija. Tada rješenje diferencijalnih jednadžbi glasi:

$$q = C^{-1} x \quad (1.15)$$

gdje je x vektor čije komponente u sustavu q imaju oblik:

$$x_i = C_{i1} \cos \omega_i t + C_{i2} \sin \omega_i t \quad (1.16)$$

Koeficijente C_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2$ određujemo iz početnih uvjeta. Općenito rješenje složenoga gibanja sustava nije periodično pa nema smisla definirati period.

Rješenje sustava (1.15) možemo zapisati u obliku:

$$q(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n C_k e^{i\omega_k t} \eta_k \right) \quad (1.17)$$

gdje su ω_k , η_k , svojstvena frekvencija odnosno svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_k . [3].

U slučaju kad postoji n različitih svojstvenih vrijednosti, možemo naći n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Označimo $\eta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in})$ svojstveni vektor η_i komponente u sustavu q . Tada opće rješenje za generaliziranu koordinatu q_j glasi:

$$q_j = \sum_{i=1}^n (c_{i1} \cos \omega_i t + c_{i2} \sin \omega_i t) \eta_{ij} \quad (1.18)$$

ili

$$q_j = \sum_{i=1}^n (C_{i1} \cos \omega_i t + C_{i2} \sin \omega_i t). \quad (1.19)$$

Koeficijente u (1.18) odnosno (1.19) odredimo iz početnih uvjeta. Nekad je sustav (1.19) zgodno napisati u obliku:

$$q_j = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varepsilon_i)$$

Iz adicijonih teorema dobiju se veze između C_{i1} , C_{i2} i A_i , ε_i :

$$A_i \cos \varepsilon_i = C_{i2}$$

$$A_i \sin \varepsilon_i = C_{i1}$$

stupnja čiji su korijeni realni zbog simetričnosti A i B , ali ne moraju nužno biti ni međusobno različiti ni pozitivni.

Ako se kinetička ili potencijalna energija u odabranome generaliziranom koordinatnom sustavu pojavi kao dijagonalna kvadratna forma, tada zbog jednadžbi (1.8) i (1.10) karakteristična jednadžba poprima oblika:

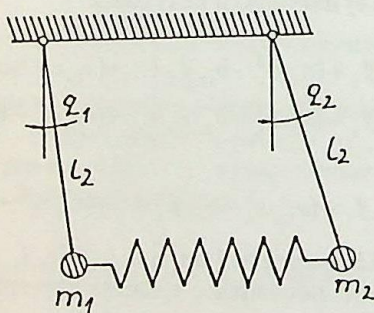
$$\det|C - \lambda I| = 0, \quad (2.7)$$

gdje je C matrica potencijalne energije, a I je jedinična matrica. U ovom slučaju problem se svodi na uobičajen postupak traženja svojstvenih vrijednosti za matricu C .

U drugom slučaju kada dijagonaliziramo matricu potencijalne energije, karakteristična jednadžba glasi:

$$\det\left|K - \frac{1}{\lambda}I\right| = 0 \quad (2.8)$$

3. EFEKT PRETAKANJA ENERGIJE



Slika 1.

Neka su dva matematička njihala obješana kao na slici 2. Mase njihala neka budu $m_1 = m_2 = m$, a duljine niti $l_1 = l_2 = l$. Promatrajmo njihanje tih dvaju njihala ako se nalaze u polju gravitacijske sile g i ako su im mase povezane oprugom. Masu opruge ćemo radi jednostavnosti zanemariti, a duljina opruge u nepobuđenom stanju jednaka je razmaku između objesišta njihala. Uvedimo sustav generaliziranih koordinata $q = (q_1, q_2)$ tako da q_1 bude kut otklona njihala s masom m_1 , a q_2 kut otklona drugog njihala. Položaj je ravnoteže u takvu generaliziranu sustavu $q = (0,0) = 0$. Njihala njišu oko tog položaja. Prikažimo kinetičku i potencijalnu energiju u tako odabranom sustavu koordinata:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (3.1)$$

$$U = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_2^2 + \alpha(q_1 - q_2)^2) \quad (3.2)$$

gdje smo radi jednostavnosti uzeli da je $m = 1, l = 1, g = 1$, a izraz $\frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ u formuli za potencijalnu energiju dolazi od elastičnih svojstava opruge [3]

Uvedimo novi koordinatni sustav:

$$Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

$$Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

Matrica transformacije sustava q u sustav Q ima oblik:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{2}} & \sqrt{\frac{2}{2}} \\ \sqrt{\frac{2}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Iz relacija (3.3) i (3.4) izračuna se:

$$q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

$$q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}} \quad (3.7)$$

U novom sustavu kinetička i potencijalna energija sustava glase:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) \quad (3.8)$$

$$U = \frac{1}{2} (Q_1^2 + Q_2^2 + 2\alpha Q_2^2)$$

odnosno uz oznake $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = \sqrt{1+2\alpha}$:

$$U = \frac{1}{2} (\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2) \quad (3.9)$$

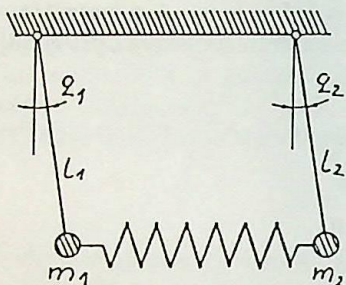
Iz dobivenih izraza za kinetičku i potencijalnu energiju proizlazi da je pomoću (3.6) i (3.7) definiran upravo sustav glavnih ili normalnih koordinata.

Razlikuju se dva svojstvena osciliranja:

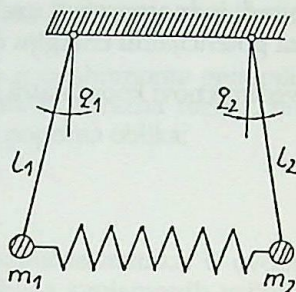
1. Ako je $Q_2 = 0$, onda je $q_1 = q_2$. Oba se njihala sinkrono otklanjaju na istu stranu i za isti kut. Svojstvena frekvencija je $\omega_1 = 1$ (slika 2.).

2. U slučaju da je $Q_1 = 0$, vrijedi $q_1 = -q_2$.

Njihala osciliraju tako da u svakom trenutku imaju suprotan otklon. U ovom slučaju svojstvena frekvencija iznosi $\omega_2 = \sqrt{1+2\alpha} > 1$. Svojstvena se frekvencija pojačava zbog elastičnih svojstava opruge (slika 3.).



Slika 2.



Slika 3.

Kad je koeficijent $\alpha \ll 1$ dolazi dok zanimljivog efekta koji se naziva "efekt pretakanja energije". Neka u početnom trenutku drugo njihalo miruje, a prvo neka ima početnu brzinu $\dot{q}_1(0) = v$, a početni položaji neka budu $q_1(0) = 0$ i $q_2(0) = 0$. Riješimo sustav jednačbi gibanja uz takve početne uvjete i to u sustavu normalnih koordinata. Najprije treba izraziti početne uvjete u koordinatama Q . Prema (3.3) i (3.4) izlazi:

$$Q_1(0) = 0, \quad Q_2(0) = 0, \quad \dot{Q}_1(0) = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \dot{Q}_2(0) = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (3.10)$$

Jednačbe gibanja u sustavu normalnih koordinata izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= -\omega_2^2 Q_1 = -Q_1 \\ \ddot{Q}_2 &= -\omega_2^2 Q_2 = -(1+2\alpha)Q_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Opće rješenje sustava glasi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \sin \omega_1 t + D_1 \cos \omega_1 t \\ Q_2 &= C_2 \sin \omega_2 t + D_2 \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ako se uvrste početni uvjeti (3.10), dobiju se koeficijenti:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0 \quad (3.13)$$

$$C_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad C_2 = \frac{v}{\omega_2 \sqrt{2}} \quad (3.14)$$

Tako smo dobili rješenje jednačbi (3.11) uz početne uvjete (3.10):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{v}{\sqrt{2}} \sin t \\ Q_2 &= \frac{v}{\omega_2 \sqrt{2}} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zbroje li se pa zatim oduzmu izrazi u (3.15), dobiju se jednadžbe gibanja njihala u polaznom koordinatnom sustavu uz početne uvjete (3.10):

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega_2 \sin \omega_2 t} \right) \\ q_2 &= \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega_2 \sin \omega_2 t} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

U slučaju da je $\alpha \ll 1$ $\omega_2 = \sqrt{1+2\alpha} \approx 1 + \alpha$. Tada možemo izraz $\frac{1}{\omega_2}$ smatrati približno jednakim 1 pa imamo:

$$\begin{aligned} q_1 &\approx \frac{v}{2} (\sin t + \sin \omega_2 t) = v \sin \frac{(1+\omega_2)t}{2} \cos \frac{(1-\omega_2)t}{2} \\ q_2 &\approx \frac{v}{2} (\sin t - \sin \omega_2 t) = v \cos \frac{(1+\omega_2)t}{2} \sin \frac{(1-\omega_2)t}{2} \end{aligned}$$

Uz dodatnu oznaku:

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - 1}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

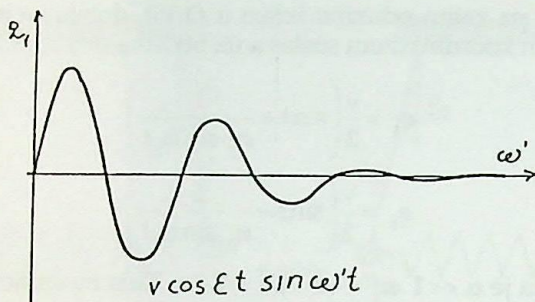
i zbog

$$\varepsilon' = \frac{\omega_2 + 1}{2} \approx 1$$

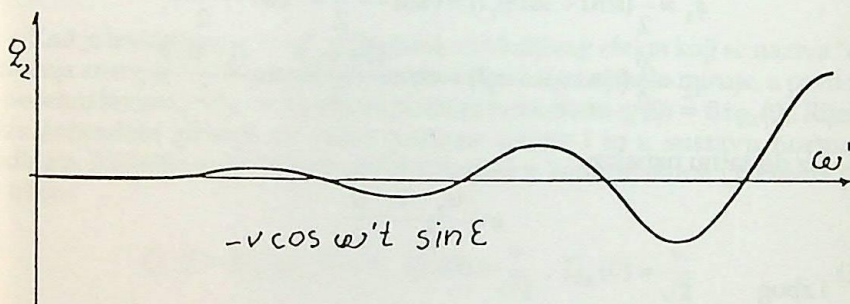
izlazi:

$$\begin{aligned} q_1 &\approx v \cos \varepsilon t \sin \omega' t \\ q_2 &\approx -v \cos \varepsilon t \cos \omega' t \end{aligned} \quad (3.17).$$

U trenutku $t = 0$, samo prvo njihalo ima početnu brzinu. Prva jednadžba u (3.17) opisuje male oscilacije njihala s frekvencijom $\omega' \approx 1$ i s padajućom amplitudom $v \cos \varepsilon t$. Druga jednadžba u (3.17) opisuje male oscilacije njihala s frekvencijom $\omega' \approx 1$ i rastućom amplitudom $v \sin \varepsilon t$. U trenutku $T = \frac{\pi}{2\varepsilon} \approx \frac{\pi}{\alpha}$ amplituda prvog njihala jednaka je 0, tj. u tom se trenutku giba samo drugo njihalo. Nakon trenutka T amplituda se prvog njihala povećava, a drugog se smanjuje. U trenutku $2T$ gibat će se samo prvo njihalo, a drugo će se na trenutak zaustaviti. Analogno bismo zaključivali u vremenskim trenucima $3T, 4T, \dots$ Kao što smo već rekli, ta se pojava naziva "efekt pretakanja energije". Za ilustraciju te pojave, na slikama 4. i 5. prikazani su grafovi funkcija (3.17).



Slika 4.



Slika 5.

Neka su sad mase njihala i duljine niti različite. U tom slučaju potencijalna i kinetička energija imaju oblik:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2) \quad (3.18)$$

$$U = m_1 l_1 \frac{q_1^2}{2} + m_2 l_2 \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^2$$

Matrice kinetičke i potencijalne energije imaju oblik:

$$A = \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$B = \begin{pmatrix} m_1 l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Treba naći karakterističnu jednadžbu:

$$\det |B - \lambda A| = \begin{vmatrix} m_1 l_1 + \alpha - \lambda m_1 l_1^2 & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha - \lambda m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Razvojem determinante dobivamo:

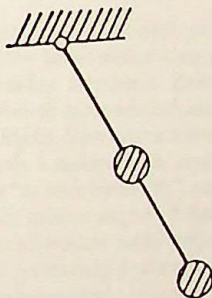
$$m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 \lambda^2 - (m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2) + \alpha (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)) \lambda + m_1 m_2 l_1 l_2 + \alpha (m_1 l_1 + m_2 l_2) = 0 \quad (3.21)$$

Zanimljivo je promatrati kako se svojstvene vrijednosti i frekvencije ponašaju kad $\alpha \rightarrow 0$ i $\alpha \rightarrow \infty$, tj. u slučaju kad je opruga koja spaja njihala jaka, odnosno zanemarivo slaba.

Da bismo ispitali kako se sustav njihala ponaša kad $\alpha \rightarrow \infty$, podijelimo jednadžbu (3.21) s α i tražimo limes kad $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\omega_\infty = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \quad (3.22)$$

Znači da jedna od svojstvenih frekvencija teži u beskonačnost, a druga teži prema svojstvenoj frekvenciji njihala s dvjema masama na istoj niti (slika 6.).



Slika 6.

U slučaju kad $\alpha \rightarrow 0$, sustav se ponaša kao dva slobodna matematička njihala. Ako se u (3.21) uvrsti $\alpha = 0$, dobije se:

$$m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 \lambda^2 - m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2) \lambda + m_1 m_2 l_1 l_2 = 0$$

Gornju jednadžbu podijelimo s $m_1 m_2 l_1 l_2$:

$$l_1 l_2 \lambda^2 - (l_1 + l_2) \lambda + 1 = 0$$

odakle rješavanjem dobijemo:

$$\lambda_1 = \frac{1}{l_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{l_2} \quad (3.23)$$

Relacije (3.23) upravo su izrazi za frekvenciju dva slobodna matematička njihala duljine niti l_1 i l_2 .

LITERATURA

- [1] D. Arnold, Vladimir Igorevič, Matematičeskie metody klassičeskoj mehaniki. Moskva, Izd. "Nauka" 1974.
- [2] D. Arnold, Vladimir Igorevič. Obyknovennye differencial nye uraneniya. Moskva, Izd. "Nauka" 1971.
- [3] Ivan Mihaljevič Babakov. Teorija kolebanii. 3. izd. Moskva, Izd. "Nauka" 1968.
- [4] C. Buhgol, Nikolaj Nikolaevič. Osnovnoj kurs teoretičeskoj mehaniki. Čast "2. Dinamika sistemy materijal" nyh toček. 5. izd. Moskva, Izd. "Nauka" 1969.
- [5] Svetozar Kurepa. Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene. Zagreb, Sveučilišna naklada "Liber", 1976.

Summary

CHARACTERISTIC OSCILLATIONS OF THE LINEARIZED SYSTEM OF MATERIAL POINTS

The paper deals with the problem of searching characteristic values for a linearized system of material points with degrees of freedom and subject to elastic forces. Such a system oscillates round the balance position. By using the well-known theorem on the simultaneous diagonalization of two square forms, one of which positively definite, the paper aims at presenting how to reach a solution of the differential equation system, describing the motion of a system in an easier way by a simple introduction of the main coordinates system. And introducing the main coordinates, the system of differential equations is merely reduced to the system of solving independent second rank differential equations. At the end of the paper, a system of two mathematical pendulum connected by an elastic spring is presented, being an example of the phenomenon known as "the energy decantation effect."