OSJEČKI MATEMATIČKI LIST 25 (2025), 179–196

Kratka povijest redova

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku pratimo najznačajnije trenutke iz povijesti beskonačnih sumacija od začetaka razmišljanja o njima u antičkoj Grčkoj, preko prvih eksplicitnih razmatranja u 14. i 15. stoljeću, postepenog nastanka sustavne teorije u razdoblju od sredine 17. do sredine 18. stoljeća, pa do konačne formalizacije 1820-ih godina.

Ključne riječi: *redovi, geometrijski red, binomni red, red potencija, harmonijski red, Zenon iz Eleje, Arhimed iz Sirakuze, Nicole d'Oresme, Madhava, Gregory St. Vincent, James Gregory, Nicolaus Mercator, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Baselski problem, Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy*

A short history of infinite series

Abstract

In this paper, we follow the main moments in the history of infinite summations, from the early ideas formed in Greek antiquity, over first explicit considerations in the 14th and 15th centuries, the gradual systematisation of the theory from the mid-17th to mid-18th century, up to the final formalisation in the 1820s.

Keywords: *infinite series, geometric series, binomial series, power series, harmonic series, Zeno of Elea, Archimedes of Syracuse, Nicole d'Oresme, Madhava, Gregory St. Vincent, James Gregory, Nicolaus Mercator, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Basel problem, Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: *bruckler@math.hr*

1 Uvod

U prošlom smo nastavku [6] naših crtica iz povijesti matematike saznali kako je od kraja 17. stoljeća korištenje redova potencija postalo glavna tehnika u izračunavanju aproksimacija broja π, a spomenuli smo i neke ranije pojave redova. U ovom ćemo nastavku opisati najznačajnije trenutke iz povijesti redova, popularno nazivanih beskonačnim sumama — od ranih ideja iz doba antičke Grčke do formalizacije potrebnih pojmova u 19. stoljeću.

Prije izleta u povijest, podsjetimo naše čitateljstvo na sadašnjost, tj. kako moderno definiramo redove i redove potencija (ograničavamo se na realne slučajeve):

Definicija 1. *Niz* $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *realnih brojeva je funkcija* $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, *pri čemu je* $a_n = a(n)$. *Niz je konvergentan ako postoji broj* $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *takav da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $m \in \mathbb{N}_0$ *takav da za sve* $n > m$ *vrijedi* $|a_n - a| < \varepsilon$.

Red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *je uređeni par* $((a_n),(S_n))$ *niza* (a_n) *i pripadnog niza parcijalnih suma* (S_n), $S_n = a_0 + \ldots + a_n$. *Red konvergira ako konvergira pripadni niz parcijalnih suma i u tom slučaju je suma reda* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Red potencija je red generiran nizom oblika $a_n = b_n\,(x-c)^n$, *za neku varijablu* x *i konstantu* c. *Skup svih* x *za koje red potencija konvergira zove se njegovim područjem konvergencije. Taylorov red beskonačno mnogo puta derivabilne funkcije* $f : I \to \mathbb{R}$, *gdje je* I *otvoren interval, oko* $c \in I$ *je red potencija za koji je* $b_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. *Za slučaj* $c = 0$, *Taylorov red se naziva Maclaurinovim.*

Podsjećamo i da općenito funkcije ne moraju biti jednake svojim Taylorovim redovima. No, ako za niz ostataka $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, gdje je $T_n(x)$ Taylorov polinom stupnja n (parcijalna suma Taylorovog reda), vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ za $x \in I$, onda je $f(x)$ jednak Taylorovom redu funkcije f za sve $x \in I$ i kažemo da je f analitička.

Primjer 1. *Neka je* $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, *dakle* (a_n) *je geometrijski niz realnih brojeva s kvocijentom* $\frac{1}{2}$. *Taj niz je konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. *Odgovarajući red* $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ *je konvergentan geometrijski red sa sumom* 2. *Red* *potencija* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ *ima područje konvergencije* $I = \langle -2, 2 \rangle$ *i on je Maclaurinov red funkcije* $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{2-x}$. *Pritom je* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ *za* $x \in I$, *tj.* f *je analitička* (*na* I).

2 Antički temelji teorije redova

Redovi i redovi potencija spadaju u granu matematike poznatu pod nazivom infinitezimalni račun. Razmišljanja o infinitezimalnim veličinama, pa stoga i korijeni ideje redova, mogu se naći u antičkoj Grčkoj. Štoviše, upravo su redovi vezani uz prve ideje o infinitezimalima koje susrećemo kod **Zenona iz Eleje** (oko 490.–430. pr. Kr.). Zenon je poznat po paradoksima koje mu je pripisao Aristotel, a u dva od njih, paradoksu dihotomije i paradoksu o Ahilu i kornjači, možemo uočiti razmišljanje o infinitezimalnim veličinama i beskonačnim sumacijama. U paradoksu dihotomije Zenon argumentira da je kretanje nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka itd. — ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja. U paradoksu o Ahilu i kornjači, Ahil je puno brži od kornjače, no dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla, dok Ahil dođe do te pozicije, kornjača je opet malo odmakla, itd. — prema Zenonu, Ahil neće nikad stići kornjaču. Kao što vidimo iz moderne perspektive, u oba paradoksa Zenona je mučila razlika između parcijalne sume i ukupne sume konvergentnih redova, u paradoksu dihotomije geometrijskog reda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

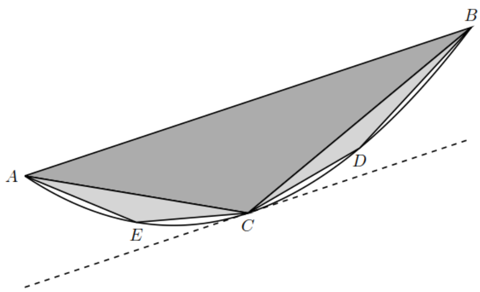
a u paradoksu o Ahilu i kornjači općenitijeg konvergentnog reda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

gdje su svi a_n pozitivni i padaju prema nuli [3, 7, 13]. Dok danas mi koji smo već „gotovi" matematičari lako objasnimo u čemu je bio problem kod Zenona, njegovi paradoksi i dalje mogu poslužiti kao izvrstan uvod u problematiku — kako bi ih naši učenici koji još nisu susreli ideju beskonačne sume objasnili?

Kako smo vidjeli u jednom od prethodnih članaka ove serije, [5], starogrčki matematičari, posebice Eudoks s Knida, su ubrzo nakon Zenona našli načine kako se nositi s problemom limesa koji se pojavljuje u razmatranjima infinitezimalnih veličina, bez da su pritom osmislili ekvivalent modernog pojma limesa. Ta metoda ekshaustije svoj vrhunac doživjela je kod **Arhimeda iz Sirakuze** (oko 287.–212. pr. Kr.). Već smo vidjeli kako je on iskoristio metodu ekshaustije za dobivanje rezultata vezanih za povijest broja π [4, 6], a neki od njih su ekvivalentni modernoj integraciji koja je također jedan oblik beskonačne sumacije. No, direktnije s povijesti redova vezan je sljedeći Arhimedov rezultat iz njegova djela *O kvadraturi parabole*:

Teorem 2.1 (Kvadratura segmenta parabole). *Površina segmenta parabole određenog tetivom $\overline{AB}$ jednaka je $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranica $\overline{AB}$, a treći vrh C je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tetivom $\overline{AB}$ (slika 1).*



Slika 1. Arhimedova kvadratura parabole.

Arhimedov dokaz, pojednostavljeno i modernizirano (u Arhimedovo doba niti su bile poznate indoarapske brojke niti je postojala matematička notacija izuzev slova za označavanje geometrijskih objekata), sastoji se u sljedećem. Uklanjanjem trokuta $\triangle ABC$ dobiju se dva nova odsječka u koje se analogno mogu upisati trokuti $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ (slika 1). Arhimed je dokazao da je površina T trokuta ABC točno 4 puta veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. No, postupak upisivanja trokuta u odsječke koji se nalaze izvan u danom koraku iz početnog segmenta uklonjenih trokuta može se nastaviti u beskonačnost, pri čemu u svakom koraku dobivamo dvostruki broj novih trokuta u odnosu na prethodni, a za svaki prethodni trokut iz njega nastala nova dva imaju točno po 4 puta manju površinu. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina preostalih segmenata smanjuje točno po 4 puta. Eudoksova lema o ekshausitiji (vidi [5]) povlači da će ostatak površine segmenta nakon uklanjanja dovoljno mnogo trokuta postati proizvoljno malen. Prema jednoj propoziciji iz Euklidovih *Eleme-*

nata[1] slijedi

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \ldots + \frac{1}{4^n}T = T \cdot \frac{\frac{1}{4^{n+1}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3}T \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

Naposljetku opet po Eudoksovoj lemi o ekshaustiji zaključujemo da $\frac{1}{4^{n+1}}$ postaje proizvoljno mali s porastom n. Stoga je površina segmenta parabole $\frac{4}{3}T$ [3, 7, 14, 22]. Kako vidimo, Arhimed je ovdje po prvi put u povijesti eksplicitno izračunao sumu jednog (geometrijskog) reda, kojeg danas zapisujemo kao:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

Ipak, iako iz moderne perspektive lako u Zenonovim razmišljanjima i Arhimedovim rezultatima uočavamo (konvergentne) redove, važno je istaknuti da ne možemo reći da su antički Grci stvarno razmatrali redove. Kao prvo, antičko grčko shvaćanje brojeva bilo je preograničeno (za njih su brojevi bili samo prirodni brojevi) da bi računski pristupili ovakvim razmatranjima, što se vidi i primjerice iz prethodne fusnote s originalnom formulacijom jedne Euklidove propozicije o nizovima koje danas nazivamo geometrijskim. Dodatno, starogrčko shvaćanje beskonačnosti je bilo preograničeno da bi se stvarno moglo govoriti o ideji beskonačnih suma. Primjerice, Euklid svoj znameniti teorem o prostim brojevima, kojeg danas iskazujemo kao „Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva", iskazuje u formulaciji „Prostih brojeva ima više od bilo koje određene množine prostih brojeva". Najbolje se problem antičkog shvaćanja beskonačnosti vidi kod Aristotela, koji je tvrdio da veličine ne mogu biti stvarno beskonačne, nego samo potencijalno kroz uzastopno dijeljenje [23].

3 Prve eksplicitne pojave beskonačnih sumacija

Kroz mnogo stoljeća nakon Arhimeda nije bilo novih rezultata na našu temu — tek oko 1600–1650 godina kasnije jedan Francuz i jedan Indijac po prvi put u povijesti će privući pozornost na redove kao takve. Dok im je oboma nedostajalo Arhimedove preciznosti, velika im je zasluga što su prvi, koliko je danas poznato, razmatrali beskonačne sume same po sebi, a ne kao „potencijalno" beskonačne. Bili su to francuski biskup i filozof

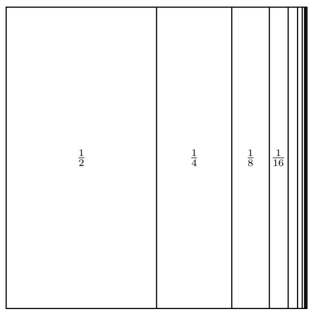
[1] Propozicija 35 u IX. knjizi: Ako se bilo koji broj brojeva nalazi u produljenoj proporciji, onda se razlika drugog i prvog broja prema prvom odnosi kao razlika zadnjeg i prvog prema zbroju svih osim zadnjeg. Iskazano na moderan način: Ako je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz, onda je $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Nicolas (Nicole) (d')Oresme (1325.–1382.) te indijski matematičar i astronom **Madhava** (oko 1350.–1425.).

Oresme je uz znamenitijeg Leonarda iz Pise (Fibonaccija) bio najznačajniji europski srednjevjekovni matematičar. Najvažniji mu je doprinos razvoj ideja koje su tristotinjak godina kasnije rezultirale utemeljenjem analitičke geometrije, a kasnije i ideje funkcije i njenog grafa. Takvim pristupom dokazao je i znameniti Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom Merton College, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330-ih godina: Za gibanja s konstantnom akceleracijom, prijeđeni put jednak je kao za gibanje konstantnom brzinom ako je to ona u srednjem trenutku prvospomenutog gibanja [3, 7]. Upravo su mertonski intelektualci iz Oxforda bili prvi koji su potaknuli raspravu o beskonačnim sumama, a jedan od njih, Richard Suiseth je oko 1350. objavio prvi dokaz konvergencije nekog negeometrijskog reda. Radilo se o redu

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n},$$

čija suma je 2. Suisethov argument je potpuno verbalan i vrlo kompliciran, no Oresme je ubrzo dao elegantniji, grafički dokaz [23].



Slika 2. Oresmeov grafički dokaz da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$.

U tu svrhu, Oresme je prvo rastavio jedinični kvadrat (slika 2) na pruge širina $\frac{1}{2^n}$ kako bi pokazao da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

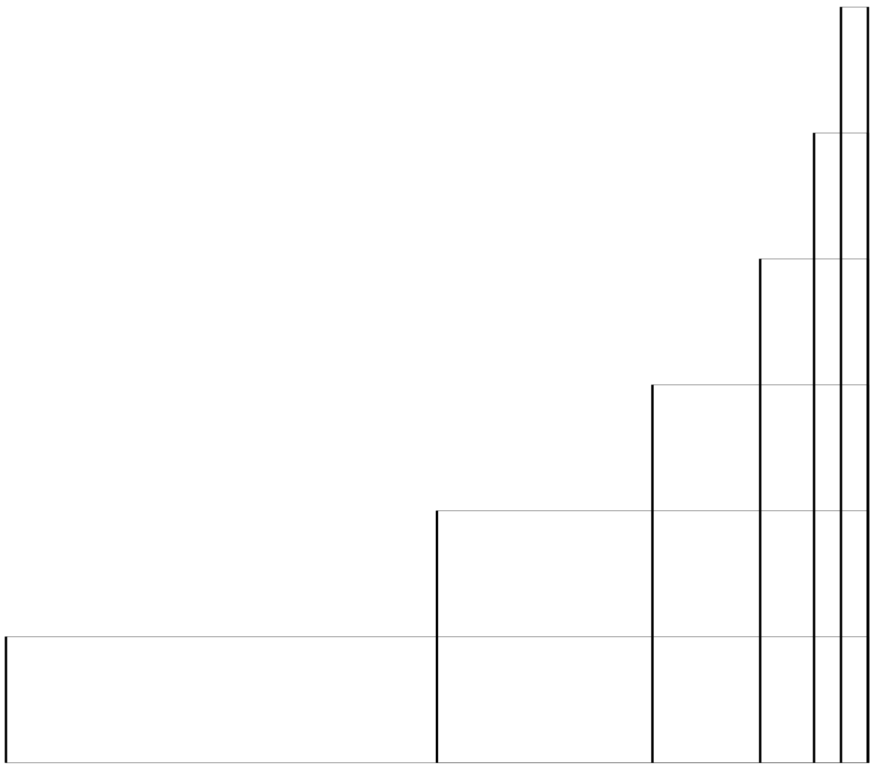
Uočimo i da je ovo prva eksplicitna pojava konvergentnog geometrijskog reda u povijesti. Sad Oresme razmišlja kako grafički rasporediti članove

Suisethovog reda, *de facto* prerasporedivši članove tog reda kao

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)+\ldots$$

(slika 3) i tako zaključuje da je suma jednaka 2 jer se kvadrat sa slike 2 u dijagramu 3 dvaput pojavljuje preraspoređen (i druga kopija dodatno rastavljena). Koristeći sličan pristup Oresme je odredio i još neke sume konvergentnih redova [23].



Slika 3. Ilustracija dokaza da je $\sum_n \frac{n}{2^n} = 2$ (ukupna širina lika te visina svakog reda je 1).

Lako bi sad bilo pomisliti, kako tadašnjim intelektualcima tako i našim današnjim učenicima, da beskonačne sume imaju konačnu vrijednost kad god im članovi postaju neograničeno mali, tj. pomisliti da iz $\lim_n a_n = 0$ slijedi da je $\sum a_n$ konačna. Velik je doprinos d'Oresmea da je pokazao da to nije točno. Klasični primjer kojeg koristimo u uobičajenoj nastavi na ovu temu, harmonijski red[2] $\sum \frac{1}{n}$, je upravo primjer kojeg je otkrio i za njega dokazao divergenciju d'Oresme [1, 3]. Oresme je u *Questiones Super Geometriam Euclidis* (*Questions on Euclid's Geometry*) (oko 1350.) to dokazao u biti na isti način kako to danas dokazujemo. Prvo je pokazao da je $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ zbog čega je

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

zatim je pokazao da je $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$ zbog čega je

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \ldots,$$

pa dalje zbog $\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$ imamo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \ldots,$$

itd. Stoga zaključuje da je ukupna suma veća od beskonačnog zbroja polovina, što očito nije konačno [23]. Oresmeove rezultate je proširio i dobio procjene suma nekih novih redova portugalski matematičar Alvaro Thomaz u svom djelu *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri* (1509.) [14].

Na skroz drugom „kraju" svijeta, u Indiji, samo par desetljeća kasnije Madhava, preciznije Madhava iz Sangamagrame, prvi u povijesti je pak razmatrao ono što danas nazivamo redovima potencija. Madhava je bio predstavnik, vjerojatno utemeljitelj, važne indijske matematičko-astronomske škole iz Kerale koja je dala mnoge doprinose znanosti u razdoblju 14.–16. st. Nijedno Madhavino matematičko djelo nije sačuvano, ali se u drugim djelima te škole mnogi važni rezultati pripisuju njemu. Svi rezultati su zapisani u obliku stihova, a matematičari ove škole tako su među ostalim zapisali razne redove potencija i redove čije parcijalne sume aproksimiraju π. Konkretno Madhavi su u kasnijim djelima te škole pripisani Maclaurinovi redovi za arkus-tangens, sinus i kosinus (više od 250 godina prije nego se ti razvoji prvi put u Europi pojavljuju kod Newtona i Gregoryja):

$$\theta = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7\theta}{7} + \ldots,$$

[2]Naziv harmonijski red potječe iz 18. st. [23].

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots.$$

Nadalje, Madhavi se pripisuje da je uzevši $\theta = \frac{\pi}{6}$ iz prvog od gornja tri reda dobio prvi prikaz π pomoću reda u povijesti:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \dots.$$

Naravno, ne treba pomisliti da je Madhava ili tko od njegovih učenika precizno dokazao konvergenciju navedenih redova, no svejedno se sa sigurnošću može reći da teorija redova potencija kronološki započinje s Madhavinom školom oko 1400. godine [19].

4 Utemeljenje teorije redova i redova potencija

Kao i za mnoge moderne matematičke grane i discipline, tako je i za teoriju redova i redova potencija 17. stoljeće bilo prijelomno. Kao što i za deriviranje i integriranje često nalazimo navode da su ih prvi otkrili Newton i Leibniz, slično vrijedi i za redove i redove potencija, no u oba slučaja takva tvrdnja je prepovršna, ne samo zbog prethodnika u dalekoj povijesti, nego i zbog matematičara koji su svojim idejama u 17. stoljeću doprinijeli formiranje Newtonovog i Leibnizovog infinitezimalnog računa.

U prvoj polovici 17. stoljeća redovi se ponovno pojavljuju kod nekolicine matematičara koji su pokušavali izračunati razne površine zakrivljenih likova. Talijanski matematičar Bonaventura Cavalieri (1598.–1647.) svojom je metodom nedjeljivih veličina (čiji dio se danas, u drugačijoj formulaciji od izvorne, naziva Cavalierijevim principom) bio važan prethodnik otkrića integriranja [3, 7]. U toj je metodi Cavalieri geometrijskim tehnikama određivao omjere tražene površine prema nekoj lako izračunljivoj, pri čemu je površine zamišljao kao sastavljene od beskonačno mnogo paralelnih dužina (ali ih je u računima tretirao kao pravokutnike širine 1) te je tako dobivao razne beskonačne sume, tj. redove, koje je u osnovi gledao (bez da je imao ekvivalent tih pojmova i bez formalnog dokaza opravdanosti postupka) kao limese parcijalnih suma [14]. Njegov student **Pietro Mengoli** (1625.–1686.) je pak 1650. objavio dugo vremena zanemareno djelo u kojem je među inim dokazao divergenciju harmonijskog reda (na sličan način, tj. prikladnim grupiranjem članova, kao d'Oresme, ali prilično sigurno bez da je za njega znao) te uspješno izračunao sumu reda recipročnih trokutastih brojeva [14, 18]:[3]

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{2}{n\,(n+1)}+\ldots=2.$$

U isto doba belgijski matematičar **Gregory St. Vincent** (1584.–1667.) je u svom djelu iz 1647. prvi put, koliko je poznato, razjasnio Zenonov paradoks o Ahilu i kornjači te prvi govorio o graničnoj vrijednosti reda i „iscrpljenju" ostatka (a ne više kao kod Euklida o tome da ostatak postaje manji od najmanje razmatrane veličine). St. Vincent je dobio i sumu geometrijskog reda s kvocijentom $-\frac{1}{2}$ [14, 18, 16]:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=\frac{2}{3}.$$

Uz još neke matematičare koji su u doba neposredno prije Newtonovog i Leibnizovog utemeljenja infinitezimalnog računa razmatrali redove vezano za problem izračuna površine, primjerice J. Wallis i W. Brouncker [14, 18], prije Newtona i Leibniza svakako moramo spomenuti još dvojicu, koji će prvi u Europu uvesti redove potencija (ne znajući za ranije rezultate Madhavine škole).

Škotski matematičar **James Gregory** (1638.–1675.) godine 1667. prvi put u povijesti koristi izraz konvergentan, govoreći o konvergentnom nizu mnogokuta upisanih u kružnicu, a najkasnije 1668. je otkrio (prve članove) redova potencija za sinus, kosinus i arkustangens[4] [14, 16, 18]. Ipak, većina autora će kao utemeljitelja teorije redova potencija navesti njemačkog matematičara **Nicolausa Mercatora** (Niklaus Kauffman, 1620.–1687.), posebice zbog navoda u uvodu Newtonove *The method of fluxions and infinite series with its application to the geometry of curve-lines* (1671., objavljeno 1736.): „Budući da postoji velika sličnost između operacija s vrstama[5] i operacija s običnim brojevima, niti se čini da se one razlikuju osim u znakovima kojima se reprezentiraju, prvi bivajući opći i neodređeni, a drugi određeni i partikularni: Ne mogu nego čuditi se da nitko nije prilagodio nedavno otkrivenu doktrinu o decimalnim razlomcima[6] na sličan način za vrste (osim ako ćete izuzeti Kvadraturu hiperbole od gosp. Nicolausa Mercatora) …" [7, 17]. Mercator je naime 1668. objavio tekst *Logarithmotechnia* u kojem za određivanje površine ispod istostrane hiperbole (preciznije, onog što danas

[3]Trokutasti brojevi su prirodni brojevi koji su oblika $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

[4]Maclaurinov red za arkustangens se danas naziva Gregory-Mādhavin redom.

[5]Varijablama.

[6]Decimalni razlomci u Europu su uvedeni tek potkraj renesanse (S. Stevin, 1585.).

označavamo s $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$) koristi, riječima opisan, Mercatorov red

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

kojeg je dobio (u biti integriranjem član po član) iz geometrijskog reda $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$. Pritom je Mercator naveo i da bi se gornju sumu moglo zvati „prirodnim“ logaritmom od $1+t$ [3, 7, 16, 18, 21].[7]

Sam sir **Isaac Newton** (1643.–1727.) je već 1664. razmatrao redove te je 1665. otkrio binomni red, kojeg danas zapisujemo u obliku

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\dots\,(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n, \quad |x| < 1.$$

Newton ga je opisao u jednom pismu H. Oldenburgu 1676., koristeći za suvremenog čitatelja neobičnu notaciju:

$$(P{+}P\,Q)^{m/n} {=} P^{m/n} + \frac{m}{n} A\,Q + \frac{m-n}{2n} B\,Q + \frac{m-2n}{3n} C\,Q + \frac{m-3n}{4n} D\,Q + \dots$$

u kojoj $A, B, C, D, \dots$ predstavljaju uvijek redom neposredno prethodeći član: $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n} AQ = \frac{m}{n} P^{m/n} Q, \dots$. Newton je otkrio i druge redove potencija, primjerice za sinus i kosinus, a redove potencija je intenzivno koristio u svojoj metodi fluksija (Newtonovoj varijanti infinitezimalnog računa), posebice za ono što danas zovemo integriranjem: Newton je mnoge integrale izračunao integriranjem član po član odgovarajućih redova potencija, pri čemu nije obraćao pozornost na područje konvergencije [3, 7, 17, 18, 21].

Dobro je poznato da je neovisno o Newtonu infinitezimalni račun utemeljio i njemački filozof i matematičar **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.–1716.), kojeg je prigodom posjeta Parizu 1672. za matematiku zainteresirao C. Huygens. Huygens mu je tijekom jednog susreta zadao zadatak sumacije recipročnih trokutastih brojeva, a Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2 - \frac{1}{n+1}$, odnosno suma reda je 2. Godinu kasnije, 1673., je otkrio i Leibnizov red $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (kojeg je već bar dvije godine ranije znao J. Gregory), a taj red je skupa s također po njemu nazvanom kriteriju konvergencije alternirajućeg reda objavio 1682. Time je Leibniz prva osoba u povijesti koja je iskazala neki kriterij konvergencije [3, 8, 18].

[7] U to doba logaritmi se još nisu gledali kao inverzne funkcije eksponencijalnih funkcija, tj. kao funkcije definirane putem baze, tako da ne možemo još govoriti o tome da je Mercator razmatrao logaritam s bazom e. Štoviše, u Mercatorovo doba još ne postoji ni pojam funkcija.

Vidimo dakle da je krajem 17. stoljeća postojao već niz pojedinačnih rezultata o redovima i redovima potencija, da se donekle počelo i razmatrati pitanje i uvjeti konvergencije, no taj skup rezultata još nije bio nimalo sustavan. Sređivanje i generaliziranje opisanih rezultata dogodilo se tijekom prve polovice 18. stoljeća. Pritom, ne treba pomisliti da su svi matematičari bezrezervno prihvatili beskonačne sumacije kao nešto jasno. Konkretno, posebno je poznat paradoks kojeg je otkrio talijanski matematičar **Guido Grandi** (1671.–1742.) 1703. godine. Grandi je naime razmatrao pitanje sume reda

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

(tzv. Grandijev red). Uočio je da ta suma može „istovremeno" biti i 0 i 1:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0+0+0+\dots=0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots=1-0-0-0-\dots=1.$$

Grandi je, kao i neki drugi matematičari 18. stoljeća, zaključio da je suma Grandijevog reda $\frac{1}{2}$. Pritom je Grandi nepravilno koristio geometrijski red s kvocijentom -1 kao konvergentan, dok je primjerice Leibniz sumu $\frac{1}{2}$ argumentirao, kako sam kaže pomalo metafizički, na temelju „jednake vjerojatnosti" da je suma 0 ili 1, ovisno o tom stanemo li pri zbrajanju na parnom ili neparnom članu [1].

Dok su braća Johann i Jacob Bernoulli bili Leibnizovi prijatelji i zaslužni za širenje njegove varijante infinitezimalnog računa kontinentalnom Europom, Newtonovu varijantu na britanskom su otočju nastavili Brook Taylor i Colin Maclaurin. Sva četvorica spomenutih su dobili i rezultate o redovima odnosno redovima potencija.

Taylor i Maclaurin bili su prvi koji su redovima potencija pristupili sustavno i stoga danas i govorimo o Taylorovim odnosno Maclaurinovim redovima. Engleski matematičar **Brook Taylor** (1685.–1731.), kako smo vidjeli, nije prvi koji je razmatrao ono što danas nazivamo Taylorovim redovima. No, on je 1715. objavio utjecajan tekst *Methodus incrementorum directa et inversa*, u kojem je iskazao opći oblik razvoja dane funkcije u red potencija oko proizvoljne točke. Taj je oblik izveo kao granični slučaj Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule[8] kad „prirast nestaje". Škotski matematičar **Colin Maclaurin** (1698.–1746.) je pak 1742. objavio vrlo utjecajnu knjigu *Treatise of fluxions*, koja je prvi sustavni prikaz Newtonovog računa fluksija, a u njoj za određivanje ekstrema i točaka infleksije koristi razvoje funkcija u redove potencija oko 0. Ovim dvama britanskim matematičarima u čast po nekih sedamdesetak godina kasnije opisani redovi nazvani su Taylorovim odnosno Maclaurinovim [3, 7, 16].

[8]Formulu su otkrili, nezavisno jedan od drugoga, Gregory i Newton oko 1670.

S druge strane, braća Bernoulli, prva dva člana znamenite švicarske matematičke obitelji Bernoulli o kojoj ćemo više reći u sljedećem nastavku, su se i sami bavili redovima. Pokušali su (bezuspješno) riješiti problem sumacije reda recipročnih kvadratnih brojeva kojeg je 1644. zadao talijanski matematičar Pietro Mengoli (1626.–1686.) (zadatak je objavio 1650.). Nekoliko pokušaja određivanja te sume, uključivo Mengolijevog i Wallisovog, pokazali su se bezuspješni — red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira izrazito sporo.[9] Problem je postao šire poznat kad ga je 1689. u svom *Tractatus de seriebus infinitis* (Traktatu o beskonačnim redovima) opisao (čini se ne znajući za Mengolija) **Jacob Bernoulli** (1655.–1705.). Budući da je tekst objavljen u Baselu, rodnom gradu braće Bernoulli, zadatak određivanja zbroja $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ postao je poznat kao Baselski problem. Jacob je u navedenom tekstu uspio, usporedbom s (prepolovljenim) redom recipročnih trokutastih brojeva, dokazati da je $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2$, što implicira konvergenciju, no ništa više od prethodnika nije se približio točnoj vrijednosti sume. U istom djelu se među raznim drugim rezultatima o redovima nalazi i novi, precizan dokaz divergencije harmonijskog reda, kojeg Jacob pripisuje bratu Johannu, [2, 7, 12, 9, 24].

Johann Bernoulli bio je dobar prijatelj znamenitog švicarskog matematičara **Leonharda Eulera** (1707.–1783.) i upravo on je Euleru skrenuo pozornost na Baselski problem. Nakon što je ubrzo transformacijom u brže konvergentan red dobio aproksimaciju rješenja točno na 6 decimala, 1735. je otkrio i točno rješenje:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Iako je kasnije dao preciznije dokaze ove jednakosti, povijesno i idejno je posebno zanimljivo kako je Euler uopće došao do nje. Euler je krenuo od razvoja funkcije sinus u red potencija, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, koji podijeljen s x poprima oblik

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots.$$

što je interpretirao kao polinom beskonačnog stupnja. Budući da se poli-

[9] Toliko sporo da za izračunavanje sume na točnost od 6 decimala treba parcijalna suma od bar milijun članova [24].

nom stupnja n i slobodnim članom 1 može faktorizirati kao[10] $\left(1-\frac{x}{c_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x}{c_n}\right)$ (gdje su $c_1,\ldots,c_n$ nultočke polinoma), pri čemu je koeficijent uz x suprotna vrijednost zbroja svih recipročnih vrijednosti svih nultočaka, Euler je pretpostavio da to vrijedi i za gornji red. Budući da su nultočke funkcije sinus podijeljene s x brojevi $\pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, Euler je izjednačio

$$\begin{aligned}&1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\\&=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\ldots\\&=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\ldots\end{aligned}$$

Usporedivši koeficijente uz x^2 lijevo i desno, pri čemu je za desnu stranu pretpostavio da vrijedi tvrdnja kao i za prave polinome, dobio je

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\ldots,$$

iz čega množenjem s π^2 dobivamo da je suma reda u Baselskom problemu jednaka $\frac{\pi^2}{6}$. Kao što smo rekli, Euler je kasnije svoje tvrdnje dokazao i preciznije. No, daleko od toga da je jedini doprinos Eulera našoj temi bilo rješenje ovog problema. On je osmislio nove metode sumacije, generalizirao mnoge prethodne rezultate, razmatrao i divergentne redove, izveo redove potencija za eksponencijalne funkcije[11] i povezao ih s trigonometrijskim te tako dobio Eulerovu formulu $\cos t + i\sin t = \exp(i\,t)$, …Štoviše, upravo je Euler iz mnoštva pojedinačnih rezultata izveo sustavnu teoriju redova i redova potencija te možemo reći da je počevši od sredine 18. stoljeća ona postala zasebna teorija unutar matematičke analize [2, 3, 7, 12, 15, 24].

[10]Napominjemo da u Eulerovo doba osnovni teorem algebre još nije bio dokazan, ali su većina matematičara bili uvjereni u njegovu točnost, s tim da se razmatrala mogućnost da rješenja eventualno budu u nekom većem skupu od skupa kompleksnih brojeva. Sam Euler je dokazao osnovni teorem algebre za polinome s realnim koeficijentima stupnja najviše 6.

[11]U djelu *Introductio in analysin infinitorum* (1748.). Euler je ujedno prvi matematičar koji je logaritamske funkcije sustavno gledao kao inverze eksponencijalnih, tj. logaritme kao funkcije definirane putem baze, a i jedan od prvih koji uopće razmatra ideju funkcije kao takve. Iako nije precizno definirao funkcije, stavio ih je u fokus istraživanja iz matematičke analize i tako ovim djelom iz 1748. u biti odvojio matematičku analizu kao zasebnu matematičku disciplinu koja se bavi funkcijama.

5 Formalizacija teorije redova i redova potencija

Iako smo ovaj članak mogli završiti i s Eulerom, ipak to ne bi bilo „matematički korektno". Naime, čak i kod velikog Eulera bilo je mnogih nesavršenosti i nepreciznosti, osobito po pitanju konvergencije i divergencije redova. Specijalno, nerijetko se konvergenciju reda poistovjećivalo s konvergencijom njegovih članova prema 0 pa je (usp. harmonijski red) neki red mogao biti istovremeno konvergentan i divergentan. Bilo je potrebno još malo više od pola stoljeća da se svi potrebni pojmovi preciziraju. Među najpoznatijim matematičarima koji su upozorili na probleme u teoriji redova bio je Jean le Rond d'Alembert, koji je 1768. po prvi put jasno i otvoreno izrazio sumnju u korištenje divergentnih redova.[12] Upravo d'Alemberta je malo kasnije istaknuo Joseph-Louis Lagrange kao iznimku od površnosti ostalih njihovih suvremenika. Sam Lagrange je pak i sam istraživao redove i, počinivši grešku pretpostavivši da je svaka funkcija analitička, pokušao iskoristiti Taylorove redove za definiciju derivacije [3, 10, 14].

Prvo objavljeno djelo u kojem se pitanje konvergencije reda detaljno istražuje je članak znamenitog C. F. Gaußa (1777.–1855.) o hipergeometrijskim redovima iz 1812, no taj članak zbog neobičnog pristupa i iznimne preciznosti nije odmah privukao pozornost. Stoga se kao osobu i godinu koji su konačno razriješili navedenu problematiku uzima veliki francuski matematičar **Augustin-Louis Cauchy** (1789.–1857.) sa svojom skriptom *Cours d'Analyse* iz 1821. Tu jasno kaže da se sve redove čije se (parcijalne) sume ne približavaju određenom limesu treba zvati divergentnim, inzistira na preciznim testovima konvergencije, dokazuje da umnožak dva konvergentna reda ne mora biti konvergentan, ... Godinu ranije je otkrio i grešku u spomenutom Lagrangeovom primjeru, našavši primjer funkcije koja je beskonačno mnogo puta derivabilna u 0 (dakle, posjeduje Maclaurinov red), ali mu nije jednaka nigdje osim samo u 0.[13] Nekolicinu grešaka, previda i nesavršenosti u Cauchyjevim razmišljanjima ispravio je N. H. Abel 1826. te možemo reći da je doprinosima Cauchyja i Abela 1820-ih godina teorija redova i redova potencija konačno poprimila moderni smisao i preciznost [10, 14, 20].

6 Zaključak

Danas su redovi i redovi potencija standardni dio gradiva više matematike i uče se ne samo na studijima matematike, nego i raznih prirodnih i tehnič-

[12] D'Alembertov kriterij konvergencije ne pojavljuje se kod njega eksplicitno niti u formi sličnoj modernoj.

[13] To je funkcija definirana po dijelovima s $f(0) = 0$, $f(x) = \exp(-1/x^2)$ za $x \neq 0$.

kih, pa čak i poneke druge znanosti zbog širine njihovih primjena. To naravno ne znači da moderne učenike i studente ništa oko redova ne zbunjuje jer o njima uče u sređenom, preciznom obliku. Razmatranje povijesnog razvoja može ovdje, kao i za većinu drugih matematičkih tema, nastavnicima matematike olakšati razumijevanje teškoća u shvaćanju s kojim se učenici i studenti susreću (usp. [1]). Uostalom, zna li i svatko od nas bez pozivanja na svoj ili udžbenički autoritet objasniti probleme, primjerice, sa Zenonovim paradoksom i Grandijevim redom ili pak zašto su moderne definicije redova i njihove konvergencije takve kakve jesu? Ovim Vas pitanjem pozdravljam do sljedećih crtica iz povijesti matematike, u kojem ćemo pričati o najznamenitijoj matematičkoj „dinastiji" Bernoullija.

Literatura

[1] G. T. Bagni, *Infinite Series from History to Mathematics Education*. Colección Digital Eudoxus, 2009, `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8024217`

[2] D. Benko, *The Basel Problem as Telescoping Series*. The College Mathematics Journal 43(3) (2012) 244–250

[3] F. M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.

[4] F. M. Brückler, *π prije nego se za njega znalo*. Osječki matematički list 21(2) (2021) 151–161.

[5] F. M. Brückler, *Eudoksova metoda iscrpljivanja*. Osječki matematički list, 24(1) (2024) 133–146.

[6] F. M. Brückler, *Broj π od al-Hvarizmija do danas*. Osječki matematički list, 25(1) (2025) 77–88.

[7] F. M. Brückler, *Povijest matematike*. Online-skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2024. `https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a` (pristupljeno 11. prosinca 2025.)

[8] D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction (6th Ed)*. McGraw-Hill, 2006.

[9] W. Dunham, *The Bernoullis and the Harmonic Series*. The College Mathematics Journal, 18(1) (1987) 18–23

[10] G. Ferraro, *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*. Historia Mathematica 34 (2007) 62–88

[11] Guinness World Records, *Most accurate value of pi*, 2025. https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/66179-most-accurate-value-of-pi (pristupljeno 11. prosinca 2025.)

[12] U. Hassler, Hosseinkouchack, Me., *Basel Problem: Historical perspective and further proofs from stochastic processes*. Euleriana 2(2) (2022) 120–130. https://doi.org/10.56031/2693-9908.1032

[13] N. Huggett, *Zeno's Paradoxes*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2025 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), <https://plato.stanford.edu/archives/win2025/entries/paradox-zeno/ (pristupljeno 14. 1. 2026.)

[14] D. A. King, *A History of Infinite Series*. Doktorska disertacija, George Peabody College for Teachers, 1968., https://search.proquest.com/openview/6fcf1fd873c16e1db3770b71dfdb14fa/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

[15] M. Kline, *Euler and Infinite Series*. Mathematics Magazine 56(5) (1983) 307–314

[16] MacTutor History of Mathematics Archives. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ (pristupljeno 6. prosinca 2025.)

[17] I. Newton, *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-lines* . London, 1736.

[18] E. M. Pletan, *Convergence of infinite series; its history and applications*. Theses and Dissertations, 7008 (1953.), https://commons.und.edu/theses/7008

[19] R. Roy, *Power Series in Fifteenth-Century Kerala*. U: *Sources in the Development of Mathematics: Infinite Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-first Century*, Cambridge University Press, 2011., https://assets.cambridge.org/97805211/14707/excerpt/9780521114707_excerpt.pdf

[20] D. Ruch, *Abel and Cauchy on a Rigorous Approach to Infinite Series*. Analysis 4 (2017), https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs_analysis/4

[21] J. Stilwell, *Mathematics and its History*. Springer Science+Business Media, 2010.

[22] G. Swain, T. Dence, *Archimedes' Quadrature of the Parabola Revisited*. Mathematics Magazine, 71(2) (1998), 123–130. https://doi.org/10.2307/2691014

[23] A. C. Tinsley, *Nicole Oresme and the Revival of Medieval Mathematics*. Mathematical Association of America, 2023., https://old.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/HOMSIGMAA/2023-Adin_Charles_Tinsley.pdf (pristupljeno 15. 1. 2026.)

[24] V. S. Varadarajan, *Euler and His Work on Infinite Series*. Bulletin of the American Mathematical Society 44(4) (2007) 515–539