Mr. sc. **Svjetlana Bešlić**
Pomorski fakultet u Rijeci
Rijeka, Studentska 2

Stručni rad
UDK: 338.47: 629.544
519.6
656.614.3

DINAMIČKO PROGRAMIRANJE U OPTIMIZACIJI PRIJEVOZA KONTEJNERA MOREM

U radu je prikazana primjena dinamičkog programiranja u optimizaciji prijevoza kontejnera brodom. To je jedan od problema prijevoza tereta koji se odnosi na prijevoz različitih vrsta tereta iz jednog ishodišta do jednoga ili više odredišta. Matematički model prikazanog problema ima nelinearnu funkciju cilja i linearna ograničenja, te je za dobivanje optimalnog rješenja odabrana metoda dinamičkog programiranja.

Ključne riječi: dinamičko programiranje, prijevoz kontejnera morem

1. UVOD

Problemi prijevoza tereta razlikuju se ovisno o broju vrsta tereta za prijevoz, broju vrsta i tipova prijevoznih sredstava, broju ishodišta i odredišta te o načinu prijevoza.

Jedan je od problema prijevoza tereta koji se često javlja u praksi a podrazumijeva prijevoz određenog broja pošiljaka različite težine i različitih vrsta tereta nekim prijevoznim sredstvom iz jednog ishodišta do jednog ili više odredišta, tzv. problem ranca. Ukupna težina pošiljaka ne smije prijeći dopuštenu nosivost za odabrano prijevozno sredstvo (kamion, vlak, brod, avion i sl.). Kombinacijom različitih vrsta pošiljaka za prijevoz ostvaruje se različita dobit, odnosno različiti troškovi prijevoza. Iznos dobiti ovisi i o specifičnosti same vrste tereta i o iznosu kapaciteta koji taj teret zauzima u ukupnom kapacitetu prijevoznog sredstva.

Zadatak je rasporediti raspoloživi kapacitet prijevoznog sredstva na različite vrste tereta, odnosno donijeti odluku o broju pošiljaka pojedine vrste tereta čijim će se prijevozom ostvariti ili maksimalna dobit ili minimalni troškovi.

Funkcija cilja predstavlja maksimalnu dobit/minimalne troškove od prijevoza, a ograničenja se odnose na popunjenost kapaciteta prijevoznog sredstva pošiljkama različitih težina određenih vrsta tereta.

Matematički model za problem ove vrste može imati linearnu i nelinearnu funkciju cilja, te linearna i nelinearna ograničenja.

U praksi je čest slučaj da se u problemima prijevoza tereta radi o troškovima odnosno dobiti koji su nelinearni u odnosu na količinu tereta koja se prevozi jer se, primjerice, odobravaju popusti na veće količine. U tim se slučajevima troškovi/dobiti za određene količine tereta mogu zadati skupom diskretnih vrijednosti te se preporučuje korištenje metode dinamičkog programiranja.

2. OPTIMIZACIJA PRIJEVOZA KONTEJNERA MOREM

Opis problema

Problem prijevoza tereta javlja se u svakoj grani prometa: cestovnom, željezničkom, pomorskom, zračnom i riječnom prometu. Optimalno rješenje takva problema izbor je najpovoljnije varijante prijevoza s obzirom na prijevozne troškove ili dobiti, odnosno ostvarenje najmanjih prijevoznih troškova ili najveće dobiti.

U morskoj kontejnerskoj tehnologiji problem prijevoza pojavljuje se kada treba organizirati prijevoz kontejnera morskim putem iz više luka ukrcaja u više luka iskrcaja uz minimalnu udaljenost (vrijeme u plovidbi), maksimalnu dobit ili minimalne troškove prijevoza. Strukturu prijevoza kontejnerskog broda čine isključivo kontejneri, uz eventualnu mogućnost prijevoza i RO/RO tereta. Kontejneri koji se ukrcavaju na kontejnerski brod jednoznačno su međunarodno standardizirani (duljina, širina i visina) što omogućuje postavljanje uvjeta koji trebaju biti zadovoljeni u svim slučajevima pri postavljanju modela.

Za određivanje optimalne strukture prijevoza kontejnera morem, od ukupne količine kontejnera koji su na raspolaganju u luci ukrcaja, treba odabrati odgovarajući broj kontejnera raznih tipova (vrsta), masa i eventualno RO/RO teret tako da se ostvari maksimalna dobit broda ili minimalni trošak prijevoza, a da se što više iskoristi nosivost i prijevozni kapacitet broda.

Za ilustraciju je uzet primjer određivanja optimalne strukture prijevoza kontejnerskog broda, pri čemu je za ulazne podatke korištena postojeća literatura o kontejnerskom prometu [4, str. 67.].

Kontejnerskim brodom nosivosti 29.434 tona, odnosno prijevoznog kapaciteta 1762 TEU-a treba prevesti određeni broj od četiri različite vrste kontejnera. U luci ukrcaja nalazi se raznovrstan teret složen u kontejnerima, čije su mase i dnevna dobit po jednom kontejneru dane u tablici 1.

Tablica 1. Jedinična masa i dobit po vrstama kontejnera

Vrsta kontejnera	Jedinična masa (u tonama)	Dobit po jednom kontejneru (u US$)
20′ OT	15	63
20′ TC	16	69
40′ RF	25	72
40′ DB	21	67

Napomena: 20′ OT (open top, duljine 20 stopa), 20′ TC (tank container, duljine 20 stopa), 40′ RF (refrigerated container, duljine 40 stopa), 40′ DB (dry box container, duljine 40 stopa)
Izvor: S. Kos [4, str. 67].

Treba odrediti broj pojedine vrste kontejnera čijim se prijevozom ostvaruje maksimalna dobit i s kojima se popunjava nosivost broda. U obzir je, radi lakšeg računanja, uzet samo jedan dio nosivosti kontejnerskog broda i to 200 tona, koliko je i rezervirano za jednog pošiljatelja.

Jedan od načina rješavanja ovog problema je metoda dinamičkog programiranja.

Postavljanje modela

Dinamičko je programiranje jedna od metoda operacijskih istraživanja, kojom se određuje optimalna strategija odlučivanja višefaznih procesa u slučajevima donošenja međusobno povezanih odluka za pojedine godine određenog razdoblja ili za pojedine aktivnosti zadanog problema. Tom metodom problem se rješava po fazama tako da se u proračunu svake faze koriste optimalne vrijednosti dobivene u prethodnoj fazi. Taj je postupak poznat kao Bellmanov princip kojim se dobiva slijed optimalnih odluka [3, str. 98.].

Postupak rješavanja problema metodom dinamičkog programiranja je sljedeći [2, str. 322.]:

1. definiranje funkcije optimalnog prihoda odnosno troškova
2. izvođenje funkcionalne jednadžbe za funkciju optimalnog prihoda odnosno troškova
3. korištenje funkcionalne jednadžbe da bi se odredile odluke koje predstavljaju optimalnu politiku promatranog problema.

Drugim riječima, potrebno je definirati problem i postaviti matematički model procesa, tj. funkciju cilja i ograničenja. Izvod za funkcionalne jednadžbe može se naći u literaturi iz dinamičkog programiranja [7, str. 221.].

Prema načinu raspodjele izvora, problemi dinamičkog programiranja mogu se podijeliti u dvije grupe:

a) problemi jednostavne raspodjele
b) problemi složene raspodjele.

Problem prijevoza tereta može se rješavati i kao problem složene i kao problem jednostavne raspodjele. Ako se rješava kao problem složene raspodjele, matematički model, koji se sastoji od funkcije cilja i ograničenja, glasi [2, str. 328.]:

$$f_N(Q) = \max_{0 \le x_N \le Q/a_N} (A),\ \mathrm{N}=1,2,\ldots,$$ – ako treba maksimizirati funkciju cilja,

odnosno

$$f_N(Q) = \min_{0 \le x_N \le Q/a_N} (A),\ \mathrm{N}=1,2,\ldots,$$ – ako treba minimizirati funkciju cilja, gdje je

$$A = g_N(x_N) + f_{N-1}(Q - a_N x_N),$$

uz ograničenja:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_N x_N = Q$$

$$x_i \ge 0; \quad i = 1, \ldots, N; \quad x_i \in N_0 ,$$

uzimajući u obzir sljedeće oznake:

Q – kapacitet prijevoznog sredstva

i – vrsta tereta, $i = 1,\ldots, N$

a_i – veličina pošiljke i-tog tereta

x_i – broj pošiljaka i-te vrste tereta

$g_i(x_i)$ – dobit ili trošak od prijevoza i-te vrste tereta koji je ovisan o količini i-te vrste tereta koja se prevozi

$f_N(Q)$– maksimalna dobit (minimalni troškovi) koja se ostvaruje prijevozom ukupno N vrsta tereta s prijevoznim sredstvom kapaciteta Q.

Funkcija cilja u slučaju prijevoza kontejnera može se maksimizirati, ako je cilj ostvariti maksimalan prihod (dobit) broda, ili minimizirati, ako je cilj ostvariti minimalne troškove. Budući da je u eksploataciji skupih kontejnerskih brodova od iznimnog značenja ostvarenje što većeg profita jer je i sama kontejnerizacija kao tehnološko-transportni proces vrlo skupa i visokoprofitabilna grana morske kontejnerske tehnologije, kao kriterij se najčešće odabire maksimalna dobit broda, te se funkcija cilja maksimizira.

Za korištenje tako postavljenog matematičkog modela za problem prijevoza kontejnera morem, pretpostavka je da na pomorskom tržištu ima na raspolaganju dovoljan broj kontejnera različitih vrsta, masa i veličina i to više od prijevoznog kapaciteta broda.

Matematički model za konkretan primjer formuliran je kao specijalan slučaj [9, str. 3.–39.] prethodno danog općeg modela dinamičkog programiranja složene raspodjele. Zadano je da treba maksimizirati funkciju cilja i korišteni su podaci iz tablice 1., te matematički model glasi:

Funkcija cilja: $\max F(x)$

$$15x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 21x_4 \le 200$$

Ograničenja: $x_1 \le 13,\ x_2 \le 12,\ x_3 \le 8,\ x_4 \le 9$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 42$$

x_1, x_2, x_3, x_4 - cjelobrojne pozitivne vrijednosti.

Za definiranje rekurzivnih relacija uvode se sljedeće oznake:

Q – nosivost broda (u tonama)

x_i – broj kontejnera i-te vrste

a_i – jedinična težina i-te vrste kontejnera

g_i – jedinična dobit od prijevoza i-te vrste kontejnera

$f_i(Q)$ – funkcija dobiti koju ostvaruje kontejnerski brod prijevozom x_1, x_2, x_3, x_4 kontejnera.

Iz uvjeta cjelobrojnosti varijabli x_i slijedi:

$$x_i \le [Q / a_i]\text{, gdje [ ] označava najveće cijelo,}$$

što dalje znači da je:

$$0 \le x_1 \le 13;\ 0 \le x_2 \le 12;\ 0 \le x_3 \le 8;\ 0 \le x_4 \le 9.$$

Rekurzivna relacija definirana je izrazom:

$$f_i(Q) = \max_{0 \le x_i \le Q/a_i} (A), \text{ gdje je}$$

$$A = g_i(x_i) + f_{i-1}(Q - a_i x_i) .$$

Funkcija dobiti za pojedinu vrstu kontejnera glasi:

$$f_1(Q) = \max_{0 \le x_1 \le 13} (g_1 x_1),$$

$$f_2(Q) = \max_{0 \le x_2 \le 12} (g_2 x_2 + f_1(Q - 16x_2)),$$

$$f_3(Q) = \max_{0 \le x_3 \le 8} (g_3 x_3 + f_2(Q - 25x_3)),$$

$$f_4(Q) = \max_{0 \le x_4 \le 9} (g_4 x_4 + f_3(Q - 21x_4)).$$

Postupak rješavanja

Za svaku vrstu kontejnera posebno formiraju se tablice dobiti u kojima se nosivost kreće u intervalima koji ovise o jediničnoj težini svakog kontejnera. Dobit se za prijevoz do 10 TEU-a ponaša linearno s količinom (puna cijena po jednom kontejneru), a na količinu od 10 TEU-a i više se odobrava popust u iznosu od 5%.

Za $i=1$ (prva vrsta kontejnera), funkcija maksimalne dobiti glasi:

$$f_1(Q) = \max_{0 \le x_1 \le 13} (g_1 x_1).$$

Kod metode dinamičkog programiranja za prvu fazu, koja u ovom primjeru predstavlja prvu vrstu kontejnera, funkcija maksimalne dobiti jednaka je funkciji dobiti, budući da nema prethodne faze o kojoj bi maksimalna dobit ovisila (tablica 2.).

Tablica 2. Dobit za I. vrstu kontejnera

Q	x_1	$g_1(Q)$
0 – 14	0	0
15 – 29	1	63
30 – 44	2	126
45 – 59	3	189
60 – 74	4	252
75 – 89	5	315
90 – 104	6	378
105 – 119	7	441
120 – 134	8	504
135 – 149	9	567
150 – 164	10	598
165 – 179	11	658
180 – 194	12	718
195 – 200	13	778

Prema tome, $f_1(Q) = 778$ US$ za $x_1 = 13$.

Za i=2 (prva i druga vrsta kontejnera), funkcija maksimalne dobiti glasi:

$$f_2(Q) = \max_{0 \le x_2 \le 12} (g_2 x_2 + f_1(200 - 16x_2)),$$

a tablica 3. sadržava jediničnu dobit za drugu vrstu kontejnera i maksimalnu dobit koja se ostvaruje prijevozom dvije vrste kontejnera.

Tablica 3. Jedinična dobit za II. i maksimalna dobit za I. i II. vrstu kontejnera

Q	x_2	$g_2(Q)$	$f_2(Q)= g_2(Q)+ f_1(200\text{-}16x_2)$	x_1
0 – 15	0	0	0 + f_1(200) = 0+778 = 778	13
16 – 31	1	69	69 + f_1(184) = 69+718 = 787	12
32 – 47	2	138	138 + f_1(168) = 138+658 = 796	11
48 – 63	3	207	207 + f_1(152) = 207+598 = 805	10
64 – 79	4	276	276 + f_1(136) = 276+567 = 843	9
80 – 95	5	345	345 + f_1(120) = 345+504 = **849**	8
96 – 111	6	414	414 + f_1(104) = 414+378 = 792	6
112 – 127	7	483	483 + f_1 (88) = 483+315 = 798	5
128 – 143	8	552	552 + f_1 (72) = 552+252 = 804	4
144 – 159	9	621	621 + f_1 (56) = 621+189 = 810	3
160 – 175	10	655	655 + f_1 (40) = 655+126 = 781	2
176 – 191	11	721	721 + f_1 (24) = 721+ 63 = 784	1
192 – 200	12	786	786 + f_1 (8) = 786+ 0 = 786	0

Slijedi da je $f_2(Q) = 849$ US$, za $x_1 = 8$ i $x_2 = 5$.

Za i=3 (prva, druga i treća vrsta kontejnera), funkcija maksimalne dobiti glasi:

$$f_3(Q) = \max_{0 \le x_3 \le 8} (g_3 x_3 + f_2(Q - 25x_3)),$$

te se tablica 4. odnosi na jediničnu dobit za treću vrstu kontejnera i maksimalnu dobit koja se ostvaruje prijevozom tri vrste kontejnera.

Tablica 4. Jedinična dobit za III. vrstu i maksimalna dobit za tri vrste kontejnera

Q	x_3	$g_3(Q)$	$f_3(Q)= g_3(Q)+ f_2(200\text{-}25x_3)$	x_2	x_1
0 – 24	0	0	0 + f_2(200) = 0 +849 = **849**	5	8
25 – 49	1	72	72 + f_2(175) = 72 +747 = 819	9	2
50 – 74	2	144	144 + f_2(150) = 144 +621 = 765	9	0
75 – 99	3	216	216 + f_2(125) = 216 +534 = 750	5	3
100 – 124	4	288	288 + f_2(100) = 288 +414 = 702	6	0
125 – 149	5	342	342 + f_2 (75) = 342 +315 = 657	0	5
150 – 174	6	410	410 + f_2 (50) = 410 +207 = 617	3	0
175 – 199	7	478	478 + f_2 (25) = 478 + 69 = 547	1	0
200	8	547	547 + f_2 (0) = 547 + 0 = 547	0	0

Znači, $f_3(Q) = 849$ US$, za $x_1 = 8$, $x_2 = 5$ i $x_3 = 0$.

Kada je $x_3 = 0$, vrijednost $f_3(Q)$ u tablici 4 određuje se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f_3(200) &= x_3 g_3 + f_2(Q - 25x_3) \\ &= 0 + f_2(200 - 25 \cdot 0) \\ &= 0 + f_2(200) = 0 + 849 = 849 \end{aligned}$$

Za $x_3 = 1$:

$$\begin{aligned} f_3(200) &= x_3 g_3 + f_2(Q - 25x_3) \\ &= 72 + f_2(200 - 25 \cdot 1) \\ &= 72 + f_2(175) = 72 + 747 = 819 \end{aligned}$$

Vrijednost $f_2(175)$ se mora posebno izračunati te se formira nova tablica (tablica 4.1) koja se popunjava na temelju formule:

$$f_2(175) = \max_{0 \le x_2 \le 10} (g_2 x_2 + f_1(175 - 16x_2)).$$

Gornja granica za x_2, odnosno najveća vrijednost koju x_2 može poprimiti iznosi 10, što je dobiveno tako da se raspoloživi kapacitet od 175 t podijelio sa 16 t, koliko iznosi jedinična masa II. tipa kontejnera i uzet je cijeli broj budući da se radi o jedinicama kontejnera. Analogno se za gornju granicu uzima najveći cijeli broj i za daljnje intervale u kojima se kreću vrijednosti za x_2, x_3 i x_4.

Tablica 4.1

x_2	$f_2(175) = g_2(Q) + f_1(175-16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(175) = 0+658 = 658	11
1	69 + f_1(159) = 69+598 = 667	10
2	138 + f_1(143) = 138+567 = 705	9
3	207 + f_1(127) = 207+504 = 711	8
4	276 + f_1(111) = 276+441 = 717	7
5	345 + f_1 (95) = 345+378 = 723	6
6	414 + f_1 (79) = 414+315 = 729	5
7	483 + f_1 (63) = 483+252 = 735	4
8	552 + f_1 (47) = 552+189 = 741	3
9	621 + f_1 (31) = 621+126 = 747	2
10	655 + f_1 (15) = 655+ 63 = 718	1

Maksimalna vrijednost funkcije $f_2(175)$ iznosi 747 US$ te se za tu vrijednost očitavaju vrijednosti $x_2 = 9$ i $x_1 = 2$.

Za $x_3 = 2$: $f_3(200) = 144 + f_2(150)$.

Vrijednost $f_2(150)$ dobiva se na temelju formule:

$$f_2(Q) = \max_{0 \le x_2 \le 9} (g_2 x_2 + f_1(150 - 16x_2)),$$

te se za izračunavanje te vrijednosti formira tablica 4.2.

Tablica 4.2

x_2	$f_2(150) = g_2(Q) + f_1(150\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(150) = 0+598 = 598	10
1	69 + f_1(134) = 69+504 = 573	8
2	138 + f_1(118) = 138+441 = 579	7
3	207 + f_1(102) = 207+378 = 585	6
4	276 + f_1 (86) = 276+315 = 591	5
5	345 + f_1 (70) = 345+252 = 597	4
6	414 + f_1 (54) = 414+189 = 603	3
7	483 + f_1 (38) = 483+126 = 609	2
8	552 + f_1 (22) = 552+ 63 = 615	1
9	621 + f_1 (6) = 621+ 0 = **621**	0

Znači, uzima se da je $f_2(150) = 621$ US\$, za $x_2 = 9$ i $x_1 = 0$.

Analogno se izračunavaju vrijednosti $f_2(125)$, $f_2(100)$, $f_2(75)$, $f_2(50)$, $f_2(25)$ i $f_2(0)$, čiji se postupak dobivanja nalazi u tablicama 4.3 – 4.7.

$$x_3 = 3: \quad f_2(125) = \max_{0 \le x_2 \le 7}(g_2 x_2 + f_1(125 - 16x_2)).$$

Tablica 4.3

x_2	$f_2(125) = g_2(Q) + f_1(125\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(125) = 0+504 = 504	8
1	69 + f_1(109) = 69+441 = 510	7
2	138 + f_1 (93) = 138+378 = 516	6
3	207 + f_1 (77) = 207+315 = 522	5
4	276 + f_1 (61) = 276+252 = 528	4
5	345 + f_1 (45) = 345+189 = **534**	3
6	414 + f_1 (29) = 414+ 63 = 477	1
7	483 + f_1 (13) = 483+ 0 = 483	0

Max $f_2(125) = 534$ US\$, za $x_2 = 5$ i $x_1 = 3$.

$$\text{Za } x_3 = 4: \quad f_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le 6}(g_2 x_2 + f_1(100 - 16x_2))$$

Tablica 4.4

x_2	$f_2(100) = g_2(Q) + f_1(100\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(100) = 0+378 = 378	6
1	69 + f_1 (84) = 69+315 = 384	5
2	138 + f_1 (68) = 138+252 = 390	4
3	207 + f_1 (52) = 207+189 = 396	3
4	276 + f_1 (36) = 276+126 = 402	2
5	345 + f_1 (20) = 345+ 63 = 408	1
6	414 + f_1 (4) = 414+ 0 = **414**	0

Max $f_2(100) = 414$ US\$, za $x_2 = 6$ i $x_1 = 0$.

$$\text{Za } x_3 = 5: \quad f_2(75) = \max_{0 \le x_2 \le 4} (g_2 x_2 + f_1(75 - 16x_2))$$

Tablica 4.5

x_2	$f_2(75)= g_2(Q)+ f_1(75\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(75) = 0+315 = 315	5
1	69 + f_1(59) = 69+189 = 258	3
2	138 + f_1(43) = 138+126 = 264	2
3	207 + f_1(27) = 207+ 63 = 270	1
4	276 + f_1(11) = 276+ 0 = 276	0

Max $f_2(75) = 315$ US\$, za $x_2 = 0$ i $x_1 = 5$.

$$\text{Za } x_3 = 6: \quad f_2(50) = \max_{0 \le x_2 \le 3} (g_2 x_2 + f_1(50 - 16x_2)).$$

Tablica 4.6

x_2	$f_2(50)= g_2(Q)+ f_1(50\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(50) = 0+189 = 189	3
1	69 + f_1(34) = 69+126 = 195	2
2	138 + f_1(18) = 138+ 63 = 201	1
3	207 + f_1 (2) = 207+ 0 = 207	0

Max $f_2(50) = 207$ US\$, za $x_2 = 3$ i $x_1 = 0$.

$$\text{Za } x_3 = 7: \quad f_2(25) = \max_{0 \le x_2 \le 1} (g_2 x_2 + f_1(25 - 16x_2))$$

Tablica 4.7

x_2	$f_2(25)= g_2(Q)+ f_1(25\text{-}16x_2)$	x_1
0	0 + f_1(25) = 0+63 = 63	1
1	69 + f_1 (9) = 69+ 0 = 69	0

Max $f_2(25) = 69$ US\$, za $x_2 = 1$ i $x_1 = 0$.

$$\text{Za } x_3 = 8: \quad f_2(0) = (g_2 x_2 + f_1(0)) = 0.$$

Prethodno prikazani postupak poslužio je za popunjavanje tablice 4.

Za i=4 (prva, druga, treća i četvrta vrsta kontejnera), funkcija maksimalne dobiti glasi:

$$f_4(Q) = \max_{0 \le x_4 \le 9} (g_4 x_4 + f_3(Q - 21x_4)),$$

a u tablici 5. prikazana je jedinična dobit za četvrtu vrstu kontejnera i maksimalna dobit koja se ostvaruje prijevozom sve četiri vrste kontejnera.

Tablica 5. Jedinična dobit za IV. vrstu i maksimalna dobit za sve četiri vrste kontejnera

Q	x_4	$g_4(Q)$	$f_4(Q)= g_4(Q)+ f_3(200\text{-}21x_3)$	x_3	x_2	x_1
0 – 20	0	0	0 + f_3(200) = 0+849 = **849**	0	5	8
21 – 41	1	67	67 + f_3(179) = 67+721 = 788	0	11	1
42 – 62	2	134	134 + f_3(158) = 134+624 = 758	1	8	4
63 – 83	3	201	201 + f_3(137) = 201+555 = 756	1	7	5
84 – 104	4	268	268 + f_3(116) = 268+483 = 751	0	7	5
105 – 125	5	318	318 + f_3 (95) = 318+348 = 666	1	4	9
126 – 146	6	381	381 + f_3 (74) = 381+279 = 660	1	3	10
147 – 167	7	445	445 + f_3 (53) = 445+207 = 652	0	3	10
168 – 188	8	509	509 + f_3 (32) = 509+138 = 647	0	2	11
189 - 200	9	572	572 + f_3 (11) = 572+ 0 = 572	0	0	13

Vrijednosti $f_3(200), f_3(179), ..., f_3(11)$, u tablici 5., dobivaju se analogno kao vrijednosti iz tablice 4., tako da se formiraju pomoćne tablice za njihovo izračunavanje u kojima se odabire maksimalan iznos funkcije i za tu vrijednost se očita koliko su x_3, x_2 i x_1.

Na temelju rezultata iz tablice 5. može se očitati rješenje ovog problema koje glasi:

$$f_4(Q) = 849 \text{ US\$, za } x_1 = 8,\ x_2 = 5, x_3 = 0 \text{ i } x_4 = 0.$$

Analiza rješenja

Prijevozom četiri vrste kontejnera, uz dana polazna obilježja pojedine vrste kontejnera i raspoloživi kapacitet broda, može se ostvariti maksimalna dobit u iznosu od 849 US$. Optimalno rješenje dobiveno je kombinacijom prijevoza 8 kontejnera I. tipa (20′ OT) i 5 kontejnera II. tipa (20′ TC). Optimalan program ne uključuje prijevoz kontejnera treće i četvrte vrste (40′ DB i 40′RF).

Tako dobiveno rješenje, gdje je broj i jedne i druge vrste kontejnera manji od 10 jedinica, upućuje na zaključak da nije ni došao do izražaja odobreni popust na veće količine prevezenih kontejnera. Budući da se dobit do one količine kontejnera za koju nije odobren popust (10 TEU-a) ponaša linearno, može se zaključiti da bi se do istog rješenja došlo metodom linearnog programiranja, ali s obzirom na to da se radi o diskretnim vrijednostima (broj kontejnera), trebalo bi se koristiti metodom cjelobrojnog linearnog programiranja.

4. ZAKLJUČAK

Optimalno rješenje problema prijevoza tereta koji se javlja u svim granama prometa, predstavlja izbor najpovoljnije varijante prijevoza s obzirom na prijevozne troškove ili dobiti, odnosno ostvarenje najmanjih prijevoznih troškova ili najveće dobiti.

Ovisno o načinu prijevoza tereta odnosno o broju vrsta tereta, vrsta i tipova prijevoznih sredstava te broju ishodišta i odredišta, ima više različitih tipova problema prijevoza tereta. Zbog nedovoljne zastupljenosti u literaturi, a česte zastupljenosti u praksi, u ovom radu je pažnja posvećena problemu prijevoza više različitih vrsta tereta iz jednog ishodišta do jednog odredišta (tzv. problemu ranca) i njegovu rješavanju s pomoću dinamičkog programiranja.

Navedeni se problem u morskoj kontejnerskoj tehnologiji javlja kada treba organizirati prijevoz više vrsta kontejnera morskim putem iz luke ukrcaja u luku iskrcaja tako da se odgovarajućim odabirom broja i vrste kontejnera za prijevoz ostvari maksimalna dobit od prijevoza i što više iskoristi nosivost broda.

Budući da su pojedinačne dobiti za prijevoz pojedinih vrsta kontejnera u konkretnim slučajevima uglavnom nelinearne u odnosu na njihov broj (zbog raznih popusta, olakšica, stimulacija i sl. na veće količine) raspoređivanje kontejnera ne može se riješiti linearnim programiranjem, te je preporučeno rješavanje metodom dinamičkog programiranja.

Problem prijevoza kontejnera riješen je kao problem složene raspodjele, za koji matematički model ima nelinearnu funkciju cilja i ograničenja u obliku linearne funkcije.

Prikazana metodologija i postupak rješavanja može se koristiti u određivanju optimalne strukture prijevoza i u drugim prometnim granama.

LITERATURA

[1] R. Bronson, Operations Research, McGraw Hill, 1982.
[2] S. Dobrenić, Operativno istraživanje, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1978.
[3] D. Kalpić, V Mornar, Operacijska istraživanja, ZEUS, Zagreb, 1996.
[4] S. Kos, Prilog rješavanju problematike morske kontejnerske transportne tehnologije, magistarski rad, Fakultet za pomorstvo i saobraćaj, Rijeka, 1991.
[5] Ž. Panian, Dinamičko programiranje, Ekonomski analitičar, Zagreb, 1980.
[6] H. Pašagić, Matematičko modeliranje i teorija grafova, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 1998.
[7] J. Petrić, Operaciona istraživanja, knjiga I, Savremena administracija, Beograd, 1976.
[8] R. Petrović, Specijalne metode u optimizaciji sistema, Tehnička knjiga, Beograd, 1977.
[9] N. Šakić, Č. Oluić, D. Benić, Operacijska istraživanja u multimodalnom transportu, Autorizirana predavanja, Fakultet za pomorstvo i saobraćaj, Rijeka, 1988.
[10] J. Tomić, Zbirka zadataka iz operacionih istraživanja, IRO "Privredna štampa", Beograd, 1982.
[11] A. Vadnal, Diskretno dinamično programiranje, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1976.
[12] T. Zečević, Operaciona istraživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1974.
[13] Z. Zenzerović, Model planiranja prekrcajnih procesa u morskoj luci, Zbornik radova Pomorskog fakulteta, Pomorski fakultet u Rijeci, Rijeka, 1993.

Summary

DYNAMIC PROGRAMMING IN OPTIMIZING THE TRANSPORT OF CONTAINERS BY SEA

The paper aims at presenting the application of dynamic programming in optimizing the transport of containers by sea. This is one of the problems when dealing with the transport of different types of containers from one point of departure to one or more destinations. The mathematical model of the problem presented in this paper consists of a non-linear criterion function and of linear constraints. Therefore, the dynamic programming method has been chosen in order to get an optimum solution.

Key words: dynamic programming, transport of containers by sea.