Mica Savić
Rijeka, Udatnoga 6

Stručni članak
UDK: 311: 565.2 (497.5: 497.4)
338.47: 656.2 (497.5: 497.4)

LINEARNE NEPRISTRANE OCJENE I METODA NAJMANJIH KVADRATA

Statističko modeliranje linearnim nepristranim ocjenama i metoda najmanjih kvadrata koriste se pri ocjenjivanju nepoznatih parametara razdiobe obilježja populacije na temelju odabranog uzorka. Dok se linearne nepristrane ocjene mogu primjenjivati manje-više uspješno samo kod linearne ovisnosti, metoda najmanjih kvadrata primjenjuje se i u slučajevima nelinearne ovisnosti. U ovom radu posebna je pažnja posvećena metodi najmanjih kvadrata. Cilj je rada pokazati pogodnost metode najmanjih kvadrata za izračunavanje i opisivanje problema iz raznih oblasti za pitanja koja se mogu izraziti kao problemi ocjenjivanja nepoznatih parametara razdiobe obilježja. Primjena metode najmanjih kvadrata prikazana je na primjeru usporedbe željezničkoga teretnog prometa Republike Hrvatske i Republike Slovenije.

Ključne riječi: metoda najmanjih kvadrata, linearne nepristrane ocjene, željeznički promet

1. UVOD

U ovom radu bit će prikazano *ocjenjivanje parametara* s pomoću linearnih nepristranih ocjena i metode najmanjih kvadrata. Obilježje populacije slučajna je varijabla koja ima neku razdiobu. Kada je poznata vrsta *razdiobe slučajne varijable* (npr. uniformna, eksopnencijalna, normalna, binomna, Poissonova itd.), ali njezini parametri nisu, parametri se ocjenjuju na osnovi prostog, slučajnog uzorka. Ocjenjivanje na osnovi uzorka iz populacije s obilježjem X izbor je neke statistike $\hat{\theta}(X)$, čijom se konkretnom vrijednosti $\hat{\theta}(X)$ za realizaciju $X=x$ ocjenjuje parametar θ.

Ocjenjivanje pojedinih parametara kao što su funkcije *matematičkog očekivanja i disperzije* često se obavlja s pomoću linearnih nepristranih ocjena. Linearne nepristrane ocjene podrazumijevaju da je model na temelju kojega se određuje nepoznati parametar linearna funkcija, dok se za nelinearne funkcije upotrebljavaju druge metode. Jedna je od najpoznatijih i često korištenih metoda za ocjenjivanje nepoznatih parametara metoda najmanjih kvadrata. Najveća je prednost te metode njezina jednostavnost. S pomoću metode najmanjih kvadrata mogu se ocjenjivati parametri na temelju linearne, ali i nelinearne ovisnosti.

U radu će biti opisan i problem linearnih nepristranih ocjena i metode najmanjih kvadrata preciznim prikazivanjem načina rješavanja tih problema. Bit će prikazana i primjena metode najmanjih kvadrata na konkretnom primjeru. Nakon toga je provedeno poopćenje metode najmanjih kvadrata. Na kraju rada raspravlja se i o razlozima korištenja linearnih nepristranih ocjena i metode najmanjih kvadrata pri ocjenjivanju nepoznatih parametara.

2. PROBLEM LINEARNIH NEPRISTRANIH OCJENA I METODE NAJMANJIH KVADRATA

Problem linearnih nepristranih ocjena

U skupu linearnih procjenitelja traže se nepristrane ocjene parametara. Ocjena je nepristrana ako vrijedi: $E\hat{\theta}(X) = \theta$. Nepristranost ocjene jamči da je ocjena centrirana oko vrijednosti traženoga nepoznatog parametra. Ako je matematičko očekivanje obilježja populacije, a promatrani uzorak je $X=(X_1,\ldots,X_n)$, neka je procjenitelj $\hat{\theta}(X)$ linearan, tj.

$$\hat{\theta}(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j. \tag{1}$$

Mora biti zadovoljen uvjet nepristranosti $E\,\hat{\theta}(X) = \theta$. Iz formule (1) proizlazi

$$E\hat{\theta}(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j EX_j = \theta \sum_{j=1}^{n} c_j. \tag{2}$$

Kao što se vidi iz formule (2), da bi uvjet nepristranosti bio ispunjen nužno je $\sum_{j=1}^{n} c_j = 1$.

Sve statistike koje zadovoljavaju taj uvjet, nazivaju se *linearne nepristrane ocjene* za promatrani parametar θ [1, str. 113.].

Budući da takvih statistika ima više, pri nalaženju optimalne ocjene uvodi se i kriterij minimuma disperzije: $D\hat{\theta}(X) = min$. Dakle,

$$D\hat{\theta}(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = min. \tag{3}$$

Da bi relacija (3) bila na snazi, $\sum_{j=1}^{n} c_j^2$ mora biti minimalan. Slijedi da funkciju

$$f(c) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 - \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} c_j - 1\right) \tag{4}$$

moramo minimizirati; nužni uvjet egzistencije ekstrema funkcije $f(c)$ daje:

$$\frac{\partial f}{\partial c_j} = 2c_j - \alpha = 0 \Rightarrow c_j = \frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1\sum_{j-1}^{n} c_j = 0$$

Nakon kraćeg računanja dobije se da je $\alpha = \frac{2}{n}$, tj. $c_j = \frac{1}{n}$.

Napokon iz (1) slijedi:

$$\hat{\theta}(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}_n, \tag{6}$$

a to znači da je linearna nepristrana ocjena s minimalnom disperzijom uzoračka sredina promatranog uzorka.

Metoda najmanjih kvadrata

Neka je $X=(X_1,...,X_n)$ odabrani uzorak promatrane populacije. Uglavnom linearni model piše se u matričnom obliku, pa kao takav ima oblik

$$X = A\theta + e. \tag{7}$$

Za taj model vrijedi

$$E(X) = A\theta; \quad D(X) = \sigma^2. \tag{8}$$

Zna se da je $A\theta$ regresijska matrica, σ je veličina koja predstavlja srednje kvadratno raslojavanje slučajne varijable X, e_j j-ta greška odstupanja, $e=(e_1,...,e_n)^T$ vektor greške, matrica $A=(a_{ij})_{nxp}$ kontroliranih (poznatih) varijabli, $\theta=(\theta_1,...,\theta_p)^T$ srednja vrijednost odabrane populacije.

Model (7) koji zadovoljava uvjete iz (8) naziva se *opći linearni model*. Obično se kraće označava kao:

$(X, A\theta, \sigma^2, I_n)$, vidi pobliže [1, str. 115 – 116.]. (9)

Najbolja je srednja kvadratna ocjena parametra θ, ako se primijeni metoda najmanjih kvadrata, ona vrijednost $\hat{\theta}$ koja je minimum kvadratne forme

$$Q(X;\theta) = (X - A\theta)^T (X - A\theta). \tag{10}$$

Da bi se minimizirao (10), potrebno ga je derivirati po θ, a zatim taj izraz izjednačiti s 0. Dakle, iz

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = -A^T (X - A\theta) = 0$$

dobije se

$$\begin{aligned} -A^T X + A^T A\theta &= 0 \\ A^T A\theta &= A^T X \\ \hat{\theta} &= (A^T A)^{-1} A^T X, \end{aligned} \tag{11}$$

a to je najbolja ocjena najmanjih kvadrata za θ (linearna, nepristrana, s najmanjom disperzijom).

Primjena teorema Gauss-Markova u linearnome modelu

Teorem Gauss-Markova kaže da je, kada se provodi ocjenjivanje parametara u linearnom modelu (7) koji zadovoljava uvjete (8), najbolja linearna ocjena (BLUE-best linear unbiased estimator) ona koja se dobije metodom najmanjih kvadrata jer ima najmanju disperziju.

Kod općeg linearnog modela (9) postoji jedinstvena ocjena najmanjih kvadrata $\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T X$ za θ, ako je $rang(A)=p$ (što znači da je $det\ A \neq 0$). Takva je ocjena linearna, nepristrana ocjena s minimalnom disperzijom.

Potrebno je obratiti posebnu pažnju na sljedeće činjenice:

1. Matrica $A^T A$ je simetrična $p \times p$ matrica ranga p (maksimalnog ranga), što znači da je $det\ A^T A \neq 0$ pa inverz matrice $A^T A$ postoji, čime je dokazano da θ postoji.
2. Ocjena je linearna jer je promatrana funkcija linearna.
3. Nepristranost:

Ocjena $\hat{\theta}$ je nepristrana jer

$$E\hat{\theta}(X) = (A^T A)^{-1} A^T E(X) = (A^T A)^{-1} A^T A\theta =$$
$$= A^{-1} \underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{I} A\theta = \underbrace{A^{-1} I A}_{I} \theta =$$
$$= I \cdot I \cdot \theta = \theta$$

4. Minimum disperzije:

neka je $\widetilde{\theta} = BX$ druga nepristrana ocjena za θ, također predstavljena u matričnom obliku. Budući da je

$$E(\widetilde{\theta}) = BE(X) = BA\theta = \theta\,, \tag{12}$$

što slijedi iz uvjeta općega linearnog modela, izraz (12) stvarno će zadovoljavati uvjet nepristranosti ocjene, samo ako je BA jedinična matrica ($BA=I$).

Potrebno je usporediti disperziju tih dviju $\widetilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ linearnih, nepristranih ocjena.

$$D(\hat{\theta}) = (A^T A)^{-1} A^T DX((A^T A)^{-1} A^T)^T \tag{13}$$

Zna se da je $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 DX$, a kada se to primijeni na linearni model (7), dobije se:

$$D(A\theta + e) = \sigma^2 I. \tag{14}$$

Ako se ta vrijednost uvrsti u izraz (14), dobit će se

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} A^T ((A^T A)^{-1} A)^T = \\ &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} A^T (A^{-1} \underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{I})^T = \\ &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} A^T (A^{-1})^T = \\ &= \sigma^2 (A^T A)^{-1} (\underbrace{A^{-1} A}_{I})^T = \\ &= \sigma^2 (A^T A)^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Sada treba izračunati $D(\widetilde{\theta})$:

$$D(\widetilde{\theta}) = BDXB^T = \sigma^2 BB^T. \tag{16}$$

S pomoću izraza (15) i (16) formira se razlika disperzija da bi se utvrdilo koja od tih dviju ocjena ima minimalnu disperziju:

$$\begin{aligned} D(\widetilde{\theta}) - D(\hat{\theta}) &= \sigma^2 (\underset{\substack{\uparrow \\ I}}{B}\,\underset{\substack{\uparrow \\ BA}}{B^T} - (A^T A)^{-1}\underset{\substack{\uparrow \\ A^T B^T}}{)} \\ &= \sigma^2 (BIB^T - BA(A^T A)^{-1} A^T B^T) \\ &= \sigma^2 B\underbrace{(I - A(A^T A)^{-1} A^T)}_{\geq 0} B^T . \end{aligned} \tag{17}$$

Budući da je $rang\, A(A^T A)^{-1} A^T = p$ i da je $rang\, I_n = n$, lako se može vidjeti da je $rang\, I_n - \left(A(A^T A)^{-1} A^T\right) = n - p$. Time je dokazano da je:

$$\begin{aligned} D(\widetilde{\theta}) - D(\hat{\theta}) &\geq 0 \\ D(\widetilde{\theta}) &\geq D(\hat{\theta}). \end{aligned} \tag{18}$$

Iz (18) slijedi da je $\hat{\theta}$ linearna ocjena s najmanjom disperzijom.

Ako se želi izračunati nepristrana ocjena za σ^2 u linearnom modelu $(X, A\theta, \sigma^2 I_n)$, potrebno je krenuti od postavke

$$Q(X; \hat{\theta}) = (X - A\hat{\theta})^T (X - A\hat{\theta}) = S_0^2$$

$$S_0^2 = e^T (I_n - A(A^T A)^{-1} A^T) e \;;$$

stavljajući da je $C = I_n - A(A^T A)^{-1} A^T = (c_{jk})$, bit će

$$S_0^2 = e^T C e = \sum_{j=1}^{n} c_{jj} e_j^2 + \sum_{j \neq k} c_{jk} e_j e_k$$

gdje je

$$E(e_j e_k) = \begin{cases} \sigma^2, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases} \tag{19}$$

$$ES_0^2 = \sigma^2 (n - p).$$

Iz (19) je očigledno da je nepristrana ocjena za σ^2 jednaka (ako je $rang\,(A) = p$):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_0^2}{n - p}. \tag{20}$$

Problem običnih najmanjih kvadrata

Problem za koji se pretpostavlja da nema greške kod nezavisnih varijabli, naziva se problem običnih najmanjih kvadrata (ordinary least squares). Kod takvog se problema traži pravac koji najbolje aproksimira zadane podatke. Takav se pravac naziva OLS *pravac* [3, str. 2.].

Problem najmanjih potpunih kvadrata

Kada se pretpostavlja da postoji pogreška u neovisnim varijablama, postavlja se problem najmanjih potpunih kvadrata (total least squares). Kod takvog linearnog problema rješavanjem se dobije pravac koji najbolje aproksimira zadane podatke, što znači da prolazi kroz težište (centroid) uzorka. Takav se pravac naziva *TLS pravac* [3, str. 5.].

3. USPOREDBA KRETANJA ŽELJEZNIČKOGA TRANZITNOG TERETNOG PROMETA HRVATSKE I SLOVENIJE METODOM NAJMANJIH KVADRATA

Zadnjih godina, kada sve više dolaze do izražaja rastući ekološki problemi, željeznica se nameće kao najbolje rješenje za prijevoz masovnih tereta kopnom. Zna se da je željeznički promet efikasniji s ekološkog, ali i s ekonomskog stajališta jer je prijevoz masovnih tereta željeznicom mnogo jeftiniji od prijevoza u ostalim granama prometa. Jedna od bitnih prednosti željezničkog prometa u odnosu prema cestovnom prometu, manji je utrošak energije. Prednosti željezničkoga prometa vezane su i uz manje emisije štetnih plinova u usporedbi sa svim drugim prometnim granama.

Imajući to na umu, u ovom ilustrativnom primjeru uspoređuju se udjeli željezničkoga tranzitnog teretnog prometa u ukupnome željezničkom teretnom prometu Hrvatske i Slovenije kako bi se vidjelo ponašanje tih udjela u promatranim zemljama.

Ukupan međunarodni teretni željeznički promet svake zemlje sastoji se od 3 grupe:

1. uvozni promet, 2. izvozni promet, 3. tranzitni promet.

Povećanje ukupnoga međunarodnog teretnog prometa povezano je s povećanjem bilo koje od tih grupa. Podaci o željezničkom ukupnom i tranzitnom prometu Hrvatske i Slovenije dani su u tablicama 1. i 2.

Tablica 1. Željeznički promet u Republici Hrvatskoj u tisućama tona u razdoblju 1990. – 1999. godine

Godina	Željeznički promet u tisućama tona	
	Ukupno	Tranzit
1990.	35,796	6,229
1991.	21,479	5,569
1992.	9,585	0
1993.	11,685	2,925
1994.	11,279	4,674
1995.	13,318	6,474
1996.	11,061	4,102
1997.	12,168	5,212
1998.	12,643	5,449
1999.	11,491	5,003

Izvor: Statistički ljetopis Republike Hrvatske 1991.–2000., Državni zavod za statistiku, Zagreb, 1991. – 2000.

Tablica 2. Željeznički promet u Republici Sloveniji u tisućama tona u razdoblju 1994. – 1999. godine

Godina	Željeznički promet u tisućama tona	
	Ukupno	Tranzit
1995.	13,02	5,678
1996.	14,893	7,455
1997.	13,155	5,965
1998.	14,36	7,08
1999.	14,396	7,243
2000.	14,226	6,854

Izvor: Statistični letopis Republike Slovenije 2000., Promet in zveze, Ljubljana, 2000.

Na temelju postojećih vrijednosti, postavlja se hipoteza da su udjeli željezničkoga tranzitnog teretnog prometa u ukupnome željezničkom teretnom prometu Hrvatske i Slovenije jednaki.

Postavljeni zadatak rješava se na sljedeći način: Pretpostavka je da su X_1 i X_2 nizovi nezavisnih promatranja i da je duljina prvog niza (X_1) jednaka n_1, a duljina drugog niza (X_2) je n_2. Postavlja se linearan dvodimenzionalan model:

$$X_1 = \theta_1 \cdot a_1 + \beta_1 \cdot e_1 + \varepsilon_1,$$

$$X_2 = \theta_2 \cdot a_2 + \beta_2 \cdot e_2 + \varepsilon_2,$$

gdje je a_1 i a_2 – poznati vektori duljina n_1, n_2, θ_i i β_1– nepoznati koeficijenti linearne regresije, ε_1 i $\varepsilon_2 \sim N(0,\sigma^2)$ – nezavisne stohastičke pogreške slučajne varijable; $e_i = (1,1,\ldots,1)^T \in R^{n_i}; i = \overline{1,2}$.

Nakon postavljanja matematičkog modela, hipoteza H_0 – udjeli željezničkoga tranzitnog teretnog prometa u ukupnome željezničkom teretnom prometu Hrvatske i Slovenije su jednaki, transformira se u: H_0 – regresijski pravci su paralelni, a to znači da je $\theta_1 = \theta_2$. Nadalje,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & e_2 \end{pmatrix}_{n\times 4};$$

$$n = n_1 + n_2; \; \alpha = (\theta_1, \beta_1, \theta_2, \beta_2)^T; \; B = (1,0,-1,0).$$

Nakon matričnog modela koji glasi: $X = A\alpha + \varepsilon$, bit će H_0: $\beta\alpha = 0$ u promatranom linearnome modelu. Poznato je da je $\bar{a}_1$ aritmetička sredina ukupnoga željezničkog teretnog prometa

$$\bar{a}_i = \frac{1}{n_i} \sum a_{ij}; \tag{21}$$

da je $\bar{x}_i$ aritmetička sredina tranzitnoga željezničkog prometa

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum x_{ij}; \tag{22}$$

da se S_i^2 još naziva rezidualna suma kvadrata

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum \left(a_{ij} - \bar{a}_i \right)^2; \tag{23}$$

te da je:

$$c_i = \frac{1}{n_i} \sum \left(a_{ij} - \bar{a}_i \right) \left(x_{ij} - \bar{x}_i \right) . \tag{24}$$

Da bi se mogla naći ocjena $\hat{\theta}_i$, potrebno je formirati matricu $A^T A$, a poslije preko dobivene vrijednosti za $\hat{\theta}_i$ može se dobiti i tražena vrijednost $\hat{\beta}_i$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_i = \begin{pmatrix} \bar{a}_i^T \bar{a}_i & \bar{a}_i^T e_i \\ e_i^T \bar{a}_i & e_i^T e_i \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} S_i^2 + \bar{a}_i^2 & \bar{a}_i \\ \bar{a}_i & 1 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & M_2^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow M_i^{-1} = \frac{1}{n_1 \cdot S_i^2} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{a}_i \\ -\bar{a}_i & S_i^2 + \bar{a}_i^2 \end{pmatrix}.$$

Nakon kraćeg računanja slijedi da je:

$$\hat{\theta}_i = \frac{c_i}{S_i^2} \tag{25}$$

$$\hat{\beta}_i = \bar{x}_i - \bar{a}_i \cdot \hat{\theta}_i . \tag{26}$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti proučavanog problema iz uzorka/tablica 1. i 2. u formule (21) – (24), dobivene su sljedeće vrijednosti za Hrvatsku:

$$n_1 = 10$$

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{10} a_{1j} = 15{,}05$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} = \frac{1}{10} \cdot 45{,}64 = 4{,}56$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{10} \left(a_{1j} - \bar{a}_1 \right)^2 = 57{,}28$$

$$c_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{10} \left(a_{1j} - \bar{a}_1 \right) \left(x_{1j} - \bar{x}_1 \right) = 6{,}40$$

Tražene vrijednosti za drugi niz – Sloveniju su:

$$n_2 = 6$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{6} a_{2j} = 14{,}01$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{6} x_{2j} = 6{,}71$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{6}\left(a_{2j} - \bar{a}_2\right)^2 = 0{,}28$$

$$c_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{6}\left(a_{2j} - \bar{a}_2\right)\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right) = 0{,}27$$

Na kraju, direktnim uvrštavanjem u formule (25) i (26), dobiva se:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{c_1}{S_1^2} = \frac{6{,}4}{57{,}28} = 0{,}112 \quad \text{i} \quad \hat{\beta}_1 = \bar{x}_1 - \bar{a}_1\hat{\theta}_1 = 2{,}87;$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{c_2}{S_2^2} = \frac{0{,}27}{0{,}28} = 0{,}96 \quad \text{i} \quad \hat{\beta}_2 = \bar{x}_2 - \bar{a}_2\hat{\theta}_2 = -6{,}74;$$

Te se vrijednosti uvrste u probnu statistiku kako bi se provjerilo da li će početna hipoteza biti prihvaćena:

$$T(X_1, X_2) = (n-4)\frac{\hat{\alpha}B^T\Gamma^{-1}\beta\hat{\alpha}}{\left\|X - A\hat{\alpha}\right\|^2} \sim F_{1,n-4}, \tag{27}$$

tj. statistika $T(X_1,X_2)$ ima Fisherovu $F_{1,n-4}$ razdiobu s 1, n – 4 stupnja slobode.

Iz hipoteze $B\alpha=0$, koja se može izraziti i u obliku $B\hat{\alpha} = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$ (jer je pretpostavka da je $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$) i $\Gamma = B(A^TA)^{-1}B^T = \frac{1}{n_1S_1^2} + \frac{1}{n_2S_2^2}$ slijedi da je brojnik probne statistike:

$$\hat{\alpha}B^T\Gamma^{-1}B\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n_1S_1^2} + \frac{1}{n_2S_2^2}\right)^{-1}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)^2\ ; \tag{28}$$

dok je nazivnik probne statistike:

$$\left\|X - A\hat{\alpha}\right\|^2 = \left\|X_1 - a_1\hat{\theta}_1 - \hat{\beta}_1e_1\right\|^2 + \left\|X_2 - a_2\hat{\theta}_2 - \hat{\beta}_2e_2\right\|^2. \tag{29}$$

Kada se izrazi (28) i (29) ponovno vrate u probnu statistiku (27), dobije se da je:

$$T(X_1, X_2) = (n-4)\frac{\left(\left(\frac{1}{n_1S_1^2} + \frac{1}{n_2S_2^2}\right)^{-1}\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2\right)}{\left\|X_1 - a_1\hat{\theta}_1 - \hat{\beta}_1e_1\right\|^2 + \left\|X_2 - a_2\hat{\theta}_2 - \hat{\beta}_2e_2\right\|^2}. \tag{30}$$

Nazivnik iz (30) izračuna se na sljedeći način:

$$\left\|X_1 - a_1\hat{\theta}_1 - \hat{\beta}_1 e_1\right\|^2 = \sum_{j=1}^{10}\left(x_j - 0{,}112\cdot a_j - 2{,}87\right)^2 = 25{,}412\,;$$

$$\left\|X_2 - a_2\hat{\theta}_2 - \hat{\beta}_2 e_2\right\|^2 = \sum_{j=1}^{6}\left(x_j - 0{,}96\cdot a_j - 6{,}74\right)^2 = 0{,}00567.$$

Kada se krajnji podaci uvrste u izraz (30), dobije se konačno rješenje zadatka:

$$\begin{aligned} T(X,X) &= (16-4)\frac{\left(\frac{1}{10\cdot 57{,}28}+\frac{1}{6\cdot 0{,}28}\right)^{-1}(0{,}112-0{,}96)^2}{25{,}412+0{,}0567} = \\ &= 12\cdot\frac{(0{,}1753)^{-1}\cdot 0{,}719}{25{,}4687} = \\ &= 12\cdot\frac{4{,}1015}{25{,}4687} = \\ &= 1{,}93 \end{aligned} \tag{31}$$

Iz tablice *F*-razdiobe očita se kritična vrijednost za $F_{1,12}$ (Fisherova *F*-razdioba) s pragom značajnosti od 5% koja iznosi 4,75 [2, str. 74.]. Kao što se vidi iz izraza (31), vrijednost probne statistike $T(X_1,X_2)$ za zadane nizove iznosi 1,93. Ta je vrijednost puno manja od očitane kritične vrijednosti (4,75), što znači da je hipoteza H0 prihvaćena. Dakle, na razini 5% značajnosti, udjeli željezničkoga tranzitnog teretnog prometa u ukupnome željezničkom teretnom prometu Hrvatske i Slovenije su podjednaki.

Obje države trebale bi poduzeti odgovarajuće akcije kako bi povećale udio željezničkoga tranzitnog teretnog prometa. Takvo povećanje željezničkoga teretnog prijevoza utječe na smanjenje onečišćenja zraka budući da željeznički promet ostavlja manje ekološki negativne posljedice u odnosu na cestovni promet koji je u promatranim državama zastupljeniji od željezničkog prometa.

I Hrvatska i Slovenija su zemlje orijentirane pomorskom prometu, što znači da države koje su u njihovu zaleđu imaju tendenciju da upućuju svoj prekooceanski uvoz/izvoz preko spomenutih država. Lako se može zaključiti da je većina teretnog prometa u tim zemljama tranzitnog karaktera. Kada bi se povećao udio željezničkoga teretnog tranzitnog prometa, uz pozitivan ekološki efekt, došlo bi i do značajnog rasterećenja zakrčenog cestovnog prometa.

4. JEDNA GENERALIZACIJA METODE NAJMANJIH KVADRATA

Kod metode najmanjih kvadrata uzima se kvadratna funkcija greške kao kriterijska funkcija koja se minimizira. Ako su nepoznata samo dva parametra, postavlja se kriterijska funkcija oblika:

$$Q = \sum_{j=1}^{n}\left[X_j - (\theta\cdot a_j + \beta)\right]^2 = min\,. \tag{32}$$

Gornji izraz se u Gauss-Markovu sistemu derivira po nepoznatim parametrima θ i β, a tako dobivene vrijednosti izjednače se s 0.

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \theta \cdot a_j - \beta\right)\cdot(-a_j) = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \theta \cdot a_j - \beta\right)\cdot(-1) = 0 .$$

Izračunavanjem gornjeg izraza dobije se:

$$-2\sum_{j=1}^{n} a_j X_j + 2\sum_{j=1}^{n}\theta \cdot a_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\beta \cdot a_j = 0$$
$$-2\sum_{j=1}^{n} X_j + 2\sum_{j=1}^{n}\theta \cdot a_j + 2\sum_{j=1}^{n}\beta = 0 .$$

Sada se to može prikazati i na sljedeći način:

$$\theta\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \beta\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j ;$$
$$\theta\sum_{j=1}^{n} a_j + \beta\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} X_j .$$

Prema tako dobivenim izrazima formira se proširena matrica, u kojoj prvi stupac predstavlja prvi nepoznati parametar θ, a drugi stupac čini drugi nepoznati parametar β:

$$\begin{array}{cc} \theta & \beta \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 & \sum_{j=1}^{n} a_j & \sum_{j=1}^{n} a_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_j & n & \sum_{j=1}^{n} X_j \end{array}\right).$$

Iz matrice se dobije da je:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot X_j}{n\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2}, \tag{33}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\hat{\beta}}{\sum_{j=1}^{n} a_j} . \tag{34}$$

Točnost ovih izraza može se provjeriti ako se podaci iz 3. poglavlja uvrste u formule (33) i (34). Uvrštavanjem vrijednosti iz prethodnog poglavlja dobije se da je $\theta_1=0,1122$, a $\beta_1=2,865$ što su približno iste vrijednosti, čime je dokazana točnost ovih formula.

Ako se promatra slučaj gdje je veza između parametara modela i rezultata nekog eksperimenta dana relacijom:

$$X=\theta_1\cdot a_1+\theta_2\cdot a_2+\ldots\theta_k\cdot a_k; \tag{35}$$

a gdje su parametri θ_k nepoznati parametri te ako se pretpostavi da je eksperiment na sistemu obavljen n puta, rezultati provedenog eksperimenta mogu se prikazati u tablici 3.

Tablica 3. Opći oblik rezultata za n eksperimenata

Redni broj eksperimenta	a_1	a_2	...	a_k	X
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	X_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	X_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nk}	X_k

Izvor: http://simlab.fon.bg.ac.yu/nastava/knjiga/Glava3/Glava-3.html

Iz tablice se vidi da su u n-tom eksperimentu dobivena mjerenja $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}$, a rezultati tih mjerenja su X_n. Međutim, u praksi je teško provesti točna mjerenja, zbog čega ovi rezultati neće zadovoljiti izraz (35). Postoji određeno odstupanje, tj. greška mjerenja koja se mora uvrstiti u gornju relaciju kako bi se dobili točni podaci. Kada se greška uzme u obzir, dobije se:

$$\begin{aligned}
X_1-(\theta_1 a_{11}+\theta_2 a_{12}+\ldots+\theta_k a_{1k})&=e_1\\
X_2-(\theta_1 a_{21}+\theta_2 a_{22}+\ldots+\theta_k a_{2k})&=e_2\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
X_n-(\theta_1 a_{n1}+\theta_2 a_{n2}+\ldots+\theta_k a_{nk})&=e_n.
\end{aligned}$$

Ocjena nepoznatih parametara $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ izračunava se minimizacijom kvadratne funkcije greške:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[X_n-\left(\theta_1 a_{n1}+\theta_2 a_{n2}+\ldots+\theta_k a_{nk}\right)\right]^2. \tag{36}$$

Izraz (36) derivira se po nepoznatim parametrima θ_1, θ_2, ..., θ_k i sve tako dobivene parcijalne derivacije izjednačavaju se s 0.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X_n-\left(\theta_1 a_{i1}+\theta_2 a_{i2}+\ldots+\theta_k a_{ik}\right)\right]^2\cdot(a_{ij})=0;\quad j=1,2,\ldots,k. \tag{37}$$

Radi lakšeg računanja, zbog velikog broja nepoznatih parametara, sada se formiraju matrice od veličina iz izraza (37):

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ako se matrične vrijednosti uvrste u kriterijsku funkciju, dobije se kriterijska funkcija oblika:

$$Q = (X - A\theta)^T (X - A\theta).$$

Iz te se funkcije sada lako, derivacijom po nepoznatom parametru θ i izjednačavanjem te parcijalne derivacije s 0, dobiva da je:

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T X,$$

što je već prikazano na stranici 107. ovog rada.

5. ZAKLJUČAK

Vrlo često je u praksi, kada se primjenjuje matematičko modeliranje, dovoljno da se nađu nepristrane ocjene za matematičko očekivanje, disperziju i druge nepoznate parametre. I upravo u takvim slučajevima mogu se naći nepristrane ocjene u skupu onih statistika koje su linearne funkcije promatranog uzorka $X_1,\dots,X_n$.

Linearne nepristrane ocjene najčešće se koriste u slučajevima linearnih problema. Međutim, takvih je problema u praksi prilično malo, pa su se zbog netočnosti koje se dobiju kada se te metode koriste u takvim slučajevima, razvile i druge metode ocjenjivanja nepoznatih parametara. Metoda najmanjih kvadrata može se koristiti i u eksponencijalnim i u paraboličnim problemima, ali se u slučajevima u kojima je potrebna veća preciznost češće upotrebljavaju druge metode.

Primjenom metode najmanjih kvadrata kod linearnog problema $X_j = \theta \cdot a_j + \beta$, dobiva se pravac koji najbolje aproksimira zadane podatke, tj. kod kojeg je razlika između zadanih podataka i onih dobivenih korištenjem metode najmanjih kvadrata najmanja.

S pomoću metode najmanjih kvadrata ocjenjuju se nepoznati parametri na temelju poznatih parametara. Tom se metodom, ako je funkcija pogreške derivabilna, derivira kriterijska funkcija (funkcija greške) po nepoznatim parametrima i dobivena parcijalna derivacija se izjednačuje s 0, iz čega slijedi jednostavno ocjenjivanje vrijednosti nepoznatog parametra. Iako je starija, ta metoda se i danas često koristi jer je jednostavna, praktična i laka za primjenu.

LITERATURA

[1] S. M. Stojanović, Matematička statistika, glava 3., Naučna knjiga, Beograd, 1980.
[2] T. Pogány, Z. Zenzerović, Statističke tablice s uputama za primjenu, poglavlje 7., Sveučilište u Rijeci, Pomorski fakultet, Rijeka, 1993.
[3] D. Jukić, Procjena parametara u linearnom modelu metodom najmanjih potpunih kvadrata, predavanja na postdiplomskom studiju "Tehnološki sustavi u pomorskom prometu", Rijeka, 2001.
[4] Statistički ljetopis Republike Hrvatske 1991.-2000., Državni zavod za statistiku, Zagreb, 1991. – 2000.
[5] Statistični letopis Republike Slovenije 2000., Promet in zveze, Ljubljana, 2000.
[6] http://simlab.fon.bg.ac.yu/nastava/knjiga/Glava3/Glava-3.html

Summary

LINEAR IMPARTIAL EVALUATION AND THE LEAST SQUARE METHOD

Statistical modelling with the linear impartial evaluation and the least square method are used when evaluating unknown parameters of classifying the population charasteristics based on the sampling method. While the linear impartial evaluation can be applied, with more or less success, by linear dependence only, the least square method is applied even in cases of non-linear dependence. A special attention is paid in this paper to the least square method. The paper aims at presenting the benefits of the least square method for calculating and describing problems from different fields in questions which can be expressed as problems evaluating unknown parameters of classifying characteristics. The application of the least square method is illustrated with the example of comparing the cargo traffic of the Republic of Croatia with that of the Republic of Slovenia.