

Izmjera, analiza i obrada čvorne točke poligonskog vlaka

Surveying, Analysis, and Adjustment of a Nodal Point in a Geodetic Traverse

Danijel Botić¹, Nikola Kranjčić^{1*}, Bojan Đurin², Vlado Cetl¹, Tanja Trabe Baranašić¹

1 – Sveučilište Sjever, Odjel za geodeziju i geomatiku, Jurja Križanića 31b, 42000 Varaždin, Republika Hrvatska, nkranjic@unin.hr; dbotic@unin.hr; bdjurin@unin.hr; vcetl@unin.hr; ttrabebaranasic@unin.hr

2 - Sveučilište Sjever, Odjel za graditeljstvo, Jurja Križanića 31b, 42000 Varaždin, Republika Hrvatska

Sažetak

U radu je provedena detaljna izmjera, analiza i obrada čvorne točke poligonskoga vlaka na području Sveučilišnoga centra Varaždin Sveučilišta Sjever, s ciljem uspostave precizne i trajne geodetske osnove za obrazovne i istraživačke svrhe. Mjerenja su obavljena totalnom stanicom metodom girusnog mjerenja u dva položaja instrumenta. Dobiveni podatci obrađeni su metodom najmanjih kvadrata, a rezultati su uspoređeni s GNSS mjerenjima. Analiza više neovisnih vlakova, koji se sijeku u čvornoj točki P10, potvrdila je minimalna odstupanja i visoku stabilnost mreže. Rad potvrđuje važnost pravilnoga planiranja, izvedbe i obrade geodetskih mjerenja te demonstrira kako se klasične metode uspješno integriraju sa suvremenim instrumentima i softverskim alatima.

Ključne riječi: čvorna točka poligonskoga vlaka, metoda najmanjih kvadrata, izjednačenje mjerenja, geodetska mreža, GNSS mjerenja.

Abstract

A detailed survey, analysis, and processing of a nodal point in a traverse network was carried out at the University North – Varaždin University Centre, with the aim of establishing a precise and permanent geodetic control network for educational and research purposes. Measurements were conducted using a total station and the double-face (girus) method in two instrument positions. The obtained data were processed using the least squares method, and the results were compared with GNSS measurements. The analysis of multiple independent traverses intersecting at the nodal point P10 confirmed minimal deviations and high network stability. The paper highlights the importance of proper planning, execution, and processing in geodetic

surveys and demonstrates how classical methods can be effectively integrated with modern instruments and software tools.

Key words: nodal point of a traverse network, least squares adjustment method, measurement adjustment, geodetic network, GNSS surveying

1. Uvod

Geodetski poligonski vlakovi predstavljaju osnovnu metodu terestričke izmjere položajnih točaka, a njihova važnost u praksi potvrđena je kroz niz stručnih priručnika i znanstvenih radova. Prema Duplančić Leder, Bačić i Gilić (2023), poligonski vlak definira se kao slijed povezanih geodetskih točaka između kojih su izmjereni horizontalni kutovi i duljine. Klasifikacija vlakova temelji se na načinu zatvaranja i priključenja, pri čemu se razlikuju zatvoreni, obostrano priključeni i slijepi poligonski vlakovi. Uspostava pravilno planirane mreže ključna je za osiguranje točnosti i pouzdanosti daljnjih geodetskih radova, a čvorni poligonski vlak, kao mreža dvaju ili više vlakova koji se sijeku, osigurava dodatnu redundantnost i time povećava preciznost.

Instrumenti i metode mjerenja temelj su svake izmjere. Lasić (2010) detaljno opisuje razvoj od klasičnih tahimetara prema suvremenim mjernim stanicama koje integriraju elektroničko mjerenje udaljenosti (EDM – Electronic Distance Measurement) i automatiziranu registraciju podataka. Suvremene totalne stanice omogućuju ne samo mjerenje kutova i duljina, već i izvođenje korekcija i osnovnih proračuna unutar samog instrumenta, čime se ubrzava rad i smanjuje mogućnost pogrešaka. Posebno je važna girusna metoda mjerenja kutova, kako ju opisuje Šurina (2015), koja uključuje opažanje pravaca u oba položaja instrumenta radi eliminacije kolimacijskih pogrešaka. Ova metoda izravno je primijenjena i u ovom radu kako bi se postigla visoka točnost izmjere.

Točnost geodetskih mjerenja ovisi o pravilnom prepoznavanju i korekciji pogrešaka. Feil (1989) sustavno dijeli pogreške na grube, sustavne i slučajne. Grube pogreške su rezultat tehničkih propusta ili pogrešnoga očitavanja te se isključuju iz obrade. Sustavne pogreške proizlaze iz karakteristika instrumenata ili uvjeta mjerenja (npr. temperaturne promjene, refrakcija) te se mogu korigirati odgovarajućim metodama i kalibracijom. Slučajne pogreške, koje nastaju nasumično, uklanjaju se primjenom statističkih metoda izjednačenja. U geodetskim izračunima kolimacijska pogreška instrumenta označava se s $2c$ i predstavlja dvostruku kolimacijsku pogrešku, tj. razliku u smjerovima izmjerenima u dva položaja durbina. Vrijednost $2c$ služi kao pokazatelj točnosti centriranja i optičke osi instrumenta te se koristi za provjeru pouzdanosti mjerenja pravaca.

U ovom radu kolimacijske su pogreške neutralizirane primjenom girusne metode mjerenja, kojom se svi pravci opažaju u oba položaja instrumenta. Slučajne pogreške su potom minimizirane izjednačenjem mjerenja metodom najmanjih kvadrata (MNK) prema trigonometrijskom modelu izjednačenja poligonskoga vlaka, koji uključuje korekcije smjernih kutova i duljina te raspodjelu korekcija proporcionalno duljinama stranica.

Računska obrada podataka i izjednačenje poligonskih vlakova, prema Rožiću (2007), ključni su koraci za osiguranje konzistentnosti koordinata i procjenu točnosti. Izjednačenje se provodi dodjeljivanjem težina mjerenjima, raspodjelom korekcija prema duljinama stranica te kontrolom smjernih kutova. Ove metode omogućuju da se svako odstupanje identificira i raspodijeli proporcionalno važnosti pojedinoga mjerenja. U ovom radu korištena je upravo ta metodologija – izjednačenje je provedeno zasebno za svaki vlak, a rezultati su analizirani u pogledu odstupanja koordinata čvorne točke P10.

Teorijski okvir ovih izvora pruža snažnu potporu praktičnoj provedbi izmjere čvornoga poligonskog vlaka. Korištenjem suvremenih instrumenata (totalna stanica Topcon OS-200) u kombinaciji s GNSS mjerenjima i računalnim alatima (Excel, AutoCAD Map 3D), ostvarena je precizna i kontrolirana izmjera koja potvrđuje vrijednost klasičnih metoda u suvremenoj geodetskoj praksi. Time se potvrđuje da teorijske smjernice iz literature, kada se dosljedno primijene u terenskom i računalnom radu, daju rezultate visoke točnosti i pouzdanosti.

2. Teorijska pozadina

2.1. Definicija i klasifikacija poligonskih vlakova

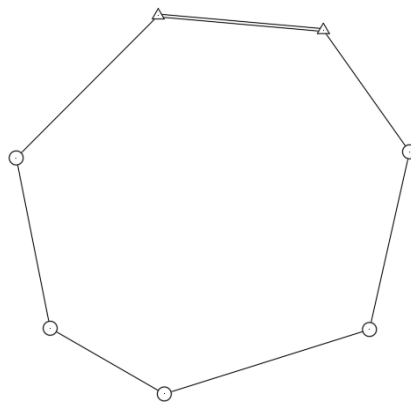
Poligonski vlak predstavlja slijed međusobno povezanih geodetskih točaka, pri čemu su između njih izmjereni horizontalni kutovi i duljine. Takvi vlakovi mogu biti samostalno uspostavljeni ili povezani na već postojeće točke s poznatim koordinatama, poput trigonometrijskih točaka. Prema Duplančić Leder, Bačić i Gilić (2023) svrha poligonskih vlakova je omogućiti precizna određivanja položaja na terenu u svrhu izmjere, iskolčenja objekata te izrade geodetskih podloga.

Prema načinu zatvaranja i priključenja, razlikuju se sljedeće osnovne vrste poligonskih vlakova:

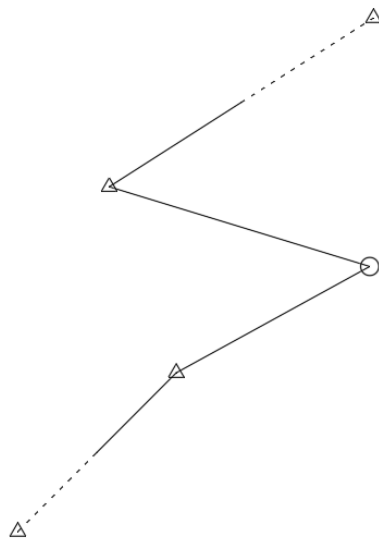
- zatvoreni poligonski vlak – vlak koji započinje i završava u istoj poznatoj točki geodetske osnove, pri čemu se za prvo i posljednje stajalište koriste točke poznatih koordinata. Orijentacija vlaka određuje se pomoću smjera prema jednoj od poznatih točaka iz početnoga stajališta.

- obostrano priključen poligonski vlak – vlak koji počinje i završava na dvjema različitim točkama čije su koordinate poznate. Potrebno je imati dvije poznate točke sa obje strane vlaka.
- slijepi poligonski vlak – vlak koji započinje na točki s poznatim koordinatama, a završava na točki s nepoznatim koordinatama, što podrazumijeva samo dvije poznate točke sa jedne početne strane vlaka

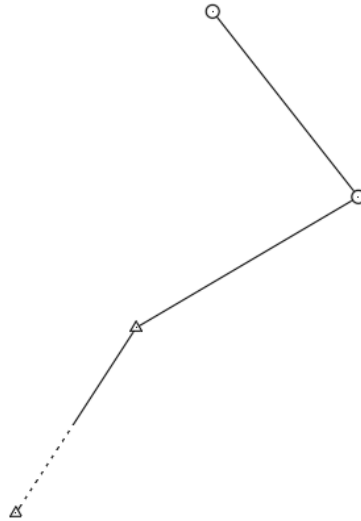
Na slikama 1, 2 i 3 prikazane su vrste poligonskih vlakova prema načinu zatvaranja i priključenja. Poligonske točke prikazane su kružićima, dok su trokutima označene točke poznatih koordinata geodetske osnove koje služe za orijentaciju i priključenje vlaka.



Slika 1 Zatvoreni poligonski vlak



Slika 2 Obostrano priključeni poligonski vlak



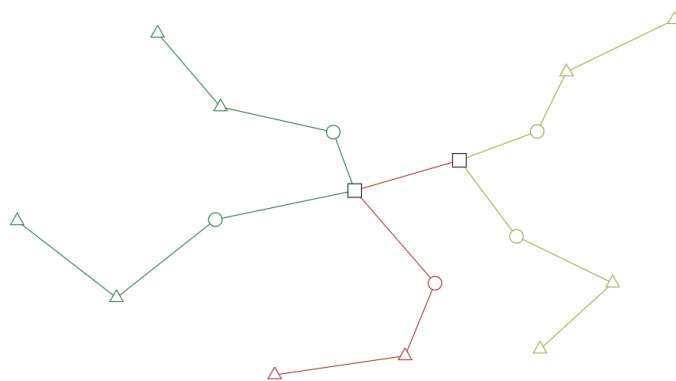
Slika 3 Slijepi poligonski vlak

2.2. Čvorni poligonski vlak

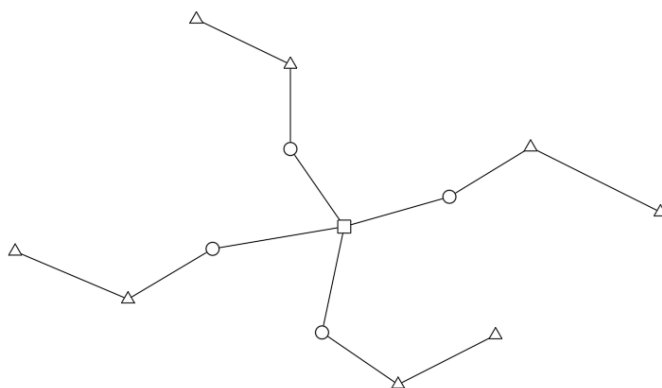
Prema Feil (1989) i Duplančić Leder, Bačić i Gilić (2023) čvorni poligonski vlak predstavlja skupinu dvaju ili više poligonskih vlakova koji se sijeku u jednoj ili više zajedničkih točaka. Takva konfiguracija omogućuje povećanu redundantnost mjerenja i provjeru točnosti koordinata kroz višestruke neovisne opažajne smjerove.

Sastavni vlakovi najčešće su obostrano priključeni na točke poznatih koordinata geodetske osnove, čime se osigurava veća stabilnost i pouzdanost mreže.

Glavne posebitosti čvornih poligonskih vlakova su u tome što oni pružaju redundantnost mjerenja samim time što se sijeku u jednoj ili više točaka, pri čemu se mjerenja utvrđuju položajno tako što se mjeri na istoj točki iz više smjerova. To pruža veću točnost mjerenja dok totalna stanica određuje preciznost istih. Ovakve konfiguracije vrlo su fleksibilne i omogućavaju prilagođavanje terenu, a na kraju i njegovo savladavanje. Na slici 4 prikazan je primjer složenijeg čvornoga poligonskog vlaka koji se sastoji od dva obostrano priključena vlaka (označena zelenom i žutom bojom) te jednog slijepoga vlaka (označen crveno) koji međusobno povezuje dva odvojena čvorna sustava. Na slici 5 prikazan je jednostavniji primjer čvornoga poligonskog vlaka koji se sastoji od dva obostrano priključena vlaka što se sijeku u jednoj zajedničkoj čvornoj točki, čime se omogućuje kontrola točnosti i redundantnost mjerenja.



Slika 4 Primjer čvornoga poligonskog vlaka



Slika 5 Primjer čvornoga poligonskog vlaka

Iz prikazanih primjera primjećuje se razlika tipova čvornih poligonskih vlakova kojih ima bezbroj različitih mogućnosti. Primjena čvornih poligonskih vlakova je raznolika ali uglavnom se koriste u predmetima koji zahtijevaju izuzetno visoku preciznost. Neki od njih su:

- Infrastrukturni objekti poput mostova tunela vijadukata koji osiguravaju sigurnost prijevoznika to jest ljudi koji ih koriste.
- Geotehnički monitoring koji omogućava praćenje pomaka i deformacije zahtjevnih objekata ili različitih tipova terena poput klizišta, jama te podzemnih špilja.
- Kvalitetno proglašavanje mreža viših redova u svrhu korištenja za urbanističke i katastarske potrebe.

3. Lokacija snimanja i terenska mjerenja

Unutar kampusa Sveučilišta sjever postoje već stabilizirana i određena mreža od sveukupno 27 točaka geodetske osnove. Prema obliku mreže odabrana je točka P10 koja se nalazi u geometrijskom centru same mreže. Odabrani poligon nalazi se u sjeni drveća i okolnih zgrada što otežava da se poligon mjeri visokom točnošću GNSS instrumentima.

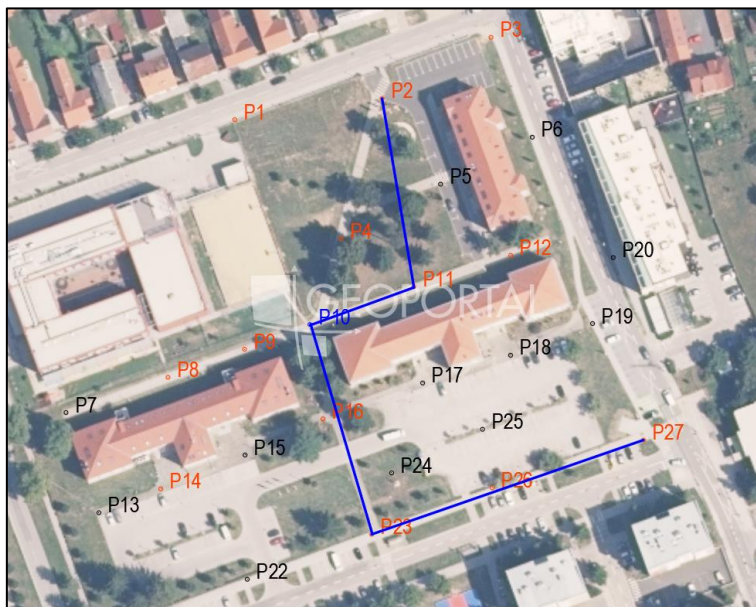
Poligonske točke uključene u projekt određene su GNSS uređajem Trimble R12i u trajanju od 90 epoha (oko 1 min i 30 s) po točki. Prema Trimble (2025) tehničkim specifikacijama instrumenta i uvjetima mjerenja, postignuta standardna nesigurnost određivanja položaja iznosila je približno $\pm 0,008$ m u horizontalnom i $\pm 0,015$ m u vertikalnom smjeru. Tako određene točke korištene su kao referentne točke poznatih koordinata za usporedbu s rezultatima izjednačenja poligonskih vlakova. Geodetska mreža obuhvaća prostor dimenzija približno 180×130 metara, što je uvjetovalo ograničenje duljina stranica poligonskih vlakova. Zbog prostorne konfiguracije kampusa i prisutnosti brojnih fizičkih prepreka, poput zgrada, stabala, travnatih površina i rasvjetnih stupova, nije bilo moguće planirati poligonske vlakove s duljinama stranica većima od 100 metara. Dulje stranice u poligonskim vlakovima omogućile bi povoljniji omjer između mjerne pogreške i ukupne duljine, čime bi se smanjio utjecaj pogrešaka mjerenja kutova na konačnu točnost koordinata. Kratke stranice, osobito u ograničenim prostorima, povećavaju relativnu pogrešku i mogu utjecati na stabilnost izjednačenja.

U okviru ovoga projekta izvedeno je četiri obostrano priključena poligonska vlaka koja se međusobno sijeku u čvornoj točki P10. U pojedinim vlakovima (posebno u vlaku 1 i vlaku 4, prikazanim na slikama 6 i 9) prijelomni kutovi između uzastopnih stranica iznosili su približno 180° , što znači da su dijelovi vlaka bili djelomično ispruženi. Takva geometrijska konfiguracija smanjuje redundantnost i pouzdanost izjednačenja, jer male pogreške u mjerenju kutova uzrokuju veće promjene u izračunatim koordinatama. Odabir veznih točaka zahtijevao je više uložena vremena od očekivanoga pri čemu je trebalo utvrditi dogledanje točaka na samom terenu te raznolikost poligona kako vlakovi ne bi imali iste poligone (što osigurava veću točnost). Na prikazima mreže pojedine su točke označene crvenom, a pojedine crnom bojom, čime je grafički razlikovana njihova funkcionalna uloga u mreži. Crvene točke predstavljaju točke poznatih koordinata geodetske osnove, koje su određene GNSS mjerenjima i korištene kao vezne točke za priključenje poligonskih vlakova.

Crne točke označavaju poligonske točke koje su izmjerene klasičnim terestričkim metodama pomoću totalne stanice i uključene u proces izjednačenja. Poligonski vlakovi u mreži povezuju točke P12–P26, pri čemu je svaka pojedina dionica vlaka orijentirana i vezana na najmanje dvije poznate GNSS točke radi osiguravanja obostrane orijentacije. Konkretno, poligonski vlakovi su planirani tako da se svaki vlak priključuje na dvije poznate crvene točke te se međusobno sijeku u čvornoj točki P10, koja je bila predmet detaljne analize stabilnosti.



Slika 6 Prikaz poligonskoga vlaka br. 1



Slika 7 Prikaz poligonskoga vlaka br. 2



Slika 8 Prikaz poligonskoga vlaka br. 3



Slika 9 Prikaz poligonskoga vlaka br. 4

Za izmjeru čvornoga poligonskog vlaka korištena je totalna stanica Topcon OS-200 uz pripadajući geodetski stativ Topcon, te prizma marke Topcon s odgovarajućim držačem za istu. Mjerenje je izvedeno u jednom girusu, što podrazumijeva da se iz svake poligonske točke mjerio kut u oba položaja instrumenta. Taj način osigurao je kompenzaciju sustavnih pogrešaka što olakšava i poboljšava buduću analizu i obradu mjerenja.

Prema tehničkim specifikacijama instrumenta Topcon OS-200, nominalna točnost mjerenja horizontalnih i vertikalnih kutova iznosi $\pm 2''$, dok je točnost mjerenja udaljenosti pomoću EDM sustava $\pm(2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ pri korištenju reflektora. U ovom istraživanju navedene vrijednosti

odnose se na specifikacije instrumenta, dok je stvarna točnost izmjerenih pravaca i duljina ovisila o uvjetima na terenu, načinu orijentacije i duljinama stranica poligonskih vlakova. Horizontiranje je izvedeno pomoću digitalne libele, a centriranje iznad točaka pomoću optičkoga viska, čime su instrumentalne pogreške svedene na minimalnu razinu. Prva orijentacija postavljena je s poznate točke na poznatu točku čime je definiran nulti kut i orijentacija u prostoru. Za svako sljedeće stajalište provedena je ista orijentacija samo prema prethodno snimljenoj točki. Za svaku vizuru mjerio se horizontalni kut, vertikalni kut, te dužina uz automatsko mjerenje s EDM-om. Sva mjerenja dužina izvedena su pomoću fine (precizne) opcije. Svi izmjereni podatci pohranjeni su izravno u internu memoriju instrumenta te su po završetku mjerenja prebačeni na eksterni USB. Mjerenja su obavljena u suhim i stabilnim vremenskim uvjetima, bez jakog vjetera, uz temperaturu između 20-25 °C. Takvi uvjeti omogućili su stabilnost instrumenata i smanjili atmosferske utjecaje na točnost duljina i očitavanju kutova.

4. Obrada podataka i izjednačenje mjerenja

Približno izjednačenje poligonskoga vlaka provedeno je prema trigonometrijskom obrascu br. 19, u kojem se koriste poznate koordinate početne i završne točke, izmjereni prijelomni i vezni kutovi te izmjerene horizontalne duljine stranica.

4.1. Korekcija mjerenih kutova

Za svaki vlak izračunata je kutna pogreška zatvaranja pomoću izraza:

$$f_{\beta} = \sum \beta_i - (n - 2) * 180^{\circ}$$

gdje je n broj opažanih prijelomnih kutova.

Dobivena pogreška ravnomjerno je raspoređena po svim kutovima s obzirom na duljine stranica (njihove težine), čime se dobivaju popravljani kutovi:

$$\beta'_i = \beta_i - \frac{f_{\beta} * w_i}{\sum w_i}$$

pri čemu je w_i težina pojedinoga kuta proporcionalna duljini pripadajuće stranice.

Dopušteno odstupanje kutne pogreške zatvaranja izračunato je prema klasičnoj empirijskoj formuli:

$$\Delta_{\beta} = 20'' * \sqrt{n}$$

Ako je $[f_{\beta}] < \Delta_{\beta}$ opažanja se smatraju prihvatljivima.

4.2. Izračun smjernih kutova

Smjerni kutovi pojedinih stranica računaju se rekurzivno:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \beta'_i \pm 180^\circ$$

Ako dobiveni smjerni kut premaši 360° , oduzima se puni krug (360°) kako bi se održala konzistentnost. Na taj se način određuju smjerni kutovi svih stranica do završne točke vlaka.

4.3. Izračun razlika koordinata

Za svaku stranicu vlaka računaju se komponente pomaka po koordinatnim osima:

$$\Delta E_i = d_i * \sin \alpha_i$$

$$\Delta N_i = d_i * \cos \alpha_i$$

Gdje je d_i izmjerena duljina stranice, a α_i pripadni smjerni kut.

4.4. Linearna i koordinatna pogreška zatvaranja

Na temelju koordinatnih razlika izračunavaju se pogreške zatvaranja:

$$f_E = \sum \Delta E_i - (E_k - E_1)$$

$$f_N = \sum \Delta N_i - (N_k - N_1)$$

Srednja pogreška zatvaranja iznosi:

$$f = \sqrt{f_E^2 + f_N^2}$$

Dopušteno odstupanje po osima određeno je po formuli povećane točnosti:

$$\Delta = 0.0010\sqrt{d} + 0.0012d + 0.03$$

Za analizirane vlakove maksimalno dopušteno odstupanje iznosilo je približno 5.3 cm, što su svi opaženi vlakovi zadovoljili.

4.5. Korekcija koordinata i konačne koordinate točaka

Dobivene pogreške f_E i f_N raspodijeljene su proporcionalno duljinama stranica, čime su dobivene popravljene razlike koordinata. Dodavanjem tih vrijednosti na koordinate početne točke postupno su izračunate koordinate svih točaka poligonskoga vlaka.

4.6. Strogo izjednačenje metodom najmanjih kvadrata

Nakon približnoga izjednačenja provedeno je strogo izjednačenje primjenom metode najmanjih kvadrata, u kojem su definirane funkcije posrednih mjerenja i jednadžbe popravaka:

$$v = Ax - l$$

pri čemu je v vektor popravaka, A matrica koeficijentata, x prikraćena vrijednost nepoznanica, a $-l$ vektor prikraćenih mjerenja. Izjednačenje je provedeno zasebno za svaki poligonski vlak, a ne za mrežu u cjelini. Dobivene točnosti izjednačenih koordinata bile su iznimno

zadovoljavajuće – unutar nekoliko stotinki centimetra, što potvrđuje visoku preciznost čvorne točke P10 (tablica 1 prikazuje standardne pogreške po osima sE i sN).

Tablica 1. Prikaz dobivenih rezultata

Broj vlaka	E (HTRS96/TM)	N (HTRS96/TM)	sE	sN
1	486659.7839	5128998.2723	0.030 cm	0.025 cm
2	486659.7727	5128998.2675	0.030 cm	0.025 cm
3	486659.7776	5128998.3279	0.025 cm	0.140 cm
4	486659.7878	5128998.2847	0.007 cm	0.004 cm
Aritmetička sredina	486659.7805	5128998.2881		

5. Zaključak

Rezultati provedene izmjere i obrade čvorne točke poligonskoga vlaka jasno ukazuju na važnost pravilnoga planiranja, izvedbe i analize geodetskih mjerenja. Primjena klasičnih terestričkih metoda u kombinaciji sa suvremenim instrumentima (totalna stanica Topcon OS-200 i GNSS uređaj Trimble R12i) omogućila je visoku preciznost određivanja koordinata i pouzdanu kontrolu kvalitete mjerenja.

Analiza četiri obostrano priključena poligonska vlaka pokazala je da su sve izmjere zadovoljile dopuštena odstupanja po osima, pri čemu su linearne pogreške zatvaranja bile unutar maksimalno 5,3 cm, odnosno znatno manje od propisanih graničnih vrijednosti. Time je potvrđena stabilnost čvorne točke P10, koja se može smatrati pouzdanim referentnim elementom unutar mreže.

Posebnu vrijednost rada čini usporedba više neovisnih izjednačenja, koja omogućuje višestruku provjeru točnosti i istodobno demonstrira praktičnu primjenu teorijskih modela u stvarnim uvjetima mjerenja. Rad na taj način povezuje geodetsku teoriju s inženjerskom praksom te potvrđuje važnost pravilnoga projektiranja i kontrole svake faze izmjere.

U budućim istraživanjima preporučuje se kombinirano izjednačenje svih poligonskih vlakova u jedinstvenoj mreži, čime bi se dodatno povećala točnost i omogućila detaljnija analiza pouzdanosti pojedinih točaka. Tako uspostavljena mreža može služiti kao trajna geodetska osnova za edukacijske, istraživačke i inženjerske svrhe, dok iskustvo stečeno u ovom projektu predstavlja važan temelj za daljnji profesionalni razvoj u području precizne geodezije.

6. Literatura

Duplančić Leder, T., Bačić, S. i Gilić, F. (2023) Priručnik za vježbe iz predmeta Geodezija. Dostupno na:

https://www.researchgate.net/publication/374269275_Prirucnik_za_vjezbe_iz_predmeta_Geodezija [Pristupljeno: 31. svibnja 2025.].

Feil, L. (1989) Teorija pogrešaka i račun izjednačenja – 1. dio. Zagreb: Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Lasić, Z. (2010) Geodetski instrumenti – Predavanja. Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet. Dostupno na:

https://www2.geof.unizg.hr/~zlastic/Geodetski%20instrumenti_predavanja.pdf [Pristupljeno: 31. svibnja 2025.].

Rožić, N. (2007) Računska obrada geodetskih mjerenja. Zagreb: Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Šurina, G. (2015) Geodezija 2. Geodetska škola. Dostupno na: https://www.geoskola.hr/~gsurina/GEODEZIJA_2.pdf [Pristupljeno: 31. svibnja 2025.].

Trimble (2025) Trimble R12i GNSS System. Dostupno na: <https://geospatial.trimble.com/en/products/hardware/trimble-r12i> [Pristupljeno: 10. studenoga 2025.].

Ovaj rad izrađen je u sklopu projekta Usporedba podataka LiDARA s javno dostupnim podacima, UNIN-TEH-25-1-13