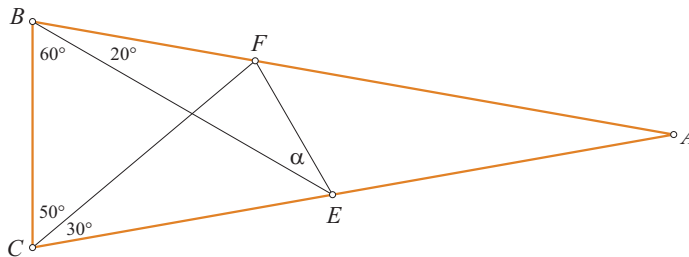


Najteži lagani geometrijski problem

Aleksandar Hatzivelkos¹

Uvod

Početak 20. stoljeća, britanski matematičar Edward Mann Langley objavio je u časopisu *The Mathematical Gazette* članak o geometrijskom problemu koji i danas, sto godina kasnije, privlači pažnju [1, 2, 5]. Riječ je o problemu u kojemu je potrebno odrediti kut α u konstrukciji koja je prikazana na slici 1.



Slika 1. Prikaz Langleyevog problema

Prikazan je jednakokračan trokut u kojemu je stranica \overline{BC} baza, a stranice \overline{AC} i \overline{AB} krakovi, te kojemu su kutovi uz bazu jednaki 80° . Unutar trokuta označene su dvije dužine, \overline{BE} i \overline{CF} , takve da točka E leži na stranici \overline{AC} , a točka F na stranici \overline{AB} . Pri tome je kut $\angle ECF$ jednak 30° , a kut $\angle EBF$ 20° . Zadatak je odrediti kut $\angle BEF$ koji je na slici 1 označen s α .

Specifičnost zadatka je u tome što je u postupku rješavanja potrebno koristiti samo elementarne geometrijske identitete i svojstva, koje upoznajemo još u osnovnoj školi: da je zbroj kutova u trokutu jednak 180° i da su u jednakokračnom trokutu kutovi nasuprot krakova jednaki. Upravo zbog tog zahtjeva o korištenju "lagane geometrije", problem je često nazivan i najtežim laganim geometrijskim problemom [4, 6].

U proteklih sto godina formulirano je četrdesetak različitih rješenja, koja na različite načine tumače uputu o upotrebi elementarnih geometrijskih identiteta i svojstava [5, 7]. U nekim rješenjima koriste se, primjerice, svojstva težišnica, visina, simetrala kutova i stranica (u jednakokračnim i jednakostraničnim trokutima), ili pak teorem o središnjem i obodnom kutu. Trigonometrija nam također daje direktno rješenje za računanje traženog kuta (za detaljniji izvod vidi [7]):

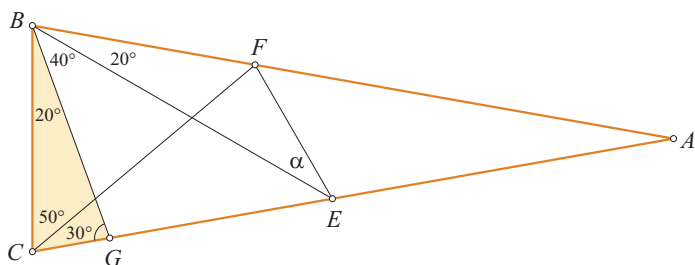
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos(10^\circ - 50^\circ)}{\sin 50^\circ \cdot (\cos 20^\circ + \cos 120^\circ)} - \operatorname{tg}(10^\circ + 60^\circ) \implies \alpha = 30^\circ.$$

No mi ćemo ovdje proći kroz rješenje koje koristi isključivo elementarna svojstva kutova u trokutu: zbroj kutova u trokutu je 180° , u jednakokračnom trokutu kutovi nasuprot krakova su jednaki te u jednakostraničnom trokutu svaki kut iznosi 60° .

¹ Autor je na Veleučilištu Velika Gorica, Velika Gorica; e-pošta: aleksandar.hatzivelkos@vvg.hr

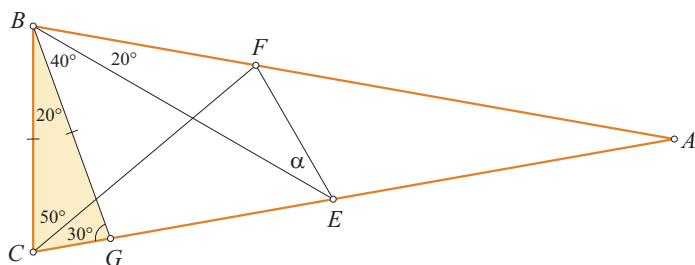
Rješenje Langleyevog problema

Postupak provodimo kreiranjem niza novih dužina i trokuta, koji nas u konačnici vodi do (zadanom trokutu upisanog) trokuta iz kojega možemo odrediti veličinu kuta α . Prvi u nizu potrebnih trokuta formiramo dijeljenjem kuta CBE pomoću nove dužine \overline{BG} na dva kuta: dio uz bazu \overline{BC} (kut CBG) iznosi 20° , dok ostatak kuta (kut GBE) iznosi 40° , kao što je prikazano na slici 2.



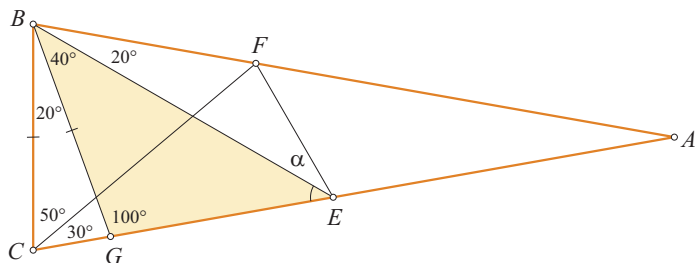
Slika 2. Formiranje dužine \overline{BG}

Promotrimo sada trokut BCG . Kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180° , označeni kut uz vrh G (kut CGB) jednak je 80° . No tada je trokut BCG jednakokratan, te su dužine \overline{BC} i \overline{BG} jednake duljine, kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3. Analiza trokuta BCG

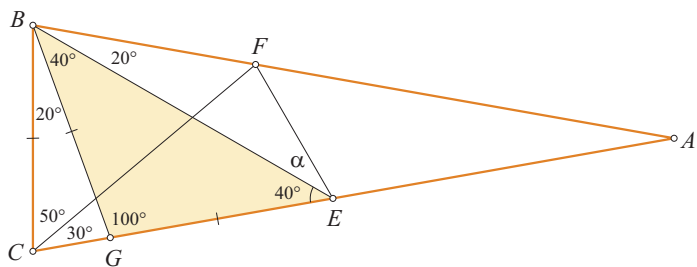
Promotrimo sada trokut BGE , koji je prikazan na slici 4.



Slika 4. Elementi trokuta BGE

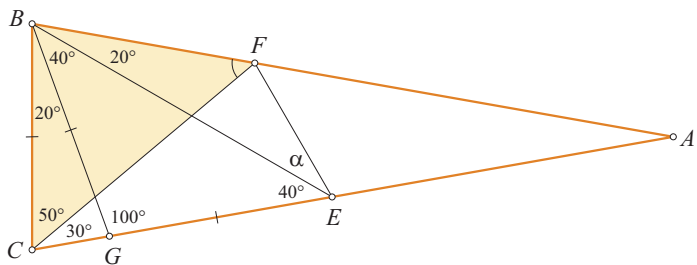
Kako je kut u trokutu uz vrh G (kut BGE) sukut kuta BGC , taj je kut jednak 100° . Odavde slijedi da je treći kut u označenom trokutu, kut uz vrh E (kut GEB) jednak 40° .

Budući je i kut uz vrh B (kut GBE) jednak 40° , zaključujemo da se radi o jednakokraknom trokutu, kojemu su krakovi stranice \overline{GB} i \overline{GE} . Jednakost duljina stranica \overline{CB} , \overline{GB} i \overline{GE} označena je na slici 5.



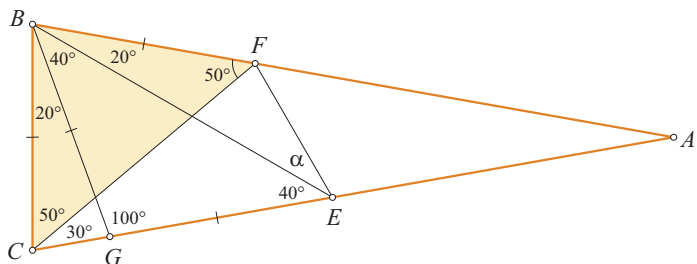
Slika 5. Analiza trokuta BGE

Sljedeći korak nam je analizirati trokut BCF , koji je prikazan na slici 6.



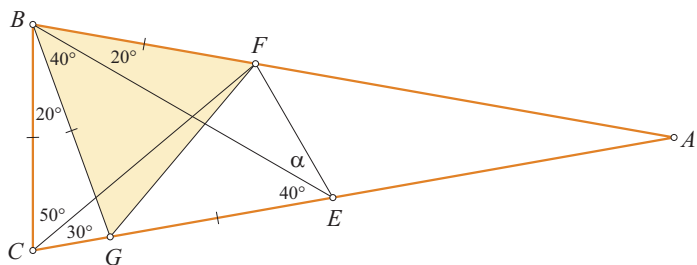
Slika 6. Elementi trokuta BCF

Istaknuti kut uz vrh F (kut BFC) jednak je 50° , što slijedi iz činjenice da je zbroj kutova u trokutu jednak 180° . Time smo opet došli do jednakokraknog trokuta, jer su kutovi uz vrhove C i F jednaki. To znači da su dužine \overline{BC} i \overline{BF} jednake duljine, isto kao i prije navedene dužine \overline{BG} i \overline{GE} . Jednakost tih duljina označena je na slici 7.



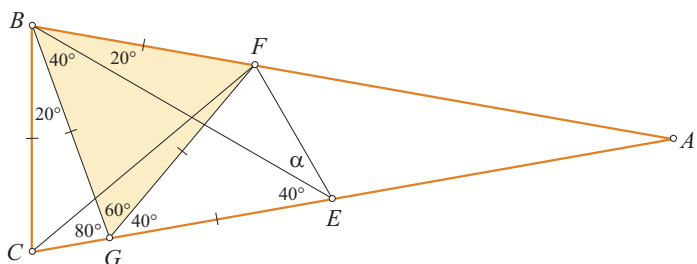
Slika 7. Analiza trokuta BCF

Fokus ćemo sada preseliti na trokut BGF , koji je prikazan na slici 8. Pri tome smo označili novu bitnu dužinu \overline{FG} .



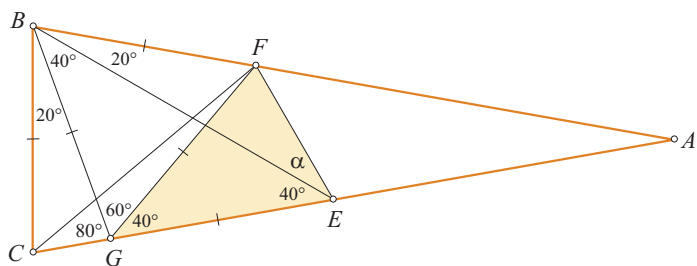
Slika 8. Elementi trokuta BGF

U ovom slučaju imamo trokut kojemu su dvije stranice, dužine \overline{BG} i \overline{BF} , jednake, te je kut između njih jednak 60° . No tada su jednaki i nasuprotni kutovi uz vrhove F (kut BFG) i G (kut BGF), te je njihov zbroj jednak 120° . To, naravno, znači da su sva tri kuta jednaka 60° , pa su i sve tri stranice jednake duljine. Dakle, dužina \overline{GF} ima jednaku duljinu kao i prethodno označene \overline{BC} , \overline{BG} , \overline{GE} i \overline{BF} . Taj je rezultat označen na slici 9.



Slika 9. Analiza trokuta BGF

Konačno, kako bi odredili traženi kut α , promotrimo trokut EFG koji je prikazan na slici 10.



Slika 10. Analiza trokuta EFG

Iz prethodne analize su dužine \overline{GE} i \overline{GF} jednake duljine, što znači da je trokut jednakokraničan, odnosno da su kutovi uz vrh E (kut FEG) i uz vrh F (kut EFG) jednaki. Dakle, oba navedena kuta su jednaka $40^\circ + \alpha$. Kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180° , slijedi

$$(40^\circ + \alpha) + (40^\circ + \alpha) + 40^\circ = 180^\circ.$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo da je traženi kut α jednak 30° .

Zaključak

Iako se radi o problemu starom više od sto godina, Langleyev problem zorno pokazuje kako se korištenjem samo elementarnih svojstava trokuta, mogu kreirati i rješavati intelektualno izazovni zadatci. Aktualnost navedenog problema dokazuje i odgovarajuća literatura u kojoj se i danas, stoljeće nakon originalne objave, pronalaze njegova nova rješenja kao i njegovih generalizacija [2, 5]. Problem se isto tako koristi i kao pokazni slučaj u tekstovima orijentiranim na načine poučavanja i izgradnje strategije rješavanja zadatka u [1]. Vjerujemo da i ovaj prilog može doprinijeti otvaranju vidika kod novih generalizacija i načinu traženja rješenja “izvan kutije”.

Literatura

- [1] C. FOSTER, *Problem solving in the mathematics curriculum: From domain – general strategies to domain – specific tactics*, The Curriculum Journal, 34, 594–612, 2023. <https://doi.org/10.1002/curj.213>
- [2] Y. KONG, Z. SHAOWEI, *Adventitious angles problem: the lonely fractional derived angle*, arXiv preprint arXiv:2405.02352, 2024. <https://arxiv.org/pdf/2405.02352>
- [3] E. M. LANGLEY, *Problem 644*, The Mathematical Gazette, 11: 173, 1922.
- [4] P. TALWALKAR, *The Hardest Easy Geometry Problem – Sunday Puzzle*, Mind Your Decisions, 2016. <https://mindyourdecisions.com/blog/2016/09/04/the-hardest-easy-geometry-problem-sunday-puzzle/>
- [5] C. YONGCHENG, *A lemma to solve Langley's problem*, The Mathematical Gazette, 103, no. 558, 521–524, 2019.
- [6] DUCKWARE, *World's Hardest 'Easy Geometry' Problem*, <https://www.duckware.com/tech/worldshardesteasygeometryproblem.html>
- [7] [math.stackexchange.com](https://math.stackexchange.com/questions/6942/langleys-adventitious-angles), Langley's Adventitious Angles. <https://math.stackexchange.com/questions/6942/langleys-adventitious-angles>