Frizovi u konkatedrali

Tomislav Pejković[1]

U ovom radu klasificiramo frizove, tj. ornamente na traci koji ostaju nepromijenjeni pri uzdužnom pomicanju te trake. Najprije ćemo se prisjetiti i nadopuniti naše poznavanje izometrija u ravnini, tj. preslikavanja koja čuvaju udaljenost. Zatim ćemo razvrstati frizove u ovisnosti o izometrijama koje ih preslikavaju same u sebe. Takve izometrije obično zovemo simetrijama pojedinog friza. Na kraju ćemo izdvojiti primjere frizova koje prepoznajemo na fasadi, podu, zidovima, svodu, ikonostasu i ostalom namještaju u grkokatoličkoj konkatedralnoj crkvi svetih Ćirila i Metoda na zagrebačkom Gornjem gradu.

Izometrije ravnine

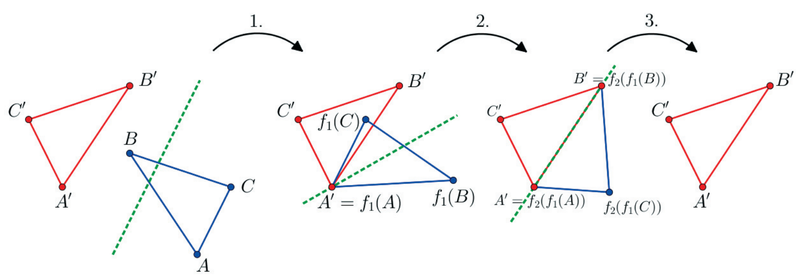
Izometrija ravnine je preslikavanje skupa točaka ravnine u samoga sebe koje čuva udaljenosti, tj. udaljenost točaka A i B jednaka je udaljenosti njihovih slika A' i B' za svake dvije točke A i B. Pokazuje se da je svaka izometrija bijekcija i da čuva i kolinearnost i kutove.

Od izometrija, većini su poznate osna simetrija, translacija i rotacija te poseban slučaj rotacije, centralna simetrija. Manje je poznata klizna simetrija o kojoj ćemo uskoro reći nešto više.

Pokažimo najprije da se svaka izometrija ravnine može prikazati kao kompozicija najviše triju osnih simetrija. Neka je ABC neki trokut i f izometrija te $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Nađimo kompoziciju od najviše tri osne simetrije koje preslikavaju točke A, B, C u A', B', C', tim redom.

1. Ako je $A = A'$, uzmimo za f_1 identitetu. Inače uzimamo da je f_1 osna simetrija koja A preslikava u A'. Sada je $f_1(A) = A'$.
2. Ako je $f_1(B) = B'$, neka je f_2 identiteta. U suprotnom, uzimamo da je f_2 osna simetrija s obzirom na simetralu dužine $\overline{f_1(B)B'}$. Primijetimo da ta simetrala prolazi kroz A' jer je $|A'B'| = |f(A)f(B)| = |AB| = |f_1(A)f_1(B)| = |A'f_1(B)|$. Sada je $f_2(f_1(A)) = A'$ i $f_2(f_1(B)) = B'$.
3. Ako je $f_2(f_1(C)) = C'$, neka je f_3 identiteta. Inače uzmemo da je f_3 osna simetrija s obzirom na pravac $A'B'$. Sada se $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i f podudaraju na točkama A, B, C.

Prikaz slučaja kada ni u jednom koraku ne uzimamo identitetu dan je na slici 1.



Slika 1.

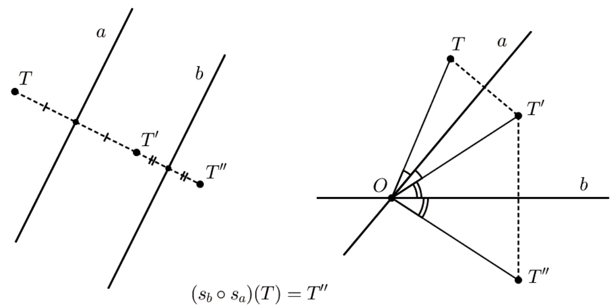
[1] Autor je docent na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pejkovic@math.hr`

Pokažimo da je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Primijetimo da je dovoljno pokazati da je izometrija $g = f^{-1} \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ identiteta. Iz upravo dokazanog imamo $g(A) = f^{-1} \circ (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(A) = f^{-1}(A') = A$ i slično $g(B) = B$, $g(C) = C$.

Lako se vidi da ako izometrija ima dvije fiksne točke X i Y, onda su i sve točke pravca XY fiksne za tu izometriju, tj. preslikava svaku točku pravca XY u samu sebe. Zato su sve točke pravaca AB, AC i BC fiksne za izometriju g.

Za po volji odabranu točku P, neka je p bilo koji pravac kroz P. Taj pravac siječe pravce AB, AC i BC u barem dvije različite točke koje su prema upravo dokazanom fiksne za g. Stoga su i sve točke pravca p fiksne za g, a onda je takva i točka P. Budući da je P bila proizvoljna točka ravnine, zaključujemo da je g identiteta. Time smo završili dokaz tvrdnje da se svaka izometrija ravnine može prikazati kao kompozicija najviše triju osnih simetrija.

Sada nije teško dati potpunu klasifikaciju izometrija ravnine. Osim *osnih simetrija*, imamo sljedeće tipove izometrija.



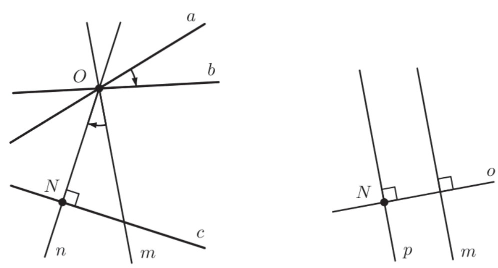
Slika 2.

Kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi paralelne je *translacija* za dvostruku udaljenost tih osi u smjeru okomitom na njih (slika 2 lijevo). Svaku translaciju možemo prikazati na taj način pri čemu jednu od osi možemo izabrati po volji, ali tako da je okomita na smjer translacije.

Kompozicija dviju osnih simetrija kojima se osi sijeku u točki O je *rotacija* oko O za dvostruki kut između tih osi (slika 2 desno). Svaku rotaciju možemo prikazati na taj način pri čemu jednu od osi možemo izabrati po volji, ali tako da prolazi točkom O. Posebno, ako su osi okomite, dobivamo *centralnu simetriju* s obzirom na O.

Osnu simetriju s obzirom na pravac p označavamo s_p, a centralnu simetriju s obzirom na točku T označavamo s_T.

Kompozicija triju osnih simetrija kod kojih nisu sve tri osi paralelne i ne prolaze sve tri istom točkom, zove se *klizna simetrija*. U isključenim slučajevima kompozicija triju osnih simetrija je ponovno osna simetrija [3, Teorem 2.12].



Slika 3.

Položaje triju osi, pomoću kojih je definirana pojedina klizna simetrija, možemo uskladiti na pogodan način. Recimo da su nam dani pravci a, b, c od kojih nikoja dva nisu paralelna niti sva tri pravca prolaze istom točkom. Te slučajeve ostavljamo čitateljima. Promotrimo sada kliznu simetriju $s_c \circ s_b \circ s_a$ kao na slici 3 lijevo.

Preslikavanje $s_b \circ s_a$ je rotacija, pa ga možemo prikazati u obliku $s_n \circ s_m$, gdje je n okomica iz O na c. Ako je N sjecište pravaca n i c, imamo zbog okomitosti n i c da je $s_c \circ s_n = s_N$, centralna simetrija s obzirom na N.

Sada možemo prikazati $s_N = s_o \circ s_p$, gdje je p paralelno s m, a pravac o je okomit na p i m. Radi preglednosti, ovo je prikazano na slici 3 desno. Dobili smo da je naša klizna simetrija

$$s_c \circ s_b \circ s_a = s_c \circ s_n \circ s_m = s_N \circ s_m = s_o \circ s_p \circ s_m.$$

Dakle, svaka klizna simetrija može se prikazati kao kompozicija triju osnih simetrija pri čemu su prve dvije osi paralelne, a treća je okomita na njih. Primijetimo da je za $s_o \circ s_p \circ s_m$ kao maloprije, $s_p \circ s_m$ translacija u smjeru pravca o. To objašnjava i naziv ove izometrije. Najprije "klizimo" uzduž pravca o, a onda zrcalimo s obzirom na taj pravac. Pravac o naziva se os dane klizne simetrije.

Prije nego završimo ovaj kratki pregled definicija i tvrdnji o izometrijama, moramo još spomenuti koji su fiksni pravci za pojedine tipove izometrija. Drugim riječima, zanima nas za svako od ovih preslikavanja koji pravac, promatran kao skup točaka, će biti preslikan u samoga sebe. Naglasimo kako nije nužno da se svaka točka tog pravca preslika u samu sebe. Sljedeće rezultate nije teško provjeriti.

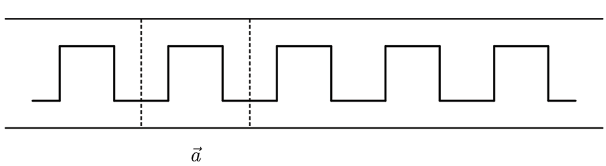
Fiksni pravci

- osne simetrije su os i svi pravci okomiti na os,
- centralne simetrije su svi pravci kroz centar te simetrije,
- translacije su svi pravci u smjeru translacije,
- klizne simetrije je samo os.

Osim navedenih, nema drugih fiksnih pravaca. Posebno, rotacija koja nije ni identiteta ni centralna simetrija nema nijedan fiksni pravac.

Frizovi

Friz je neprazan skup točaka u ravnini koji ostaje nepromijenjen pri nekoj translaciji različitoj od identitete. Osim toga, tražimo da se promatrani skup ne proteže u više smjerova u ravnini, nego da se nalazi između dva pravca koji su nužno paralelni sa smjerom translacije. Jedan jednostavan primjer friza dan je na slici 4.



Slika 4. Friz s jednim označenim uzorkom i najkraćim vektorom translacije

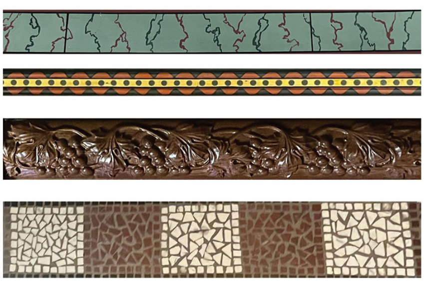
Zahtijevamo da postoji nenul vektor najmanje duljine takav da translacija za taj vektor ostavlja friz nepromijenjenim. Označimo jedan od dva takva vektora s $\vec{a}$. Tada su jedine translacije koje preslikavaju friz u samoga sebe one kojima je vektor pomaka oblika $k\vec{a}$, gdje je k bilo koji cijeli broj. Naime, pretpostavimo da translacija za vektor $\vec{b}$ ostavlja friz nepromijenjenim. Kada $\vec{b}$ ne bi bio kolinearan s $\vec{a}$, dovoljno puta primijenjena translacija za $\vec{b}$ preslikala bi prugu u kojoj se nalazi friz u njoj disjunktnu prugu što nije moguće. Ako pak $\vec{b}$ ne bi bio cjelobrojni višekratnik vektora $\vec{a}$, imali bi da je $k|\vec{a}| < |\vec{b}| < (k+1)|\vec{a}|$ za neki cijeli broj k. Stoga bi jedan od vektora $\vec{b} - k\vec{a}$ i $\vec{b} + k\vec{a}$ bio manje duljine od $\vec{a}$, premda translacija za taj vektor ostavlja friz nepromijenjenim. To je u kontradikciji s pretpostavkom o minimalnosti za duljinu $\vec{a}$.

Dio pruge između dvaju pravaca okomitih na rubove pruge takvih da im je udaljenost $|\vec{a}|$, zvat ćemo *uzorak* friza. Dakle, uzorak obično ovisi o izboru pruge i okomitih pravaca.

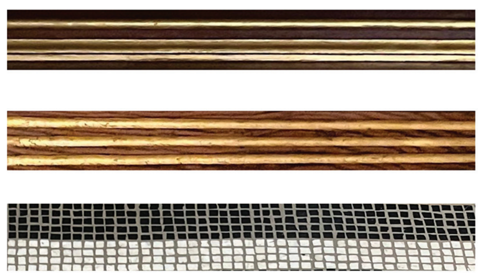
Nama su frizovi zanimljivi jer se pojavljuju na brojnim mjestima oko nas. Točnije rečeno, na zidovima, stropovima, podovima i predmetima koje svakodnevno susrećemo, nalaze se ornamenti koje lako možemo modelirati kao dijelove frizova. U nastavku ćemo vidjeti primjere takvih frizova iz stvarnog života. Treba uvijek imati na umu da pri prijelazu iz stvarnog ornamenta na friz koji ga predstavlja, mi trebamo donijeti najčešće prešutnu odluku što je uzorak koji se ponavlja. Naime, ornament je u stvarnosti ograničen, pa postoji samo konačno mnogo ponavljanja uzorka koji treba idealizirati tako da zanemarimo nesavršenosti i razlike između uzorka i onoga što bi trebale biti njegove slike pri translaciji.

Iz praktičnih razloga fotografije ornamenata uvijek ćemo položiti vodoravno, čak i kad predstavljaju dijelove stupova ili lukova. Napomenimo da su sve fotografije koje koristimo za ilustraciju ovog rada uslikane u grkokatoličkoj konkatedrali u Zagrebu. To ukazuje na bogatstvo dekoracija koje se ondje može naći. No raznolike motive na kojima se pojavljuju frizovi, čitatelji će lako uočiti i na drugim zgradama i predmetima oko sebe.

Na slici 5 prikazani su različiti ornamenti u kojima ne prepoznajemo uzorak, pa ih i ne možemo analizirati kao frizove. Iznimka je eventualno zadnji redak u toj slici gdje možemo prepoznati uzorak, ali samo uz uvjet da zanemarimo individualne pločice, tj. da promatramo samo kvadrate bijele i smeđe boje.



Slika 5.



Slika 6.

Slika 6 donosi nekoliko primjera gdje ne postoji translacija koja čuva ornament zadana vektorom najmanje pozitivne duljine, pa ni ovdje ne govorimo o frizovima u matematičkom smislu. Za razliku od prije spomenutoga, ovdje zadnji redak možemo promatrati kao friz samo ako uzmemo u obzir individualne pločice i fuge među njima.

Na slici 7 vidimo primjer u kojemu je moguće na istoj dekoraciji izabrati dva različita friza, koje onda treba periodički nastaviti. U skladu s time, imat ćemo različite uzorke, pa i simetrije tih frizova.

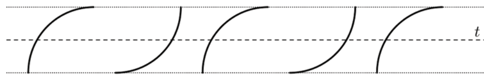
Slika 7.

Klasifikacija frizova

Sada ćemo klasificirati frizove s obzirom na izometrije koje ih ostavljaju nepromijenjenima. Često se takve izometrije nazivaju simetrijama danog friza.

Neka je dan friz $\mathcal{F}$. Po definiciji znamo da postoji translacija za vektor $\vec{a}$ koja preslikava $\mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$, a jedine ostale translacije koje to čine su one kojima je vektor pomaka $k\vec{a}$ za cijeli broj k.

Izometrija f koja preslikava $\mathcal{F}$ na samoga sebe, nužno preslikava prugu najmanje širine u kojoj se $\mathcal{F}$ nalazi, u tu istu prugu. Zato f preslikava simetralu t te pruge u samu sebe, što je ilustrirano na slici 8.



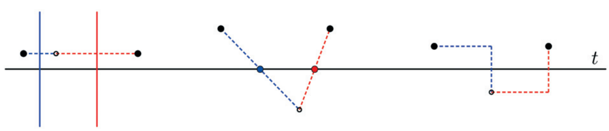
Slika 8.

Budući da znamo koji su fiksni pravci za pojedine izometrije, možemo sada zaključiti da f, ako nije translacija za $k\vec{a}$, mora biti jedna od sljedećih izometrija

- osna simetrija s obzirom na t što označavamo s H jer se radi o horizontalnoj osi,
- osna simetrija s obzirom na pravac okomit na t što označavamo s V jer se radi o vertikalnoj osi simetrije,
- centralna simetrija s obzirom na točku koja leži na t, a ovu situaciju označit ćemo s C,
- klizna simetrija uzduž osi t što označavamo s K.

Postoji samo jedna izometrija tipa H.

Lako je provjeriti da je kompozicija dviju izometrija istog tipa, tj. obje iz V ili obje iz C ili obje iz K, translacija uzduž pravca t (slika 9). Budući da znamo kako su jedine translacije koje preslikavaju $\mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$ one za vektore oblika $k\vec{a}$, gdje je k cijeli broj, odmah dobivamo sljedeće rezultate.



Slika 9. Kompozicija dviju izometrija istog tipa V, C ili K je translacija uzduž t.

Ako postoji osna simetrija s_p tipa V koja preslikava $\mathcal{F}$ u samog sebe, onda su sve takve osne simetrije tipa V one kojima je os na udaljenosti $\frac{1}{2}|k\vec{a}|$ od p, gdje je k po volji cijeli broj.

Ako postoji centralna simetrija s_T tipa C za koju je $s_T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, onda su sve takve centralne simetrije one kojima je centar na simetrali pruge t i udaljen $\frac{1}{2}|k\vec{a}|$ od T, gdje je k cijeli broj po volji.

Ako postoji klizna simetrija tipa K koja $\mathcal{F}$ preslikava u $\mathcal{F}$, onda je pomak te klizne simetrije uzduž pravca t jednak $\frac{k}{2}\vec{a}$, gdje je k neki cijeli broj.

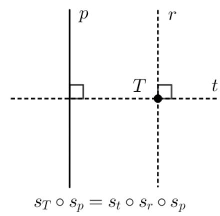
Nećemo posebno bilježiti translacije za $k\vec{a}$ jer su uvijek prisutne kao izometrije koje preslikavaju $\mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$. Promotrimo li koje ostale simetrije ima dani friz, načelno se pojavljuju sve moguće kombinacije, tj. podskupovi od $\{H, V, C, K\}$. No, neke od tih kombinacija ne mogu se pojaviti. To ćemo pokazati pomoću sljedeća dva rezultata.

(1) Ako friz $\mathcal{F}$ ima simetriju iz H, onda ima i simetriju tipa K.

(2) Ako friz $\mathcal{F}$ ima neka dva različita tipa simetrija iz skupa $\{V, C, K\}$, onda ima i treći.

Za dokaz tvrdnje (1) dovoljno je primijetiti da kompozicija translacije za $\vec{a}$ i osne simetrije s obzirom na t daje kliznu simetriju uzduž pravca t.

Kako bismo pokazali (2), primijetimo da se svaka klizna simetrija iz K može prikazati kao kompozicija osne simetrije s_p iz V i centralne simetrije s_T iz C, pri čemu ili p (okomit na t) ili T (na pravcu t) možemo izabrati po volji, vidi sliku 10.



Slika 10. Klizna simetrija prikazana kao kompozicija osne i centralne simetrije.

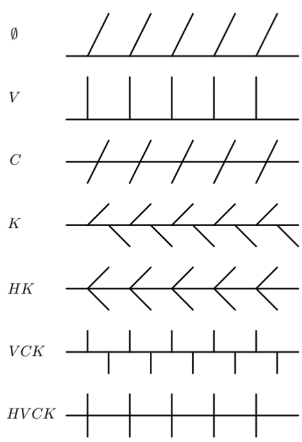
Dakle, ako postoji klizna simetrija tipa K i osna simetrija s_p tipa V koje ostavljaju $\mathcal{F}$ na miru, onda tu kliznu simetriju prikažemo kao $s_T \circ s_p$ za neku točku T na t. Kako je $s_p(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ i $(s_T \circ s_p)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, očito je i $s_T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, pa $\mathcal{F}$ ima simetriju tipa C. Analogno zaključujemo i da postojanje simetrija od $\mathcal{F}$ iz K i C povlači postojanje simetrije od $\mathcal{F}$ iz V. Za treću implikaciju treba samo uočiti da ako postoje simetrije od $\mathcal{F}$ iz V i iz C, onda postoje takve simetrije kojima os osne simetrije i centar centralne simetrije nisu incidentni, pa je njihova kompozicija zaista klizna simetrija.

Pogledajmo sada sve moguće podskupove od $\{H, V, C, K\}$ i izbacimo one kombinacije koje ne mogu predstavljati skup svih simetrija friza (osim translacija) zbog tvrdnji (1) ili (2).

Tvrdnja (1) isključuje kombinacije H, HV, HC, HVC.

Tvrdnja (2) eliminira kombinacije VC, VK, CK, HVK, HCK.

Preostalih sedam kombinacija $\emptyset$, V, C, K, HK, VCK, $HVCK$ su moguće što je ilustrirano frizovima na slici 11.



Slika 11. Mogući tipovi frizova.

Primjeri frizova

U nastavku slijede neki primjeri ornamenata u konkatedrali koji bi vas, uz manje ili više truda u otkrivanju, "čišćenju" i "poravnavanju" uzoraka, trebali navesti da prepoznate friz odgovarajućeg tipa.

Prikazani su samo neki od uočenih ornamenata, a ako ih želite naći više ili vidjeti uživo (jer naše fotografije vrlo često nisu dovoljno kvalitetne), pozivamo vas da sami navratite u konkatedralu na Griču. Putujući do nje, dobro otvorite oči i sigurno ćete također uočiti barem nekoliko frizova.

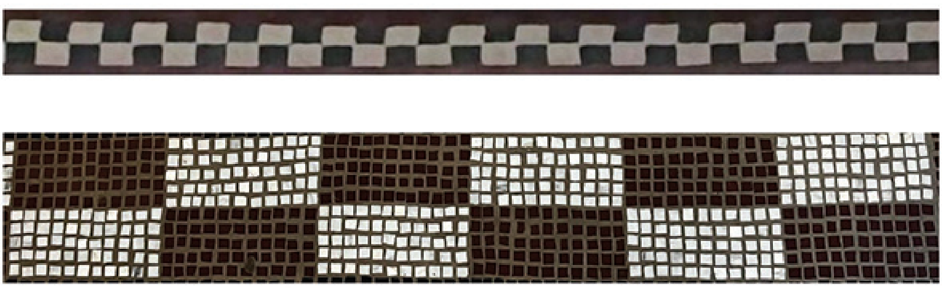
Slika 12. Frizovi tipa $\emptyset$ (jedine simetrije su translacije).

Slika 13. Frizovi tipa V.

Slika 14. Frizovi tipa C.

Slika 15. Frizovi tipa K.

Slika 16. Frizovi tipa HK.



Slika 17. Frizovi tipa VCK. *Ako ste razočarani malim brojem primjera ovog tipa frizova u konkatedrali, prošećite se do obližnje crkve svetog Marka gdje ćete ih, na poznatom šarenom krovu, uočiti još nekoliko.*

Čitatelje koji žele ove rezultate proučiti u nešto apstraktnijem jeziku teorije grupa upućujemo na [4], a za bržu obradu izometrija pomoću koordinatizacije kompleksnim brojevima, pogledajte [1]. Konačno, ako vas zanima kako, s obzirom na simetrije, klasificirati ornamente u ravnini ili na sferi, započnite s bogato ilustriranom i popularno pisanom knjigom [2].

Slika 18. Frizovi tipa $HVCK$.

Literatura

[1] A. F. Beardon, *Frieze groups, cylinders, and quotient groups*, Math. Gaz. **97**, No. 538, 95–100 (2013).

[2] J. H. Conway, H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The magic theorem. A greatly-expanded, much-abridged edition of the symmetries of things*, AK Peters/ CRC Recreational Mathematics Series (2025).

[3] *Konstruktivne metode u geometriji*, skripta za predavanja, 2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/p̃ejkovic/files/kmg.pdf`

[4] G. E. Martin, *Transformation geometry. An introduction to symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1982).