ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2026. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $1/305$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

4071. Nađi sva rješenja jednadžbe
$$(x-7)^2-|x-7|=30.$$

4072. Za pozitivne brojeve a, b, c i prirodan broj n dokaži nejednakost
$$a^n+b^n+c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^n+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^n.$$

4073. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, x, y vrijedi nejednakost
$$\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y} \geq \frac{(a+b)^4}{4(x+y)}.$$

4074. Ako je $\lfloor x \rfloor$ najveće cijelo broja $x \in \mathbb{R}$, a $\{x\}=x-\lfloor x \rfloor$ njegov razlomljeni dio, riješi sustav jednadžbi:
$$\begin{aligned} x+\lfloor y \rfloor+\{z\} &= 3.9\\ y+\lfloor z \rfloor+\{x\} &= 3.5\\ z+\lfloor x \rfloor+\{y\} &= 2. \end{aligned}$$

4075. Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi
$$\begin{aligned} x+2y-z &= \frac{3}{8}\\ \log_x y+5\log_y x-4z &= 4\\ 3\log_x y-\log_y x+4z &= 6. \end{aligned}$$

4076. Za $x \geq 1$ dokaži nejednakost
$$x > \sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}.$$

4077. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α kut nasuprot stranice a dokaži da je
$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha\\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha\\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4078. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su točke K i P takve da je
$$\frac{|AK|}{|BK|}=\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{|CP|}{|BP|}=2.$$
Pravci AP i CK sijeku se u točki E. Odredi površinu trokuta ABC ako je površina trokuta BEC jednaka $4\ \mathrm{cm}^2$.

4079. U trokutu ABC su CD, DE, DF simetrale kutova $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$, tim redom. Ako je $|CE|=e$ i $|CF|=f$, dokaži
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{e}=\frac{1}{b}+\frac{1}{f}.$$

4080. Dana je točka M unutar trokuta ABC sa stranicama a, b, c takva da se iz nje svaka stranica vidi pod jednakim kutem. Odredi $|AM|+|BM|+|CM|$.

4081. Nad stranicama pravokutnog trokuta, čije katete su a i b, konstruirani su kvadrati. Susjedni slobodni vrhovi tih kvadrata spojeni su dužinama. Kolika je površina dobivenog šesterokuta?

4082. a) Dokaži da za sve $\alpha,\ \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

b) Za $n \in N$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dokaži da vrijedi
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \leq \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n}{n}.$$

4083. Treba razmjestiti m muškaraca i $n>m$ žena oko okruglog stola s $m+n$ stolica tako da nikoja dva muškarca ne sjede jedan pored drugog. Na koliko načina se to može napraviti?

4084. Francuski matematičar Fermat dokazao je da ako je n prost broj tada on dijeli 2^n-2. Ako je $n=341$ dokaži da n dijeli 2^n-2.

B) Zadatci iz fizike

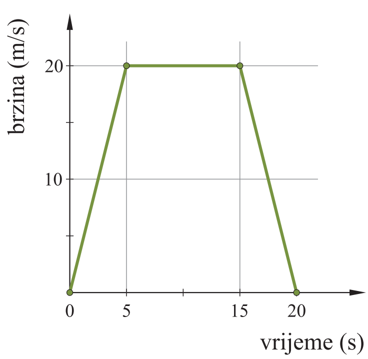
OŠ – 562. Tijekom brzog punjenja baterija električnog automobila se zagrijava, ali i gubi toplinu u okolinu. Brzo punjenje traje 25 min i pri tome se baterija ugrije s $20\,^\circ\mathrm{C}$ na $32\,^\circ\mathrm{C}$. Masa baterije je 400 kg i napravljena je od materijala kojem je specifični toplinski kapacitet $900\ \mathrm{J/kgK}$. Tijekom punjenja ona stalno gubi toplinu u okolinu prosječnom snagom 800 W. Izračunaj ukupnu količinu topline koja je nastala u bateriji tijekom punjenja.

OŠ – 563. Učenici su na klupu visine 1 m stavili drveni kvadar mase 1 kg. Kvadar je pomoću nerastezljive niti zanemarive mase povezan s koloturom na kojoj je uteg mase M. Kolika treba biti masa tog utega da bi on do poda padao točno jednu sekundu? Koeficijent trenja između kvadra i stola je 0.3, a trenje na koloturu je zanemarivo.

OŠ – 564. *Bungee jumping* skakač skače s mosta visokog 30 m. Uže mu je dugačko 20 m i kad se zaustavi nakon skoka od površine vode je udaljen 6 m. Masa skakača je 80 kg. Kolika je konstanta elastičnosti njegovog užeta?

OŠ – 565. Električni automobili su poznati po tome da mogu brzo ubrzavati. Na slici je v-t graf gibanja električnog automobila mase 1600 kg na testnoj stazi. Izračunajte snagu automobila dok je ubrzavao i duljinu testne staze.

v-t graf gibanja električnog automobila



1889. Moment inercije pune homogene kugle mase 1 kg jednak je $10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}$ (oko osi koja prolazi njezinim centrom mase). Koliki je moment inercije šuplje kugle od istoga materijala (i oko iste osi), unutarnjeg polumjera 4 cm i vanjskoga polumjera 6 cm?

1890. Nuklearni fizičar želi pripremiti čim čišći uzorak radioaktivnog izotopa joda $^{131}\mathrm{I}$. Međutim, u uzorku se potkrala primjesa stabilnog izotopa $^{127}\mathrm{I}$. Nestabilni $^{131}\mathrm{I}$ raspada se β-raspadom u izotop $^{131}\mathrm{Xe}$ plemenitog plina ksenona, koji po nastanku ispari iz uzorka. U početnom trenutku u uzorku se nalazi 10^{15} atoma joda, a nestabilni izotop čini $99\,\%$ tog broja. Nakon nekog vremena, zbog raspada $^{131}\mathrm{I}$ i bijega $^{131}\mathrm{Xe}$, broj atoma u uzorku se smanji, a udio nestabilnog izotopa smanji se na $98\,\%$. Koliki je *ukupan* broj atoma joda u uzorku u tom trenutku?

1891. Ako je Sunce savršeno crno tijelo čiji je spektralni maksimum zračenja pri valnoj duljini od 500 nm, nakon koliko vremena izrači energijski ekvivalent mase Zemlje? Masa Zemlje je $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, a polumjer Sunca $6.96 \cdot 10^{8}$ m.

1892. Voda teče brzinom $10\ \mathrm{m/s}$ u zatvorenoj gumenoj cijevi savinutoj u kružnicu. Promjer cijevi je 5 cm i puno je manji od polumjera kružnice koju zatvara čitava cijev. Kolika je sila napetosti cijevi? Koliko mora porasti brzina vode da bi se sila napetosti udvostručila? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1893. Foton valne duljine λ_i raspršuje se pod kutom od 60° na slobodnome elektronu u gibanju. Nakon raspršenja elektron ostaje mirovati, a foton ima valnu duljinu λ_0. Zatim se raspršuje na drugom, mirujućem elektronu, ponovno pod kutom od 60°. Konačna valna duljina fotona sada je $\lambda_f = 125$ pm. Izračunaj početnu de Broglievu valnu duljinu prvog elektrona, koji se sudario s početnim fotonom. Koristi $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js za Planckovu konstantu, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg za masu elektrona i $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s za brzinu svjetlosti. (Potreban je relativistički račun.)

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1894. Zraka svjetlosti upada na prozirnu kuglu indeksa loma n, reflektira se unutar kugle te zatim izlazi iz nje. Ako je α kut upadne zrake s obzirom na okomicu kugle u točki upada, pod kojim će uvjetom izlazna zraka biti paralelna s upadnom?

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1895. Okomito na vertikalnu osovinu učvršćena je šipka koja može rotirati u horizontalnoj ravnini. Duž jednog kraka šipke, na udaljenosti 1 m od osovine, učvršćeno je tijelo mase 1 kg. Na kojoj udaljenosti duž drugog kraka šipke treba pričvrstiti tijelo mase 5 kg da pri okretanju šipke na osovinu ne bi djelovala horizontalna sila?

C) Rješenja iz matematike

4043. *Odredi ostatak pri dijeljenju broja* $2851^{604^{20}}$ *brojem 14.*

Rješenje. Očito je
$$2851^{604^{20}} \equiv 1 \pmod 2. \qquad (1)$$
Dalje je:
$$\begin{aligned}2851^{604^{20}} &= (407\cdot 7+2)^{604^{20}}\\ &\equiv 2^{604^{20}} \pmod 7. \qquad (*)\end{aligned}$$
Sada gledamo eksponent:
$$604^{20} = (600+4)^{20} \equiv 4^{20} \pmod 6$$
$$\left.\begin{aligned}4^{20} &= (3+1)^{20} \equiv 1 \pmod 3\\ 4^{20} &\equiv 0 \pmod 2.\end{aligned}\right\}$$
Općenito ako je
$$x \equiv 1 \pmod 3, \qquad x \equiv 0 \pmod 2,$$
vidimo da je $x_0 = 4$ jedno rješenje kongruencije pa po Kineskom teoremu o ostatcima je $x \equiv 4 \pmod 6$, odnosno $4^{20} \equiv 4 \pmod 6$. Mali Fermatov teorem kaže:
$$2^6 \equiv 1 \pmod 7 \implies 2^{6n} \equiv 1 \pmod 7,\ n \in \mathbb{N}.$$
Iz $(*)$:
$$2^{604^{20}} \equiv 2^{6k+4} \equiv 2^4 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7. \qquad (2)$$
Iz (1) i (2), ponovno po Kineskom teoremu o ostatcima je
$$2851^{604^{20}} \equiv 9 \pmod{14},$$
jer je $x_0 = 9$ jedno rješenje kongruencije
$$x \equiv 1 \pmod 2, \qquad x \equiv 2 \pmod 7.$$

Ur.

4044. *Nađi sva rješenja jednadžbe*
$$|4x - |x-2| + 3| = 16.$$

Rješenje. Imamo
$$\begin{aligned}4x+3-|x-2| &= 16,\\ 4x+3-|x-2| &= -16.\end{aligned}$$
Sada je
$$\begin{aligned}4x-13 &= x-2\\ 4x-13 &= 2-x\\ 4x+19 &= x-2\\ 4x+19 &= 2-x\end{aligned}$$
odakle je
$$x_1 = \frac{11}{3}, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -7, \quad x_4 = -\frac{17}{5}.$$
Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo
$$\left|4\cdot\frac{11}{3} - \left|\frac{11}{3}-2\right| + 3\right| = 16$$
$$|4\cdot 3 - |3-2| + 3| = 14 \neq 16$$
$$|-4\cdot 7 - |-7-2| + 3| = 14 \neq 16$$
$$\left|-\frac{17}{5}\cdot 4 - \left|-\frac{17}{5}-2\right| + 1\right| = 16.$$
Postoje dva rješenja
$$x_1 = \frac{11}{3}, \quad x_4 = -\frac{17}{5}.$$

Ur.

4045. *Za svaki pozitivan cijeli broj* n *s* $g(n)$ *je označen broj uređenih parova* (x, y) *pozitivnih cijelih brojeva takvih da je*
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$
Odredi $g(20)$ *i* $g(2000)$.

Rješenje. Jednadžbu
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$$
možemo zapisati kao
$$20(x+y) = xy$$
$$xy - 20x - 20y + 400 = 400$$
$$(x-20)(y-20) = 400.$$
Dakle, $x-20$, $y-20$ su djelitelji od $400 = 2^4\cdot 5^2$. Broj djelitelja od 400 jednak je $5\cdot 3 = 15$. Budući da promatramo uređene parove, njih ima $2\cdot 15$, tj. $g(20) = 30$.

Slično je

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2000}$$

$$(x-2000)(y-2000)=2000^2.$$

Dakle, $x-2000$ i $y-2000$ su djelitelji od $2000^2=2^8{\cdot}5^6$. Broj djelitelja od 2000^2 jednak je $9\cdot 7=63$. Budući da promatramo uređene parove, njih ima $2\cdot 63=126$, tj. $g(2000)=126$.

Ur.

4046. *Ako su x, y, z realni brojevi takvi da je $x^3+y^3+z^3\neq 0$, dokaži da je*

$$\frac{2xyz-(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3}$$

jednako $\frac{2}{3}$ ako i samo ako je $x+y+z=0$.

Rješenje. Ako je $x+y+z=0$ tada je

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3-3xyz\\ &=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &=0 \qquad (1)\end{aligned}$$

pa vrijedi dana jednakost.

Obratno, ako je

$$\frac{2xyz-(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3}=\frac{2}{3}$$

tada je

$$6xyz-3(x+y+z)=2(x^3+y^3+z^3)$$

i

$$2(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3(x+y+z)=0,$$

a iz (1) dalje imamo

$$(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+3]=0.$$

Kako je drugi faktor pozitivan mora biti $x+y+z=0$.

Ur.

4047. *U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\\ x_2&=\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{1}{x_3}\right)\\ x_3&=\frac{1}{2}\left(x_4+\frac{1}{x_4}\right)\\ x_4&=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right).\end{aligned}$$

Prvo rješenje. Ako je x_1 pozitivan, tada su i x_2, x_3, x_4 također pozitivni brojevi. Isto vrijedi ako je x_1 negativan broj.

1° $x_1>0 \implies x_2,\ x_3,\ x_4>0$. Tada je po A-G nejednakosti:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2=1,$$

i analogno x_2, x_3, $x_4\geqslant 1$. Pretpostavimo da je $x_1>1$. Iz četvrte jednadžbe sustava je $x_4>1$, potom je slično x_2, $x_3\geqslant 1$. Tako je $x_1+x_2+x_3+x_4>4$. Međutim, zbrajanjem jednadžbi sustava je

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}.$$

Zbog $x_i>1 \implies \frac{1}{x_i}<1$ je

$$4<x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}<4.$$

Kako to nije moguće mora biti

$$x_1=1 \implies x_2=x_3=x_4=1.$$

2° $x_1<0 \implies x_2,\ x_3,\ x_4<0$. Uz supstituciju $y_i=-x_i>0$, $i=1,2,3,4$ ovaj se slučaj svodi na 1° i jedino rješenje je

$$\begin{aligned} &y_1=y_2=y_3=y_4\\ &=-x_1=-x_2=-x_3=-x_4=1.\end{aligned}$$

Dakle, ukupno imamo dva realna rješenja sustava:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\{(-1,-1,-1,-1),(1,1,1,1)\}.$$

Drugo rješenje. Iz zadanog sustava je

$$\begin{aligned} 2x_1x_2&=x_2^2+1\\ 2x_2x_3&=x_3^2+1\\ 2x_3x_4&=x_4^2+1\\ 2x_1x_4&=x_1^2+1\\ \hline x_2^2-2x_1x_2+1&=0\\ x_3^2-2x_2x_3+1&=0\\ x_4^2-2x_3x_4+1&=0\\ x_1^2-2x_1x_4+1&=0\\ \hline\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{c}
x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = 0\\
x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4 - x_4^2 = 0\\
x_4^2 - 2x_3x_4 + 2x_1x_4 - x_1^2 = 0\\
\underline{x_1^2 - 2x_1x_4 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0}\\
x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0\\
x_4^2 - 2x_3x_4 + 2x_2x_3 - x_3^2 = 0\\
x_1^2 - 2x_1x_4 + 2x_3x_4 - x_4^2 = 0\\
\underline{x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_4 - x_1^2 = 0}
\end{array}
$$

Sada svaku jednadžbu ovog sustava gledamo kao kvadratnu jednadžbu po nepoznanicama x_3, x_4, x_1 i x_2. Kako tražimo realna rješenja diskriminanta svake jednadžbe mora biti nenegativna. Redom imamo:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 4x_2^2 - 4(2x_1x_2 - x_2^2) = 8x_2(x_2 - x_1) \geqslant 0\\
D_2 &= 4x_3^2 - 4(2x_2x_3 - x_3^2) = 8x_3(x_3 - x_2) \geqslant 0\\
D_3 &= 4x_4^2 - 4(2x_3x_4 - x_4^2) = 8x_4(x_4 - x_3) \geqslant 0\\
D_4 &= 4x_1^2 - 4(2x_1x_4 - x_1^2) = 8x_1(x_1 - x_4) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Vidimo da su x_1, x_2, x_3 i x_4 istog predznaka. Ako su pozitivni, tada je:

$$
\begin{aligned}
&x_2 - x_1 \geqslant 0, \quad x_3 - x_2 \geqslant 0,\\
&x_4 - x_3 \geqslant 0, \quad x_1 - x_4 \geqslant 0\\
&\implies x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant x_4\\
&\implies x_1 = x_2 = x_3 = x_4.
\end{aligned}
$$

Ako su x_1, x_2, x_3 i x_4 negativni, tada je:

$$
\begin{aligned}
&x_2 - x_1 \leqslant 0, \quad x_3 - x_2 \leqslant 0,\\
&x_4 - x_3 \leqslant 0, \quad x_1 - x_4 \leqslant 0\\
&\implies x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_1\\
&\implies x_1 = x_2 = x_3 = x_4.
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo dva realna rješenja sustava:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1.$$

Ur.

4048. *Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}, 0 < \arg\frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Rješenje. Neka je $z = x + iy$ dani kompleksni broj. Tada je

$$
\begin{aligned}
w = \frac{z-1}{z+1} &= \frac{x+iy-i}{x+iy+i}\\
&= \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \cdot \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}\\
&= \frac{x^2 - ixy - ix + ixy + y^2 - ix - 1}{x^2 + (y+1)^2}\\
&= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}.
\end{aligned}
$$

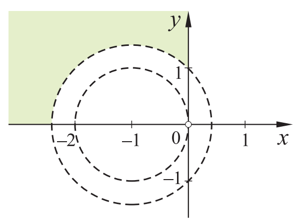
Označimo s $\varphi = \arg w$, i kako je tangens rastuća funkcija u prvom kvadrantu imamo:

$$
\begin{aligned}
&0 < \varphi < \frac{\pi}{4} \implies 0 < \operatorname{tg}\varphi < 1\\
&\implies 0 < \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1.
\end{aligned}
$$

Razlikujemo dva moguća slučaja:

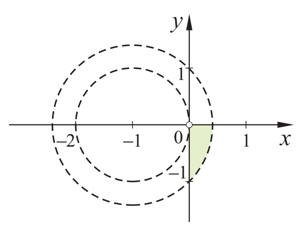
1° ako je $x^2+y^2 > 1$ gornji sustav nejednadžbi ekvivalentan je s:

$$
\begin{aligned}
&0 < -2x < x^2 + y^2 - 1\\
\iff &x < 0 \ \text{ i } \ (x+1)^2 + y^2 > (\sqrt{2})^2;
\end{aligned}
$$



2° ako je $x^2+y^2 < 1$ gornji sustav nejednadžbi ekvivalentan je s:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 1 < -2x < 0\\
\iff &x > 0 \ \text{ i } \ (x+1)^2 + y^2 < (\sqrt{2})^2;
\end{aligned}
$$



Traženi skup točaka S (u Gaussovoj ravnini) je unija dva označena područja.

Ur.

4049. *Odredi najveću vrijednost izraza*

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4$$
$$+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4.$$

gdje su a, b, c, d *realni brojevi takvi da je*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1.$$

Rješenje. Stavimo

$$\begin{aligned}S&=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4\\&\quad+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\\&=\sum(a+b)^4.\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}S&=\sum(a+b)^4\leqslant\sum(a+b)^4+\sum(a-b)^4\\&=2\sum(a^4+6a^2b^2+b^4)\\&=6(a^4+b^4+c^4+d^4)+6\sum 2a^2b^2\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.\end{aligned}$$

Kako je $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, odnosno $S=6$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d$ i $a^2=b^2=c^2=d^2=1$, tj. $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$.

Ur.

4050. *Odredi brojeve* x *i* y *takve da je*

$$5(\log_y x+\log_x y)=26$$
$$xy=64.$$

Rješenje.

$$\frac{\log x}{\log y}+\frac{\log y}{\log x}=\frac{26}{5}$$
$$\log x+\log y=6\log 2$$

Supstitucijom $a=\log x$, $b=\log y$ dobivamo

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{26}{5}$$
$$a+b=6\log 2$$
$$a^2+b^2=\frac{26}{5}ab$$
$$(a+b)^2=\frac{36}{5}ab\implies$$
$$(6\log 2)^2=\frac{36}{5}ab\implies$$
$$ab=5(\log 2)^2.$$

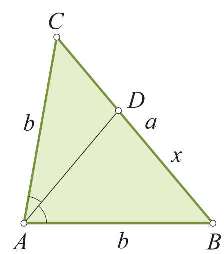
a i b su rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2-6\log 2\cdot t+5(\log 2)^2=0$$
$$t_{1,2}=(3\pm 2)\log 2$$
$$a=\log 2,\quad b=5\log 2\implies x=2,\quad y=32$$
$$a=5\log 2,\quad b=\log 2\implies x=32,\quad y=2.$$

Ur.

4051. *U trokutu* ABC *je* $|BC|=a$, $|AB|=|AC|=b$ *i* $\sphericalangle BAC=80^\circ$. *Dokaži jednakost* $a^3+\sqrt{3}b^3=3ab^2$.

Rješenje. Na stranici $\overline{BC}$ odredimo točku D tako da bude $\sphericalangle CAD=30^\circ$. Jednakokračni trokuti ABC i DAB ($\sphericalangle BCA=\sphericalangle ABC=(180^\circ-80^\circ):2=50^\circ$ i $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ABC=50^\circ$, $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BAC-\sphericalangle CAD=80^\circ-30^\circ=50^\circ$) su slični, pa je $|BC|:|AB|=|AB|:|BD|$, ili $a:b=b:x$ $(|BD|=|AD|=x)$. Odavde je $x=\dfrac{b^2}{a}$, što znači da je $a-x=|DC|=\dfrac{a^2-b^2}{a}$.



Primjenom kosinusova poučka na trokut CAD dobivamo

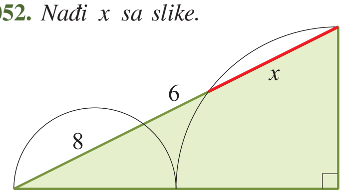
$$|DC|^2=|AC|^2+|AD|^2-2|AC||AD|\cos\sphericalangle CAD$$

ili $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\right)^2=b^2+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2-b\cdot\dfrac{b^2}{a}\cdot\sqrt{3}$.

Odavde, nakon kvadriranja i sređivanja, slijedi željena jednakost $a^3+b^3\sqrt{3}=3ab^2$.

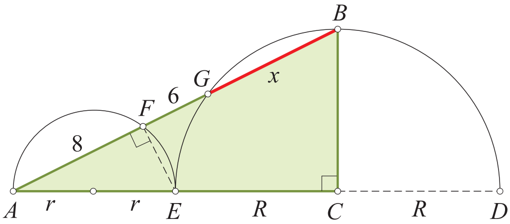
Ur.

4052. *Nađi* x *sa slike.*



Rješenje. Koristimo potenciju točke A u odnosu na veću kružnicu:

$$|AE|\cdot|AD| = |AG|\cdot|AB|$$
$$2r\cdot(2r+2R) = 14\cdot(14+x)$$
$$\Longrightarrow\ x = \frac{2}{7}r(r+R) - 14.$$



Iz $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

$$\Longrightarrow\ \frac{8}{2r+R} = \frac{2r}{14+x}$$
$$\Longrightarrow\ x = \frac{1}{4}r(2r+R) - 14.$$

Iz ovih dviju jednakosti slijedi $R = 6r$, i potom $x = 2r^2 - 14$. Pitagorin poučak za $\triangle ABC$ daje

$$(2r+R)^2 + R^2 = (14+x)^2$$
$$\Longrightarrow\ 64r^2 + 36r^2 = 4r^4$$
$$\Longrightarrow\ r^4 - 25r^2 = 0\ /\ :r^2,\ r\neq 0$$
$$\Longrightarrow\ r^2 = 25$$
$$\Longrightarrow\ r = 5.$$

Sada je $x = 2r^2 - 14 = 36$.

Ur.

4053. *Ispitaj periodičnost funkcija:*

a) $f(x) = \sqrt{|\cos x|}$

b) $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$.

Rješenje. a) Temeljni period od $\cos x$ je 2π, a od $|\cos x|$ je π. Kako je

$$f(x+P) = f(x)\ \Longrightarrow$$
$$\sqrt{|\cos(x+P)|} = \sqrt{|\cos x|}\ /\ ^2$$
$$|\cos(x+P)| = |\cos x|$$

za $x = 0$ je

$$|\cos P| = 1\ \Longrightarrow\ P = \pi.$$

Znači, funkcija $f(x) = \sqrt{|\cos x|}$ je periodička s periodom π.

b) Neka je $P > 0$ period ove funkcije, tj.

$$\cos\sqrt{|x+P|} = \cos\sqrt{|x|},$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za $x = 0$ je $\cos\sqrt{P} = 1$, tj.

$$\sqrt{P} = 2k\pi\ /\ ^2$$
$$P = 4k^2\pi^2,\quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Iz

$$\cos\sqrt{\pi^2} = \cos\pi = -1 \quad \text{i}$$
$$\cos\sqrt{P+\pi^2} = -1$$
$$\Longrightarrow\ P + \pi^2 = (2m+1)^2\pi^2$$
$$\Longrightarrow\ P = 4m(m+1)\pi^2. \qquad (2)$$

Zbog (1) i (2) je:

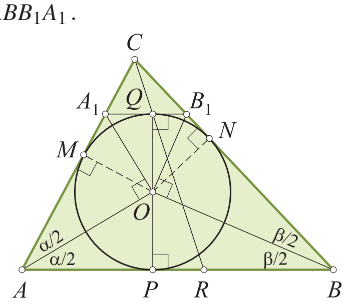
$$4k^2 = 4m(m+1)$$
$$4k^2 = (2m+1)^2 - 1$$
$$(2k)^2 = (2m+1)^2 - 1.$$

Lijeva strana je potpun kvadrat, a desna sigurno nije. To je proturječje s pretpostavkom da je funkcija periodička.

Ur.

4054. *Trokutu ABC upisana je kružnica. Neka je P njezino dirালište sa stranicom $\overline{AB}$, a Q je točka na kružnici dijametralno suprotna točki P. Pravac CQ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki R. Dokaži da je polovište stranice $\overline{AB}$ ujedno i polovište dužine $\overline{PR}$.*

Rješenje. Povucimo tangentu na kružnicu u točki Q i tako dobijemo tangencijalni četverokut ABB_1A_1.



Vidimo da je

$$\sphericalangle AOM = \sphericalangle AOP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{i}$$
$$\sphericalangle A_1OM = \sphericalangle A_1OQ.$$

Zbog

$$\sphericalangle A_1OQ+\sphericalangle A_1OM+\sphericalangle AOM+\sphericalangle AOP=180^\circ$$

je

$$\sphericalangle A_1OM=\sphericalangle A_1OQ=\frac{\alpha}{2}.$$

Slijedi $\sphericalangle A_1OA=90^\circ$, tj. $\triangle A_1OA$ je pravokutan. Potpuno analogno je i $\triangle B_1OB$ pravokutan. Sada su $\overline{OM}$ i $\overline{ON}$ visine spuštene na hipotenuzu, pa je po Euklidovu poučku:

$$|A_1M|\cdot|AM|=|B_1N|\cdot|BN|=r^2$$

tj.

$$\begin{aligned}|A_1Q|\cdot|AP|&=|B_1Q|\cdot|PB|\\ \frac{|A_1Q|}{|B_1Q|}&=\frac{|PB|}{|AP|}.\end{aligned}\tag{1}$$

Za dokaz tvrdnje očito je dovoljno dokazati da je $|AP|=|BR|$. Iz $\triangle ARC\sim\triangle A_1QC$ i $\triangle BRC\sim\triangle B_1QC$ redom slijedi

$$\begin{aligned}\frac{|AR|}{|A_1Q|}&=\frac{|CR|}{|CQ|}\\ \frac{|BR|}{|B_1Q|}&=\frac{|CR|}{|CQ|}\\ \frac{|AR|}{|A_1Q|}&=\frac{|BR|}{|B_1Q|}\\ \frac{|A_1Q|}{|B_1Q|}&=\frac{|AR|}{|BR|}.\end{aligned}$$

Radi (1) je

$$\begin{aligned}\frac{|PB|}{|AP|}&=\frac{|AR|}{|BR|}\\ \frac{|AB|-|AP|}{|AP|}&=\frac{|AB|-|BR|}{|BR|}\\ \frac{|AB|}{|AP|}-1&=\frac{|AB|}{|BR|}-1\\ \frac{|AB|}{|AP|}&=\frac{|AB|}{|BR|}\\ |AP|&=|BR|.\end{aligned}$$

Ovim je tvrdnja dokazana.

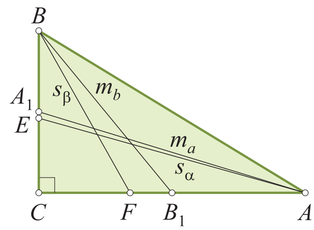
Ur.

4055. *Točke A_1 i B_1 su polovišta kateta $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ABC, a E i F su presjeci simetrala unutarnjih kutova α i β s katetama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Ako je $|AA_1|=m_a$, $|BB_1|=m_b$, $|AE|=s_\alpha$, $|BF|=s_\beta$, r i R radijusi upisane i opisane kružnice, dokaži nejednakost*

$$\frac{m_a^2}{s_\alpha^2}+\frac{m_b^2}{s_\beta^2}\geq\frac{5}{8}\left(3+\frac{r}{R}\right).$$

Rješenje. Lako se dobivaju sljedeće jednakosti za pravokutni trokut ABC:

$$\begin{aligned}m_a^2&=\frac{1}{4}(a^2+4b^2)\\ m_b^2&=\frac{1}{4}(b^2+4a^2)\\ s_\alpha^2&=\frac{2b^2c}{b+c}\quad \text{i}\\ s_\beta^2&=\frac{2a^2c}{a+c}.\end{aligned}$$



Odavde imamo redom:

$$\begin{aligned}&\frac{m_a^2}{s_\alpha^2}+\frac{m_b^2}{s_\beta^2}\\ &=\frac{(b+c)(a^2+4b^2)}{8b^2c}+\frac{(a+c)(b^2+4a^2)}{8a^2c}\\ &=\frac{1}{8a^2b^2c}[ab(a^3+b^3)+c(a^4+b^4)\\ &\quad+4a^2b^2(a+b+2c)].\end{aligned}$$

Iz

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\ a^4+b^4&=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\ ab=ch\quad &\text{i}\quad a^2+b^2=c^2\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}&\frac{m_a^2}{s_\alpha^2}+\frac{m_b^2}{s_\beta^2}\\ &=\frac{1}{8a^2b^2c}[ch(a+b)(c^2-ch)\\ &\quad+c(c^4-2c^2h^2)\\ &\quad+4c^2h^2(a+b+2c)].\end{aligned}$$

Tada je zbog $c \geqslant 2h$, $a+b-c=2r$ i $c=2R$:

$$\begin{aligned}
&\frac{m_a^2}{s_\alpha^2}+\frac{m_b^2}{s_\beta^2}\\
&\geqslant \frac{1}{8c^3h^2}[c^2h^2(a+b)+c\cdot 2c^2h^2\\
&\quad +4c^2h^2(a+b+2c)]\\
&=\frac{1}{8c}[(a+b+2c)+4(a+b+2c)]\\
&=\frac{5}{8}\left(\frac{a+b-c}{c}+3\right)\\
&=\frac{5}{8}\left(\frac{r}{R}+3\right),
\end{aligned}$$

tj. vrijedi dana nejednakost.

Ur.

4056. *Petar se sprema školske praznike provesti s grupom izviđača. Njegovi planovi su točno definirani: svaki drugi dan kupat će se u moru, svaki treći dan njegov je red za odlazak u obližnji dućan po namirnice, a svaki peti dan posvetit će se rješavanju matematičkih zadataka. Prvi dan će provesti, naravno, sve troje. Ako planira na odmoru provesti 90 dana, koliko će biti dana kada ne mora ni prstom maknuti?*

Rješenje. Ako numeriramo dane 1, 2,. . . , 90 možemo definirati skupove:

$$A=\{1,3,5,7,\ldots,89\}$$

– dani kupanja u moru,

$$B=\{1,4,7,10,\ldots,88\}$$

– dani odlaska u dućan,

$$C=\{1,6,11,16,\ldots,86\}$$

– dani rješavanja zadataka.

Očito će se Petar već drugi dan praznika samo kupati.

$$\begin{aligned}
&|A\cup B\cup C|\\
&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|\\
&\quad -|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\
&=45+30+18-15-9-6+3\\
&=66.
\end{aligned}$$

Dakle, broj dana kada će se Petar samo odmarati iznosi $90-66=24$.

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 554. *Učenici su serijski spojili četiri jednaka otpornika na izvor napona 6 V. Ampermetar spojen u taj krug je izmjerio struju od 100 mA. Njihov ampermetar može mjeriti struju do 2 A. Mogu li ga koristiti ako iste otpornike spoje paralelno na isti izvor?*

Rješenje.

$R_1=R_2=R_3=R_4=R$

$U=6\ \text{V}$

$I=100\ \text{mA}=0.1\ \text{A}$

$\underline{I_{\text{max}}=2\ \text{A}}$

$I_{\text{paralele}}=?$

$$R_{\text{serije}}=\frac{U}{I}=\frac{6\ \text{V}}{0.1\ \text{A}}=60\ \Omega$$

$$R_{\text{serije}}=4R$$

$$R=15\ \Omega$$

$$\frac{1}{R_{\text{paralele}}}=4\cdot\frac{1}{R}$$

$$R_{\text{paralele}}=\frac{15\ \Omega}{4}=3.75\ \Omega$$

$$I_{\text{paralele}}=\frac{U}{R_{\text{paralele}}}=\frac{6\ \text{V}}{3.75\ \Omega}=1.6\ \text{A}<I_{\text{max}}.$$

Učenici mogu koristiti taj ampermetar.

Mateo Ajduković (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 555. *Automobil se uspinje na brdo visoko 400 m po cesti dugačkoj 5 km. Do vrha mu je trebalo 10 min. Masa automobila zajedno s vozačem je 1500 kg, a prosječna sila trenja iznosi 300 N. Kolika je snaga automobilskog motora?*

Rješenje.

$h=400\ \text{m}$

$l=5\ \text{km}=5000\ \text{m}$

$t=10\ \text{min}=600\ \text{s}$

$m=1500\ \text{kg}$

$\underline{F_{\text{tr}}=300\ \text{N}}$

$P=?$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{Gh}{l} + F_{\text{tr}} \\
&= \frac{15\,000 \text{ N} \cdot 400 \text{ m}}{5000 \text{ m}} + 300 \text{ N} \\
&= 1200 \text{ N} + 300 \text{ N} = 1500 \text{ N}
\end{aligned}
$$

$$W = Fs = 1500 \text{ N} \cdot 5000 \text{ m} = 7\,500\,000 \text{ J}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{7\,500\,000 \text{ J}}{600 \text{ s}} = 12\,500 \text{ W}.$$

Jakov Smoljak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 556. *Drvena kocka ima volumen 8 cm^3. Kolikim tlakom ona tlači podlogu? Koliki volumen ima kocka ispod koje je tlak dvostruko veći? Gustoća drva od kojeg su kocke napravljene iznosi 700 kg/m^3.*

Rješenje.

$V_1 = 8 \text{ cm}^3$

$\rho = 700 \text{ kg/m}^3$

$\underline{P_2 = 2p_1}$

$V_2 = ?$

$V_1 = 8 \text{ cm}^3 \implies a_1 = 2 \text{ cm} = h_1$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= h_1 g \rho = 0.02 \text{ m} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 700 \text{ kg/m}^3 \\
&= 140 \text{ Pa}
\end{aligned}
$$

$p_2 = 2p_1 = 280 \text{ Pa}$

$$h_2 = \frac{p_2}{g\rho} = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm} = a_2$$

$$V_2 = a_2^3 = 4 \text{ cm}^3 = 64 \text{ cm}^3.$$

Luka Sabolić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 557. *Učiteljica je dala zadatak učenicima u kojem su trebali odrediti gustoću nepravilnog komadića metala koristeći samo preciznu vagu i malu plastičnu čašu. Učenici su prvo izvagali metal i odredili da ima 24 g. Zatim su čašu do vrha napunili vodom i izvagali ju. Imala je 57 g. U punu čašu su pažljivo stavili svoj metal i kad se dio vode izlio iz nje ponovo ju izvagali. Sada joj je masa bila 77 g. Učenici znaju da je gustoća vode 1000 kg/m^3 i pomoću tog podatka su izračunali gustoću metala. Kolika je gustoća tog metala?*

Rješenje.

$m = 24 \text{ g}$

$m_{\check{c}+v_1} = 57 \text{ g}$

$m_{\check{c}+v_2+m} = 77 \text{ g}$

$\underline{\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3}$

$\rho_m = ?$

$$
\begin{aligned}
m_{\check{c}+v_2} &= m_{\check{c}+v_2+m} - m \\
&= 77 \text{ g} - 24 \text{ g} = 53 \text{ g}
\end{aligned}
$$

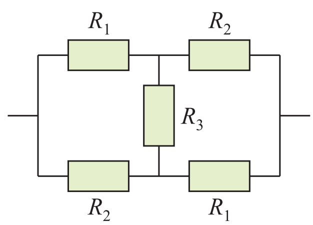
$$
\begin{aligned}
m_{\text{ulivene vode}} &= m_{\check{c}+v_1} - m_{\check{c}+v_2} \\
&= 57 \text{ g} - 53 \text{ g} = 4 \text{ g}
\end{aligned}
$$

$V_{\text{izlivene vode}} = 4 \text{ cm}^3 = V_{\text{metala}}$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{24 \text{ g}}{4 \text{ cm}^3} = 6 \text{ g/cm}^3 = 6000 \text{ kg/m}^3.$$

Mihael Ratkajc (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1875. *Izračunajte ukupan omski otpor strujnog kruga na slici za $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ i $R_3 = 2\ \Omega$.*



Rješenje. Ova shema ne može se svesti na niz serijskih i paralelnih spojeva pa ukupan otpor moramo naći primjenom Kirchhoffovih zakona. Kako je $R_1 < R_2$, struja iz R_1 će se granati kroz R_2 i R_3. Ako su I_0 i V_0 struja i napon nad *čitavim* strujnim krugom, traženi otpor čitavog kruga je

$$R_0 = \frac{V_0}{I_0}.$$

Zbog simetrije kruga prvi Kirchhoffov zakon daje samo dvije strujne jednadžbe:

$$I_0 = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Drugi Kirchhoffov zakon daje

$$V_1 + V_3 - V_2 = 0,$$

a također i

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad (= 2V_1 + V_3 = 2V_2 - V_3),$$

od kojih nam je dovoljna samo jedna. Koristit ćemo samo prvu jednadžbu, a ostale smo raspisali samo radi potpunosti (minusi kod napona se pojavljuju zbog smjera praćenja naponske linije koji je suprotan smjeru struje). Iz Ohmovog zakona imamo $V_i = I_i R_i$, odakle $V_0 = I_1R_1 + I_2R_2$, što uvrštavanjem u R_0 daje

$$R_0 = \frac{I_1R_1 + I_2R_2}{I_2 + I_2}.$$

Primjenom Ohmovog zakona na prvu naponsku jednadžbu imamo $I_1R_1 + I_3R_3 - I_2R_2 = 0$. Moramo elimirati I_3 da bismo dobili vezu između I_1 i I_2. To nam omogućuje jedna od strujnih jednadžbi, iz koje $I_3 = I_1 - I_2$, što uvrštavanjem u naponsku daje

$$I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_3 - I_2R_2 = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$I_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3} I_1.$$

Uvrštavanjem toga u izraz za R_0 preostaje

$$R_0 = \frac{2R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} = 2\ \Omega.$$

Ur.

1876. *Valjak polumjera 2 cm i mase 200 g pluta u uspravnom položaju u tekućini gustoće* 2 g/cm^3. *Nakon što ga potisnemo malo dublje u tekućinu i otpustimo pritisak, valjak počne titrati. Kolika je frekvencija njegova titranja ako je prigušenje titranja zanemarivo?*

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. U vertikalnom smjeru na valjak djeluju težina mg i uzgon $\rho g V$, uz V kao volumen uronjenog dijela. Ukupna sila (pozitivan predznak za silu prema dolje) je

$$F = mg - \rho g V.$$

Neka je V_0 volumen valjka koji je uronjen dok miruje, tj. dok su težina i uzgon uravnoteženi ($\rho g V_0 = mg$). Ukupan uronjeni volumen V u nekom trenutku tijekom titranja parametriziramo kao $V = V_0 + \Delta V$, uz $\Delta V = R^2\pi x$. Za ukupnu silu sada imamo

$$F = mg - \rho g(V_0 + R^2\pi x) = -\rho g R^2 \pi x.$$

Ona ima matematički oblik elastične sile $F = -kx$ $(k = \rho g R^2 \pi)$ koja vodi do harmonijskih oscilacija pa je frekvencija titranja

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{\pi m}} = 1.77\ \text{Hz}.$$

Ur.

1877. *U posudu je naliveno 5 litara mješavine vode i etanola. Mješavinu zagrijavamo grijačem radne snage 1 kW i učinkovitosti zagrijavanja* 80 %. *Ako se mješavina zagrijala od* 20 °C *do* 50 °C *za točno 10 minuta, odredite ukupnu masu tekućine. Uzmite da je volumen smjese jednak zbroju volumena pojedinih tekućina. Koristite sljedeće vrijedosti: specifični toplinski kapacitet vode* 4200 J/kgK, *specifični toplinski kapacitet etanola* 2400 J/kgK, *gustoću vode* 1000 kg/m^3 *i gustoću etanola* 780 kg/m^3.

Rješenje. Iz zadanih podataka $\Delta T = 30$ K, $P_0 = 1000$ W, $\varepsilon = 80$ %, $\Delta t = 600$ s te iz $Q = C\Delta T = \varepsilon P_0 \Delta t$ nalazimo ukupni toplinski kapacitet tekućine

$$C = \frac{\varepsilon P_0 \Delta t}{\Delta T} = 16\,000\ \text{J/K}.$$

Neka je $m_1 = \rho_1 V_1$ masa vode, a $m_2 = \rho_2 V_2$ masa etanola. Ukupna tražena masa tekućine m_0 je

$$m_0 = m_1 + m_2.$$

Neka je $V_0 = 5\ \text{dm}^3$ ukupan zadani volumen smjese. Prema pretpostavci zadatka vrijedi

$$V_0 = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Ukupan toplinski kapacitet smjese je

$$C = m_1c_1 + m_2c_2.$$

Sad imamo tri jednadžbe s tri nepoznanice (m_0, m_1, m_2). Zanima nas m_0. Prvo možemo izraziti $m_2 = m_0 - m_1$ pa to uvrstiti u izraze za C i V_0. Iz izraza za C tada možemo iskazati m_1:

$$m_1 = \frac{C - m_0c_2}{c_1 - c_2},$$

pa to uvrstiti u V_0, odakle je

$$V_0 = \frac{C - m_0c_2}{c_1 - c_2}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2\rho_1} + \frac{m_0}{\rho_2}.$$

Ovu jednadžbu treba riješiti po m_0:

$$m_0 = \frac{V_0\rho_1\rho_2(c_1 - c_2) + C(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1c_1 - \rho_2c_2}.$$

Uvrštavanjem brojeva slijedi $m_0 = 4.53$ kg.

Ur.

1878. *U sljedećim nuklearnim raspadima odredite nepoznate atomske (Z_1, Z_2) i masene (A_1, A_2) brojeve izotopa te oznake nepoznatih elemenata (x, y):*

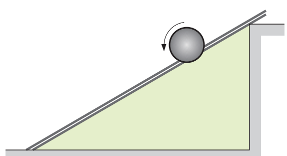
$$
\begin{aligned}
{}^{A_1}_{88}x &\longrightarrow \alpha + {}^{213}_{Z_2}y\\
{}^{142}_{67}x &\longrightarrow p + {}^{A_2}_{Z_2}y\\
{}^{9}_{Z_1}x &\longrightarrow n + {}^{A_2}_{Z_2}He\\
{}^{A_1}_{Z_1}x &\longrightarrow e^- + {}^{24}_{11}y\\
{}^{122}_{Z_1}x &\longrightarrow e^+ + {}^{A_2}_{54}y
\end{aligned}
$$

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
{}^{217}_{88}\mathrm{Ra} &\longrightarrow \alpha + {}^{213}_{86}\mathrm{Rn}\\
{}^{142}_{67}\mathrm{Ho} &\longrightarrow p + {}^{141}_{66}\mathrm{Dy}\\
{}^{9}_{2}\mathrm{He} &\longrightarrow n + {}^{8}_{2}\mathrm{He}\\
{}^{24}_{10}\mathrm{Ne} &\longrightarrow e^- + {}^{24}_{11}\mathrm{Na}\\
{}^{122}_{55}\mathrm{Cs} &\longrightarrow e^+ + {}^{122}_{54}\mathrm{Xe}
\end{aligned}
$$

Ur.

1879. *Kosina je sastavljena od dvije paralelne šipke, svaka od kojih je jednim krajem oslonjena o rub police određene visine, a drugim je uprta o tlo. Šipke su udaljene 2 cm. Niz njih je iz mirovanja u kotrljanje bez proklizavanja puštena homogena kugla polumjera 2 cm. Ako je početna visina središta kugle nad tlom 10 cm, kolika je njezina brzina u trenutku kada dotakne tlo?*



(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. Konačnu brzinu određujemo iz očuvanja energije. Početna energija je gravitacijska potencijalna mgh, uz h kao početnu visinu središta kugle. U trenutku doticanja tla središte kugle je na visini R, uz R kao njezin polumjer. Translacijska kinetička energija tada je $\dfrac{mv^2}{2}$, dok je rotacijska energija $\dfrac{I\omega^2}{2}$ pa je

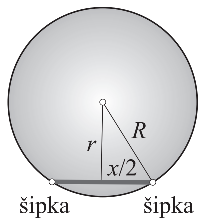
$$mgh = mgR + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

$I = \dfrac{2}{5}mR^2$ je moment inercije homogene kugle. Iz veze $\omega = \dfrac{v}{r}$ translacijske v i kutne brzine ω (uz udaljenost r između spojnice šipki i osi rotacije koja prolazi središtem kugle) slijedi

$$mgh = mgR + \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5}\frac{R^2}{r^2}.$$

Traženi r možemo iščitati iz priložene sheme koja predstavlja pogled prema kugli dok se kotrlja (šipke okomito probadaju sliku). Uz x kao udaljenost šipki imamo

$$r^2 = R^2 - (x/2)^2.$$



Uvrštavanjem toga u jednadžbu za energiju samo moramo izvući v:

$$v = \sqrt{g(h-R)\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2}{5[R^2-(x/2)^2]}\right)^{-1}}.$$

Zadano je $x = R$ pa se (uz $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$) rješenje pojednostavnjuje na

$$v = \sqrt{\frac{30}{23}g(h-R)} \approx 1\ \mathrm{m/s}.$$

Ur.

1880. *Elektron-pozitron par prolijeće uz mirujućeg promatrača i zatim anihilira u tri fotona. Jedan foton emitiran je u smjeru gibanja para, a preostala dva okomito na taj smjer. Ako svi fotoni imaju istu energiju, kolika je početna brzina para? Potreban je relativistički račun.*

Rješenje. Veza između energije E_{fot} i količine gibanja p_{fot} fotona je $E_{\mathrm{fot}} = p_{\mathrm{fot}}c$, uz c kao brzinu svjetlosti u vakuumu. Uvjet jednakih energija znači da svi fotoni imaju iste iznose količine gibanja. Zbog očuvanja ukupne količine gibanja dva "okomita" fotona emitirana su u suprotnim smjerovima te se njihov doprinos ukupnoj količini gibanja vektorski poništava. Stoga posljednji foton, u smjeru početnoga elektron-pozitron para, nosi svu količinu gibanja sustava. Prije anihilacije svu količinu gibanja nosi elektron-pozitron par

$$p_{\text{par}} = \gamma m v,$$

gdje su m i v masa i brzina gibanja *para kao cjeline*, a γ je Lorentzov faktor. Ukupna relativistička energija para je

$$E_{\text{par}} = \gamma m c^2.$$

Odavde je

$$\frac{p_{\text{par}}}{E_{\text{par}}} = \frac{\gamma m v}{\gamma m c^2} = \frac{v}{c^2}.$$

Zbog zakona očuvanja energije energija para prije anihilacije jednaka je ukupnoj energiji svih fotona

$$E_{\text{par}} = 3E_{\text{fot}}.$$

Zbog zakona očuvanja količine gibanja je

$$p_{\text{par}} = p_{\text{fot}}$$

jer nakon anihilacije svu nosi jedan foton. Zbog $E_{\text{fot}} = p_{\text{fot}} c$ za raniji omjer imamo

$$\frac{p_{\text{par}}}{E_{\text{par}}} = \frac{p_{\text{fot}}}{3E_{\text{fot}}} = \frac{1}{3c}.$$

Izjednačavanjem dvaju izraza za $\dfrac{p_{\text{par}}}{E_{\text{par}}}$:

$$\frac{v}{c^2} = \frac{1}{3c} \implies v = \frac{c}{3},$$

početni par se gibao trećinom brzine svjetlosti.

Ur.

1881. *Staklena kugla polumjera 15 cm i indeksa loma 1.5 nalazi se u zraku. Unutar kugle, na udaljenosti 12 cm od njezina središta nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Neka je θ kut odašiljanja svjetlosne zrake s obzirom na spojnicu središta kugle i svjetlosnog izvora. U kojem rasponu kuta θ svjetlosna zraka mora biti odaslana da bi izašla iz kugle? Za koje udaljenosti izvora od središta kugle je moguće da neke zrake ne izađu iz kugle?*

Rješenje. Prema poučku o sinusima za kutove sa slike imamo

$$\frac{\sin\theta}{R} = \frac{\sin\alpha}{L}.$$

Zraka će izaći iz kugle ako je $\sin\alpha \leqslant \dfrac{1}{n}$.

U suprotnome dolazi do totalne refleksije (u idealiziranom slučaju zraka ostaje zarobljena u kugli). Kombinacijom prethodnih uvjeta za kut θ s obzirom na spojnicu središta kugle i izvora svjetlosti dobivamo

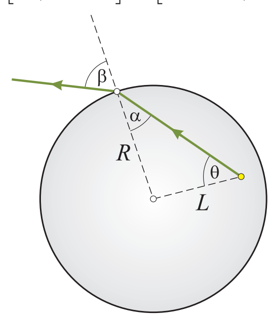
$$\sin\theta \leqslant \frac{R}{nL}.$$

Kako je raspon kuta θ interval $[0, \pi]$, ovaj uvjet zadovoljen je za

$$\theta \in \left[0, \arcsin\frac{R}{nL}\right] \cup \left[\pi - \arcsin\frac{R}{nL}, \pi\right],$$

što se u stupnjevima svodi na

$$\theta \in \left[0^\circ, 56.44^\circ\right] \cup \left[123.56^\circ, 180^\circ\right].$$



Da bi postojao raspon kutova pod kojima dolazi do totalne refleksije, za kritični kut mora vrijediti $\dfrac{R}{nL} < 1$. Stoga izvor mora biti na udaljenosti

$$L > \frac{R}{n}$$

da barem neke zrake zrake ne bi mogle izaći. U našem slučaju to vodi na $L > 10$ cm.

Ur.