ZANIMLJIVOSTI

Školsko natjecanje iz matematike, 26. siječnja 2026. g.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Izračunaj

$$2 \cdot \frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - 4052 \cdot \frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025}.$$

2. Neka je ABC pravokutni trokut s katetama duljina $|AC| = 4$ i $|BC| = 3$. Neka je D točka na hipotenuzi $\overline{AB}$ takva da trokuti ADC i BCD imaju jednake opsege. Koliko iznosi površna trokuta BCD?

3. Neka su a, b, c i d realni brojevi takvi da vrijedi $abcd \neq 0$ i da je

$$a = b - c, \quad b = c - d, \quad c = d - a.$$

Odredi vrijednost izraza

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

4. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^2 + 1$ djeljiv brojem $n + 13$.

5. Spremajući se za natjecanje iz matematike, Marta je u pet dana riješila ukupno 31 zadatak. Svakog je dana riješila više zadataka nego prethodnog, a petog je dana riješila tošno tri puta više zadataka nego prvog. Koliko je zadataka mogla riješiti četvrtog dana?

6. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^2 = b(b + 7)$.

7. U svako polje tablice 5×5 upisan je po jedan cijeli broj pri čemu se u pojedinom retku ili stupcu isti broj nalazi najviše tri puta. Razlika bilo koja dva broja u istom retku ili stupcu iznosi najviše 2. U tablici se nalazi broj 0, ali ne i broj 4. Odredi najveći mogući zbroj svih brojeva u tablici.

II. razred

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{3 - 2\sqrt{x + 6}}{\sqrt{x - 2} - 2} \geq \sqrt{x + 6}.$$

2. Grafovi funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 9x - 20$ i $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$ nacrtani su u koordinatnoj ravnini. Odredi najveću moguću površinu pravokutnog trokuta ABC s pravim kutom u vrhu C smještenog tako da su mu vrhovi A i C na osi apscisa, vrh A pripada grafu funkcije f, a vrh B grafu funkcije g i pritom je apscisa točke B manja od apscise točke A, a njena ordinata veća od ordinate točke A.

3. Zadan je pravokutan trokut opsega 60 čija je visina na hipotenuzu duljine 12. Odredi duljine stranica tog trokuta.

4. Odredi sve realne brojeve r za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 - 19x + r = 0$ kubovi cijelih brojeva.

5. U svako polje pravokutne tablice upisan je po jedan realan broj tako da zbroj brojeva u svakom retku tablice iznosi 1, a zbroj brojeva u svakom stupcu tablice iznosi 2.

a) Može li tablica imati točno 200 polja?

b) Može li tablica imati točno 2000 polja?

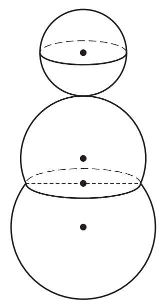
6. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| = 4$, $|BC| = 7$, $|AD| = 5$, $|\sphericalangle CBA| = 90^\circ$, te su kutovi $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle DCB$ šiljasti i međusobno sukladni. Odredi duljinu dužine $\overline{CD}$.

7. Neka su x i y racionalni brojevi takvi da su $x + y$ i $x^2 + y^2$ cijeli brojevi. Jesu li nužno x i y cijeli brojevi?

III. razred

1. Odredi sve parove (x, y) pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi

$$\left.\begin{aligned} y^{x^2-7x+12} &= 1 \\ x + y &= 6. \end{aligned}\right\}$$



2. Ako je $\sin x + \cos x = 1.4$, odredi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

3. Lukas je odlučio napraviti snjegovića od tri kugle čiji su polumjeri 30 cm, 26 cm i 18 cm. Dvije veće kugle prerezao je tako da oba presjeka budu krugovi polumjera 24 cm, te je odbacio manje dijelove, a veće dijelove stavio jedan na drugi, spajajući ih duž tog kruga. Na kraju je na vrh položio najmanju kuglu. Kolika je ukupna visina Lukasovog snjegovića?

4. Za realne brojeve a, b, c, d veće od 1 vrijedi $\log_b a \cdot \log_d c = 1$. Odredi vrijednost izraza

$$\frac{a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c d} \cdot c^{\log_d a} \cdot d^{\log_a b}}{abcd}.$$

5. Polja pravokutne ploče s 2026 redaka i 100 stupaca obojena su naizmjence crno i bijelo, kao na šahovskoj ploči. Skakavac koji se nalazi na nekom polju ploče može skočiti na bilo koje polje iste boje u istom retku, ili bilo koje polje različite bolje u istom stupcu. Koliko se najviše skakavaca može rasporediti na toj ploči tako da niti jedan skakavac ne može skočiti na polje na kojem se već nalazi neki drugi skakavac?

6. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je umnožak prvih n prirodnih brojeva djeljiv zbrojem prvih n prirodnih brojeva.

7. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Ako vrijedi $|\sphericalangle ACB| = 2|\sphericalangle BAC|$ i $|AI| = |BC|$, odredi kutove trokuta ABC.

IV. razred

1. Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj

$$\frac{(2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$$

također prirodan.

2. Mjera šiljastog kuta jednakokračnog trapeza iznosi 75°, a duljine osnovica odnose se kao $2:1$. Ako je duljina kraka tog trapeza 5, kolika mu je površina?

3. Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

4. Vita i Lovro naizmjence bacaju igraću kockicu (na čijim su stranama brojevi od 1 do 6). Svaki od njih zbraja brojeve koje dobije bacanjem kockice. Vita baca prva. Igra završava Vitinom pobjedom ako njezin zbroj dosegne 5 (tj. bude 5 ili više), a Lovrinom pobjedom ako njegov zbroj dosegne 4. Pokaži da je vjerojatnost da Vita pobijedi veća od 0.5.

5. Odredi znamenke a, b, $c \neq 0$ takve da brojevi a, $\overline{ba}$ i $\overline{cba}$ budu uzastopni članovi nekog geometrijskog niza.

6. Na koliko je načina moguće svako od šest polja u nizu obojati jednom od tri boje (crvenom, bijelom ili plavom) tako da ne postoje tri uzastopna polja obojena trima različitim bojama?

7. Odredi najveću moguću vrijednost realnog dijela kompleksnog broja

$$(10 + 14i)z + \frac{8 - 8i}{z}$$

ako je z kompleksan broj takav da je $|z| = 2$.

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Broj $\dfrac{\left(10^{2024} + 10^{2026}\right)^2}{10^{2023} + 10^{2025}}$ zapiši u znanstvenom zapisu.

2. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC nalazi se točka D takva da vrijedi $|AB| = |AD| = |DC|$ te je $|\sphericalangle BAD| = 70°$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle ACB$.

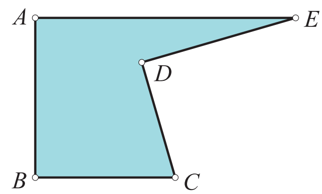
3. Odredi najmanje prirodne brojeve x, y i z za koje vrijedi:

- brojevi $x - 1$, y i z su djeljivi brojem 2,
- brojevi x, $y - 2$ i z su djeljivi brojem 3,
- brojevi x, y i $z - 2$ su djeljivi brojem 5.

4. Na kraju sezone prodavač nudi akciju: ako netko kupi dva para tenisica, za jeftiniji par plaća 50 % pune cijene. Teo je iskoristio akciju i kupio dva različita para tenisica za ukupno 95 eura. Na taj način je potrošio 20 % manje novca nego da je oba para kupio po redovnoj cijeni. Kolika je cijena svakog para tenisica bez popusta?

5. Matko ima četiri nove drvene bojice (crvenu, plavu, zelenu i žutu) i na papiru nacrtan kvadrat $ABCD$ kojem je duljina stranica jednaka duljini bojica. Na koliko načina Matko može položiti na svaku stranicu kvadrata po jednu bojicu tako da vrh crvene bojice i vrh plave bojice ne budu u istom vrhu kvadrata?

6. Izračunaj površinu peterokuta $ABCDE$ sa slike ako je $|AE| = 13$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|DE| = 8$ cm i vrijedi $\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CDE| = 90°$.



7. Odredi posljednju znamenku zbroja

$$1^{2026}+2^{2026}+3^{2026}+4^{2026}+5^{2026}+6^{2026}+7^{2026}+8^{2026}+9^{2026}+10^{2026}.$$

II. razred

1. Kvadratna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ postiže najveću vrijednost 8 za $x=-1$ i vrijedi $f(0)=6$. Odredi nultočke funkcije g ako za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $g(x)=f(x+1)$.

2. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $x|x+1|+1=\dfrac{|x+1|}{x+1}$.

3. Marko u školu udaljenu 3 km ide biciklom. Prvoga je dana do škole vozio prosječnom brzinom v. Drugoga je dana vozio prosječnom brzinom za 10 km/h manjom nego prvoga dana i trebalo mu je tri minute više da stigne do škole. Kojom je prosječnom brzinom Marko vozio prvoga dana i koliko mu je vremena trebalo do škole?

4. U knjižnici s nekoliko soba spremljeno je 1260 knjiga. U svakoj je sobi jednak broj ormara, svaki ormar ima jednak broj polica i na svakoj je polici jednak broj knjiga. Broj soba manji je od broja polica u ormaru, broj polica u ormaru manji je od broja ormara u sobi, a broj ormara u sobi manji je od broja knjiga na polici. Ako je broj knjiga na polici manji od deset, koliko je ormara u toj knjižnici?

5. Odredi sve realne brojeve x i y za koje vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{x+1}+\frac{4}{\sqrt{y-2}} &= 7,\\ \frac{3}{\sqrt{x+1}}-2\sqrt{y-2} &= -7. \end{aligned}\right\}$$

6. Odredi sve realne brojeve k za koje jednadžba

$$x^2-2kx+2x+k^2+k-2=0$$

ima realna i različita rješenja, a zbroj kvadrata rješenja jednadžbe manji je od 20.

7. Trokut ABC je jednakokračan. Točka P polovište je osnovice $\overline{BC}$, a točka D polovište kraka $\overline{AC}$ toga trokuta. Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AP}$ sijeku se u točki S. Okomica iz točke P na dužinu $\overline{BS}$ siječýe tu dužinu u točki N i vrijedi $|BN|:|NS|=2:1$. Ako je $|BD|=27$ cm, koliko iznose duljine stranica trokuta ABC?

III. razred

1. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}+3^{x+1}}{3^5+3^x}}=3$.

2. Neka je x realan broj takav da je $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ i $\sin x=-\dfrac{3}{5}$. Odredi vrijednost izraza $\dfrac{\operatorname{tg} x+\cos\left(x-2^{2026}\pi\right)}{\operatorname{ctg} x+\sin\left(x-2025\pi\right)}$.

3. Odredi sve šesteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{579abc}$ koji su djeljivi s 5, 7 i 9.

4. Teo ima vrečicu s 9 loptica, od kojih su 4 zelene i 5 crvenih. Nasumično izvlači loptice iz vrećice, jednu po jednu, i stavlja ih na stol, sve dok na stolu ne budu dvije loptice iste boje. Koja je vjerojatnost da se u trenutku kada Teo stane s izvlačenjem na stolu nalaze loptice obje boje?

5. Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza $5\sin^2 x-3\cos^2 x-2\sin x$, pri čemu je x realan broj.

6. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} \log_x y = \log_y x, \\ \log_x(x-14y) = \log_y(x-8y). \end{cases}$

7. Četverokutu $ABCD$ može se opisati kružnica polumjera 4 cm. Ako je $|\sphericalangle ABC| = 120°$, $|BC| = 3$ cm i $|AD| = 6$ cm, izračunaj duljine preostalih dviju stranica toga četverokuta.

IV. razred

1. Ako je $z = -\cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{3\pi}{5}$ i $w = 1 + i$, koliko je $(z \cdot w)^{20}$?

2. Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje vrijedi

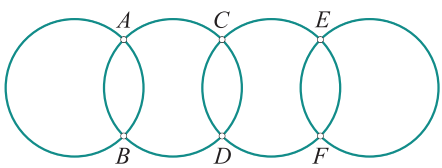
$$\binom{n+3}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} + \binom{n+2}{n+1}.$$

3. Odredi zbroj 1000 najmanjih pozitivnih realnih rješenja jednadžbe

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

4. Niz je zadan formulom za opći član $a_n = \log_2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Koliko najmanje početnih članova niza treba zbrojiti kako bi zbroj bio veći od 2026?

5. Na slici su prikazane četiri kružnice koje se sijeku u šest točaka. Nasumično biramo dvije od tih šest točaka. Koliko iznosi vjerojatnost da odabrane dvije točke pripadaju jednoj od četiri dane kružnice?



6. Neka su A i B dirališta tangenata iz ishodišta O koordinatnog sustava na kružnicu čija je jednadžba $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 10$. Odredi površinu trokuta ABO.

7. Kipar je u svojoj najnovijoj skulpturi od jednakih kockica trebao sastaviti dvije kocke. Za veću kocku je potrošio 387 kockica više nego za manju. Koliko je ukupno kockica upotrijebio?

Matko Ljulj