



math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Primjeri jednostavnih tokova mikropolarnog fluida

Lea Čatipović

studentica na Prirodoslovno-
matematičkom fakultetu Sveučilišta u
Zagrebu,
e-mail:
lea.catipovic@student.math.hr

Igor Pažanin

redoviti profesor u
trajnom zvanju na
Prirodoslovno-
matematičkom fakultetu
Sveučilišta u Zagrebu,
e-mail:
pazanin@math.hr

Sažetak

Model mikropolarnog fluida predstavlja važnu generalizaciju poznatih Navier-Stokesovih jednadžbi koja uzima u obzir mikrostrukturu samog fluida. Cilj ovog rada prezentirati je nekoliko primjera jednostavnih tokova mikropolarnog fluida za koje je moguće odrediti egzaktno rješenje.

Cljučne riječi: mikropolarni fluid, mikrorotacija, jednostavni tokovi, egzaktna rješenja.

1 Uvod

Među mnogim ne-newtonovskim modelima, model mikropolarnog fluida, predložen sredinom šezdesetih godina prošlog stoljeća u članku [4], izazvao je veliku pažnju. Rezultat je to činjenice da, za razliku od klasičnog Navier-Stokesovog sustava koji opisuje tok inkompresibilnog newtonovskog fluida, navedeni model uzima u obzir lokalnu strukturu te mikro-gibanja elemenata fluida. Polazeći od zakona sačuvanja mase, linearnog i angularnog momenta te uvažavajući konstitutivne relacije, izvodi se odgovarajući matematički model (vidjeti npr. monografije [1, 6]) koji, uz standardna polja brzine i tlaka, sadržava novu nepoznatu funkciju koju zovemo mikrorotacija. U skladu s time, Navier-Stokesovim jednadžbama pridružuje se nova vektorska jednadžba koja dolazi od sačuvanja angularnog momenta. Ispostavlja se da se mnogi ne-newtonovski fluidi (kao što su tekući kristali, krv, muljeviti fluidi, polimerni fluidi, itd.) mogu uspješno opisati sustavom mikropolarnih jednadžbi. Ovo je uvaženo od strane matematičke i inženjerske zajednice te se stoga tokovi mikropolarnog fluida intenzivno istražuju u zadnjem desetljeću, pogotovu u kontekstu modeliranja krvotoka (vidjeti npr. [2, 5, 9]).

Slijedom gore navedenog, tok inkompresibilnog mikropolarnog fluida opisan je složenim sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje su još uz to i nelinearne prirode zbog efekata inercije (vidjeti sustav (1)-(3)). Stoga je teško očekivati da se takav sustav može egzaktno riješiti, već ga se najčešće tretira numerički ili korištenjem tehnika

asimptotičke analize kad se mali parametar prirodno pojavljuje u geometriji domene (vidjeti npr. monografiju [8]). Cilj ovog rada izložiti je primjere jednostavnih tokova mikropolarnih fluida za koje ipak moguće odrediti egzaktna rješenja, a koja onda mogu poslužiti u numeričkim simulacijama složenijih tokova. U tu svrhu, promatraju se jednostavne domene toka te uvode dodatne pretpostavke na nepoznate funkcije čime se originalni problem svodi na linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi kojeg smo onda mogućnosti eksplicitno riješiti. Zapisujući rješenja u bezdimenzionalnom obliku, u prilici smo onda diskutirati i ne-newtonovske efekte koji su prisutni zbog mikropolarnosti fluida. Rad je utemeljen na rezultatima iz Poglavlja III.3 monografije [6].

2 Osnovne jednadžbe

U nastavku se bavimo stacionarnim tokom fluida, tj. pretpostavljamo da nepoznate funkcije (brzina \mathbf{u} , tlak p i mikrorotacija \mathbf{w}) ne ovise o vremenu već samo o prostornim varijablama $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Uvjet inkompresibilnosti znači da promatramo fluide s konstantnom gustoćom mase. Uzimajući u obzir specifične zakone konstitucije za mikropolarni fluid, zakoni sačuvanja mase, linearnog i angularnog momenta u odsustvu vanjskih sila i momenta daju:

$$-(\nu + \nu_r)\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\nu_r \text{rot}\mathbf{w}, \quad (1)$$

$$\text{div}\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta\mathbf{w} + I(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (c_o + c_d - c_a)\nabla\text{div}\mathbf{w} + 4\nu_r\mathbf{w} \stackrel{(\exists)}{=} 2\nu_r\text{rot}\mathbf{u}.$$

U sustavu (1)-(3) se, uz standardni (newtonovski) koeficijent viskoznosti ν , pojavljuju četiri nove mikrorotacijske viskoznosti: ν_r , c_o , c_d i c_a . Uočimo da se za $\nu_r = 0$ jednadžbe (1)-(2) svode na klasične Navier-Stokesove jednadžbe. Nadalje, I označava koeficijent mikroinercije, te se koristi uobičajena notacija za diferencijalne operatore:

$$\text{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \Delta\mathbf{v} = \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}, \quad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\text{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

za vektorsku funkciju $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ i skalarnu funkciju ϕ . Detaljan izvod sustava (1)-(3) zainteresirani čitatelj može naći u [??], Poglavlje I. Rubne uvjete ćemo precizirati u primjerima u narednom poglavlju.

3 Primjeri jednostavnih tokova

3.1 Poiseuilleov tok između paralelnih ravnina

Promotrimo tok mikropolarnog fluida između paralelnih ravnina danih sa

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = (-1)^i h\}, \quad i = 1, 2.$$

Pretpostavljamo da je tok generiran konstantnim gradijentom tlaka $\frac{dp}{dx}$ u smjeru osi x . U skladu s tim, uzimamo da je tlak dan sa $p = p(x)$ te pretpostavljamo da brzina ima dominantnu longitudinalnu komponentu koja ovisi o transverzalnoj varijabli, tj. $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$. U tom slučaju, možemo uzeti da mikrorotacija ima samo komponentu

u smjeru osi z koja, također, ovisi samo o y (vidjeti [6]). Dakle, uzimajući da su nepoznate funkcije oblika

$$\mathbf{u} = (u(y), 0, 0), \quad \mathbf{w} = (0, 0, w(y)), \quad p = p(x),$$

nakon uvrštavanja u sustav (1)-(3) dobivamo:

$$(\nu + \nu_r) \frac{d^2 u}{dy^2} + 2\nu_r \frac{dw}{dy} = \frac{dp}{dx}, \quad (4)$$

$$(c_a + c_d) \frac{d^2 w}{dy^2} - 2\nu_r \left(2w + \frac{du}{dy} \right) = 0. \quad (5)$$

Uočimo da iz jednadžbe (4) slijedi $\frac{dp}{dx} = \text{const}$. Sustavu (4)-(5) pridružujemo rubne uvjete:

$$u = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h, \quad (6)$$

$$w = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h. \quad (7)$$

Dakle, polazni nelinearni sustav (1)-(3) parcijalnih diferencijalnih jednadžbi sveli smo na linearni sustav (4)-(5) običnih diferencijalnih jednadžbi (po varijabli y). Integriramo li jednadžbu (4) po y , nalazimo

$$\frac{du}{dy} = - \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} w + \frac{1}{\nu + \nu_r} \frac{dp}{dx} y. \quad (8)$$

Uvrstimo li (8) u jednadžbu (5) slijedi

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{4\nu}{c_a + c_d} \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} w = \frac{1}{c_a + c_d} \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{dp}{dx} y. \quad (9)$$

Gornja jednadžba predstavlja linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda za w s konstantnim koeficijentima (vidjeti npr. [10]) koju možemo eksplicitno riješiti metodom varijacije konstanti uvažavajući rubne uvjete (7) za mikrorotaciju. Dobiveni izraz za w tada uvrštavamo u (4) koju rješavamo na isti način, sada uvažavajući rubne uvjete (6) za brzinu u . Na taj način dobivamo:

$$w(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{1}{h} \frac{\text{sh}(\lambda \frac{y}{h})}{\text{sh}(\lambda)}, \quad (10)$$

$$u(y) = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 - \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{\text{ch}(\lambda) - \text{ch}(\lambda \frac{y}{h})}{\text{sh}(\lambda)}. \quad (11)$$

pri čemu smo uveli parametar λ dan sa

$$\lambda^2 = \frac{4\nu}{c_a + c_d} \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} h^2. \quad (12)$$

Također, ovdje je uzeto da tlak p odgovara klasičnom Poiseuilleovom rješenju $u_P(y) = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2$ koje opisuje tok inkompresibilnog newtonovskog fluida (vidjeti npr. [7]).

Zapišimo sada rješenje (10)-(11) u bezdimenzionalnom obliku. Neka u_0 označava referentnu brzinu (recimo, maksimalnu vrijednost Poiseuilleove brzine $u_P = 1$) i uvedimo sljedeće bezdimenzionalne veličine:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad w^* = \frac{wh}{u_0}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad N = \left(\frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{c_a + c_d}{4\nu} \right)^{1/2}, \quad L = \frac{h}{l}.$$

Tada rješenje (10)-(11) glasi:

$$w^*(Y) = Y - \frac{\text{sh}(NLY)}{\text{sh}(NL)}, \quad (13)$$

$$u^*(Y) = 1 - Y^2 - 2\frac{N}{L} \frac{\text{ch}(NL) - \text{ch}(NLY)}{\text{sh}(NL)}. \quad (14)$$

Bezdimenzionalni parametar $N \in \langle 0, 1 \rangle$ karakterizira vezu između jednadžbi linearnog i angularnog momenta. Što je parametar N bliže 1, to su ne-newtonovski efekti zbog mikropolarnosti fluida značajniji. Parametar l ima dimenziju duljine i karakterizira veličinu molekula. Konačno, bezdimenzionalni parametar L opisuje vezu između geometrije toka i svojstva fluida. Iz definicije zaključujemo da što je L manji to su ne-newtonovski efekti veći. Vizualizacije profila brzine i mikrorotacije u ovisnosti o bezdimenzionalnim parametrima moguće je naći u [11].

Za razliku od klasičnog no-slip rubnog uvjeta (6) za brzinu koji ima jasnu fizikalnu interpretaciju, isto se ne odnosi na nul rubni uvjet (7) za mikrorotaciju. Stoga se često koristi tzv. dinamički rubni uvjet (vidjeti npr. [6]) koji bi u ovoj postavci glasio:

$$w = -\frac{\alpha}{2} \frac{du}{dy} \text{ za } y = \pm h \quad (\alpha = \text{const.}). \quad (15)$$

Rješenje sustava (4)-(5) uz rubne uvjete (6) i (15) dano je sa:

$$w(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{(1-\alpha)(\nu + \nu_r)}{\nu + \nu_r(1-\alpha)} \frac{1}{h} \frac{\text{sh}(\lambda \frac{y}{h})}{\text{sh}(\lambda)}, \quad (16)$$

$$u(y) = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + 2\frac{\nu_r(1-\alpha)}{\nu + \nu_r(1-\alpha)} \frac{1}{\lambda} \frac{\text{ch}(\lambda \frac{y}{h}) - \text{ch}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda)} \quad (17)$$

Primjetimo da za $\alpha = 0$, rubni uvjet (15) zapravo postaje (7), a rješenje (16)-(17) se svodi na (10)-(11).

3.2 Couetteov tok između paralelnih ravnina

Promotrimo sada tok mikropolarnog fluida između paralelnih ravnina

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (1-i)h\}, \quad i = 1, 2$$

u smjeru osi x , generiranog gibanjem ravnine Γ_2 konstantnom brzinom V . U skladu s tim, ovdje uzimamo da je tlak dan sa $p = p(y)$, dok kao i u prethodnom primjeru, pretpostavljamo da su brzina i mikrotacija oblika

$$\mathbf{u} = (u(y), 0, 0), \quad \mathbf{w} = (0, 0, w(y)).$$

Na taj način sustav (1)-(1) prelazi u:

$$(\nu + \nu_r) \frac{d^2 u}{dy^2} + 2\nu_r \frac{dw}{dy} = 0, \quad (18)$$

$$(c_a + c_d) \frac{d^2 w}{dy^2} - 2\nu_r \left(2w + \frac{du}{dy}\right) = 0. \quad (19)$$

U skladu s promatranim problemom, rubni uvjeti za brzinu glase:

$$u(0) = 0, \quad u(h) = V, \quad (20)$$

dok za mikrorotaciju uzimamo dinamički rubni uvjet

$$w = -\frac{\alpha}{2} \frac{du}{dy} \text{ za } y = 0, h. \quad (21)$$

Slično kao u odjeljku 3.1, u prilici smo riješiti sustav (18)-(19) uzimajući u obzir rubne uvjete (20)-(21). Slijedi:

$$u(y) = \frac{V}{K} \left\{ \frac{1 - \text{ch}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda)} \left(1 - \text{ch} \left(\lambda \frac{y}{h} \right) \right) - \text{sh} \left(\lambda \frac{y}{h} \right) + \lambda \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{\nu_r(1 - \alpha)} \frac{y}{h} \right\},$$

$$w(y) = \frac{V\lambda}{2hK} \frac{\nu + \nu_r}{\nu_r} \left\{ \text{ch} \left(\lambda \frac{y}{h} \right) + \frac{1 - \text{ch}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda)} \text{sh} \left(\lambda \frac{y}{h} \right) - \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{(\nu + \nu_r)(1 - \alpha)} \right\},$$

pri čemu je parametar λ dan u (12), dok je

$$K = \lambda \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{\nu_r(1 - \alpha)} + 2 \frac{1 - \text{ch}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda)}. \quad (24)$$

Zapišimo dobiveno rješenje (14)-(14) u bezdimenzionalnom obliku, uz $\alpha = 0$ što odgovara uvjetu $w = 0$ na $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Ovdje je prirodno uzeti V za referentnu brzinu, te, kao i ranije uvodeći

$$u^* = \frac{u}{V}, \quad w^* = \frac{wh}{V}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad L = h \left(\frac{4\nu}{c_a + c_d} \right)^{1/2}, \quad N = \left(\frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2},$$

dolazimo do

$$u^*(Y) = \frac{1}{\frac{L}{N} + 2 \frac{1 - \text{ch}(NL)}{\text{sh}(NL)}} \left\{ \frac{1 - \text{ch}(NL)}{\text{sh}(NL)} (1 - \text{ch}(NLY)) - \text{sh}(NLY) + \frac{L}{N} Y \right\},$$

$$w^*(Y) = \frac{\frac{L}{N}}{2 \left(\frac{L}{N} + 2 \frac{1 - \text{ch}(NL)}{\text{sh}(NL)} \right)} \left\{ \text{ch}(NLY) - \frac{1 - \text{ch}(NL)}{\text{sh}(NL)} \text{sh}(NLY) - 1 \right\}.$$

Za vizualizacije profila brzine i mikrorotacije vidjeti [11].

3.3 Tok tankog sloja fluida između paralelnih ploča

Promatramo tok mikropolarnog fluida između paralelnih ploča

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a < x < a, y = (i - 1)h(t)\}, \quad i = 1, 2,$$

pri čemu se ploča Γ_2 giba prema Γ_1 konstantnom brzinom V_0 . Fluid napušta domenu između ploča u dva smjera, kroz otvorenu granicu $x = a$ i $x = -a$. Uz pretpostavku da je udaljenost između ploča dovoljno mala, tok se može opisati na sljedeći način (vidjeti npr. [3]):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\nu + \nu_r) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x), \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (27)$$

$$0 = (c_a + c_d) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\nu_r \left(2w + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (28)$$

pri čemu smo u (1)-(3) uzeli da su brzina i mikrorotacija dani sa

$$\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y), 0), \quad \mathbf{w} = (0, 0, w(x, y)).$$

Sustavu (25)-(28) pridružujemo rubne uvjete:

$$u = 0 \quad \text{za} \quad y = 0, h, \quad (29)$$

$$v = 0 \quad \text{za} \quad y = 0, \quad v = V_0 \quad \text{za} \quad y = h, \quad (30)$$

$$w = 0 \quad \text{za} \quad y = 0, h, \quad (31)$$

$$p = 0 \quad \text{za} \quad x = \pm a. \quad (32)$$

Prvu komponentu brzine u te mikrorotaciju w računamo iz jednadžbi (25) i (28) te uzimajući u obzir rubne uvjete (29) i (31). Dobivamo:

$$u(x, y) = \frac{y}{2\nu} \frac{dp}{dx}(x)(y - h) + \frac{Nlh}{2\nu} \frac{dp}{dx}(x) \left\{ \operatorname{sh}\left(\lambda \frac{y}{h}\right) - \frac{(\operatorname{ch}\left(\lambda \frac{y}{h}\right) - 1)(\operatorname{ch}(\lambda) - 1)}{\operatorname{sh}(\lambda)} \right\},$$

$$w(x, y) = \frac{h}{2\nu} \frac{dp}{dx}(x) \left\{ \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda \frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh}(\lambda)} - \frac{y}{h} \right\} - \frac{h \operatorname{sh}\left(\lambda \frac{y}{h}\right)}{4\nu} \frac{dp}{dx}(x) \left\{ \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda \frac{y}{h}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\lambda \frac{y}{h}\right)} - \frac{\operatorname{ch}(\lambda) - 1}{\operatorname{sh}(\lambda)} \right\}, \quad (34)$$

gdje su parametri N i l definirani u odjeljku 3.1. Primjetimo da je u izrazima (33)-(34) još uvijek nepoznat tlak p . Njega ćemo odrediti integrirajući jednadžbu za inkompresibilnost (27) (po varijabli y od 0 do h) te uvažavajući rubne uvjete (30). Slijedi,

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy = - \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy = -V_0,$$

iz čega zaključujemo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x, y) dy = -V_0. \quad (35)$$

Uvrštavajući (33) u (35) dobivamo

$$\frac{d^2 p}{dx^2}(x) = \frac{\nu V_0}{h^3 \left\{ \frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right\}}.$$

Jednostavnim integriranjem te uzimajući u obzir rubne uvjete (32) za tlak, nalazimo

$$p(x) = \frac{\nu V_0 (x^2 - a^2)}{2h^3 \left[\frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right]}. \quad (36)$$

Preostalu komponentu brzine v možemo odrediti iz (16), koristeći dobivene izraze (33) i (36), što ostavljamo zainteresiranom čitatelju za vježbu.

4 Zaključak

U ovom radu prezentiran je model mikropolarnog fluida koji uspješno opisuje tok mnogih ne-newtonovskih fluida i, kao takav, predstavlja važnu generalizaciju klasičnih Navier-Stokesovih jednažbi. Od posebnog značaja u literaturi je primjena mikropolarnog fluida u modeliranju krvotoka. Premda je odgovarajući matematički model dan vrlo složenim nelinearnim sustavom diferencijalnih jednažbi, u nekim situacijama moguće je odrediti egzaktno rješenje koristeći tehnike rješavanja običnih diferencijalnih jednažbi. Nadamo se da će zainteresiranom čitatelju tema biti zanimljiva, s ciljem popularizacije područja matematičkog modeliranja u mehanici fluida.

Bibliografija

- [1] I. Aganović, *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element (2003).
- [2] M. Ashfaq, Z. Asghar, Y. Nie, W. Shatanaw, *Application of micropolar fluid model to blood flow through catheterized artery with stenosis and thrombosis*, Int. J. Mod. Phys. B **39** (07), 2550048 (2025).
- [3] D. Dupuy, G. Panasenko, R. Stavre, *Asymptotic methods for micropolar fluids in a tube structure*. Math. Models Methods Appl. Sci. **14**, 735–758 (2004).
- [4] A.C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. **16** (1966), 1–16.
- [5] S. Jaiswal, P.K. Yadav, *A micropolar-Newtonian blood flow model through a porous layered artery in the presence of a magnetic field*, Phys. Fluids **31**, 071901 (2019).
- [6] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids, Theory and Applications*, Birkhäuser (1999).
- [7] E. Marušić-Paloka, *Incompressible Newtonian flow through thin pipes*, in Proceedings of the 2nd Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing (Eds. Z. Drmač, V. Hari, L. Sopta, Z. Tutek, K. Veselić), Springer (2003).
- [8] G. Panasenko, K. Pileckas, *Multiscale analysis of viscous flows in thin tube structures*, Birkhäuser (2024).
- [9] A.K. Roy, O.A. Beg, *Mathematical modelling of unsteady solute dispersion in two-fluid (micropolar-Newtonian) blood flow with bulk reaction*, Int. Commun. Heat Mass Transf. **122**, 105169 (2021).
- [10] Z. Tutek, M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednažbe*, skripta, PMF-Matematički odsjek (2019).
- [11] A. Vuleta, *Tok mikropolarnog fluida*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek (2020).

