math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

O nekim nestandardnim zadacima iz opisne statistike

Bojan Kovačić
Tehničko veleučilište u Zagrebu,
Elektrotehnički odjel,
e-mail:
`bojan.kovacic@tvz.hr`

Mandi Orlić Bachler
Tehničko veleučilište u Zagrebu,
Elektrotehnički odjel,
e-mail:
`mandi.orlic@tvz.hr`

Ema Gukov
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
studentica,
e-mail:
`egukov@student.grad.hr`

Sažetak

U radu se izlažu, detaljno rješavaju i metodički komentiraju četiri nestandardna ispitna zadatka iz opisne statistike koji se zadaju studentima elektrotehnike i graditeljstva Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu. Navodi se i argumentira stav autora da su ovakvi i slični tipovi ispitnih zadataka primjereni za provjeru znanja gradiva opisne statistike na tehničkim stručnim prijediplomskim studijima imajući u vidu zadatke iz opisne statistike koji se u novije vrijeme zadaju na ispitu iz matematike na državnoj maturi.

Ključne riječi: nestandardni ispitni zadaci, opisna statistika, koeficijent varijacije, koeficijent kvartilne devijacije.

1 Uvod

U nekoliko posljednjih godina na ispitima iz matematike na državnoj maturi obavezno se pojavljuju i zadaci iz opisne statistike. Tipovi takvih zadataka su sve donedavno bili standardni na kolokvijima i pismenim ispitima koji se zadaju studentima stručnih studija na našim veleučilištima. Na temelju svojega višegodišnjega nastavnoga iskustva smatramo potpuno neprimjerenim da bilo koji ispitni zadatak iz opisne statistike koja se predaje na našim veleučilištima po konceptu i težini bude jednak nekom od zadataka iz istoga područja koji se zadaje na ispitu iz matematike na državnoj maturi. Zbog toga će se u ovom članku izložiti neki, trenutno nestandardni ispitni zadaci iz opisne statistike koji su zadavani na ispitima iz predmeta Vjerojatnost i statistika na stručnim studijima elektrotehnike i graditeljstva Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu.

Posebno želimo naglasiti nužnost da ti ispitni zadaci budu koncipirani tako da se, osim znanja gradiva opisne statistike, provjerava i znanje osnovnih matematičkih ideja i koncepata usvojenih u temeljnim matematičkim predmetima koji prethode predmetu Vjerojatnost i statistika, ali i gradiva srednjoškolske matematike koje studenti nedovoljno dobro usvoje ili ga jednostavno zaborave kao što su npr. pojednostavljivanje i sređivanje algebarskih izraza, rješavanje sustava (ne)jednadžbi i dr. Ponovno na temelju svojega višegodišnjega nastavnoga iskustva znamo da studenti npr. ispravno odrede derivaciju neke realne funkcije jedne realne varijable, ali ne znaju pojednostavniti njezino pravilo pridruživanja (tj. " srediti dobiveni izraz do kraja"). Zbog toga smatramo da se među zadacima iz predmeta Vjerojatnost i statistika moraju pojaviti zadaci u kojima će se od studenata tražiti znanje gore spomenutih osnovnih ideja i koncepata.

Radi potpunosti izlaganja najprije navodimo definicije i statističke formule koje ćemo kasnije efektivno koristiti. Detaljniji pregled formula koje se koriste u nastavi opisne statistike na stručnim studijima elektrotehnike i graditeljstva Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu naveden je u [1].

2 Pregled korištenih definicija i formula

Pretpostavimo da je $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (konačan) niz izmjerenih podataka nekoga kvantitativnoga obilježja, tj. (konačan) numerički niz.

Definicija 1. **Aritmetička sredina** svih elemenata promatranoga niza je broj

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{1}$$

Napomena 1. Za aritmetičku sredinu se često, ali neprecizno koristi termin prosjek (elemenata promatranoga niza). Naime, u ekonomskim i drugim analizama se koriste i geometrijska sredina i harmonijska sredina, pa se tako npr. govori o prosječnom godišnjem povećanju cijena koje se dobije kao geometrijska sredina određenih vrijednosti. Zbog toga ćemo u ovom radu koristiti isključivo termin aritmetička sredina.

Definicija 2. **Varijanca** promatranoga niza je nenegativan realan broj

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 \ . \tag{2}$$

Ona se obično interpretira kao aritmetička sredina kvadrata odstupanja elemenata promatranoga niza od njihove aritmetičke sredine.

Umjesto (2) u zadacima je jednostavnije koristiti sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 1. Varijanca svih elemenata promatranoga niza može se izračunati i iz izraza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\overline{x})^2 \ . \tag{3}$$

Dokaz. Vidjeti npr. [2], [3] ili [4]. ■

Definicija 3. **Standardna devijacija** (standardno odstupanje) promatranoga niza je nenegativan realan broj

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \ . \tag{4}$$

Ekvivalentno, standardna devijacija je drugi korijen iz varijance.

Napomena 2. U nestatističkoj literaturi koju studenti koriste u nastavi drugih (nematematičkih) predmeta standardna devijacija se često pogrešno interpretira kao " prosječno odstupanje od prosjeka", tj. " prosječno odstupanje od aritmetičke sredine". Iako je smislen, pojam prosječnoga odstupanja elemenata niza od njihove aritmetičke sredine je potpuno beskoristan za statističku analizu jer se lako pokazuje (vidjeti npr. [5]) da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}) = 0 \,. \tag{5}$$

Definicija 4. **Koeficijent varijacije** promatranoga niza je omjer standardne devijacije i aritmetičke sredine (eventualno izražen u postotcima):

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \,. \tag{6}$$

Napomena 3. Koeficijent varijacije je uvijek neki realan broj iz segmenta $[0, 1]$. On zapravo opisuje intenzitet varijabiliteta elemenata promatranoga niza oko njihove aritmetičke sredine. Njegova osnovna prednost je bezdimenzionalnost, što znači da pomoću njega možemo uspoređivati varijabilitete izmjerenih vrijednosti dvaju obilježja koja imaju različite mjerne jedinice (npr. visina i masa).

Umjesto (6) u zadacima je ponekad jednostavnije koristiti sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 2. Koeficijent varijacije jednak je:

$$V = \sqrt{\frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i} - 1} \,. \tag{7}$$

Dokaz. Slijedi iz (3) i (6). Detalje prepuštamo čitatelju. ■

Sada dodatno pretpostavimo da je niz $x_1, x_2, \ldots, x_N$ uzlazno sortiran, tj. da vrijede nejednakosti:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N \,.$$

Definicija 5. **Donji ili prvi kvartil** promatranoga niza je:

$$Q_1 = \begin{cases} x_{\lceil \frac{N}{4} \rceil}, & \textit{ako } \; 4 \nmid N, \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{N}{4}} + x_{\frac{N}{4}+1} \right), & \text{inače} \,. \end{cases} \tag{8}$$

Napomena 4. S $\lceil x \rceil$ je standardno označen najmanji cijeli broj jednak ili veći od x .

Napomena 5. Donji kvartil se najčešće interpretira kao položajna mjera koja odvaja 25% najmanjih članova niza.

Definicija 6. Gornji ili treći kvartil promatranoga niza je:

$$Q_3 = \begin{cases} x_{\left\lceil \frac{3}{4}\cdot N \right\rceil}, & \text{ako } 4 \nmid N, \\ \frac{1}{2}\cdot\left(x_{\frac{3}{4}\cdot N} + x_{\frac{3}{4}\cdot N+1}\right), & \text{inače} . \end{cases} \tag{9}$$

Napomena 6. Treći kvartil se najčešće interpretira kao položajna mjera koja odvaja 25% najvećih članova niza.

Definicija 7. Koeficijent kvartilne devijacije promatranoga niza je:

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} . \tag{10}$$

Napomena 7. I koeficijent kvartilne devijacije je neki realan broj iz segmenta $[0, 1]$. On zapravo opisuje intenzitet varijabiliteta elemenata niza oko njihova medijana, odnosno oko položajne vrijednosti koja dijeli uzlazno sortirani numerički niz na dva jednakobrojna dijela. Ako numerički niz sadrži ekstremno male ili ekstremno velike vrijednosti, medijan je bolji reprezentant toga niza u odnosu na aritmetičku sredinu.

Napomena 8. Zavisno o vrijednosti koeficijenta varijacije, odnosno koeficijenta kvartilne devijacije, kategorizira se intenzitet varijabiliteta članova numeričkoga niza oko njihove aritmetičke sredine, odnosno oko njihova medijana. Tu kategorizaciju zainteresirani čitatelj može naći u [1] ili [5].

Detaljnija razmatranja ovdje izostavljamo. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [2], [3] i [5].

U nastavku izlažemo najavljene nestandardne ispitne zadatke.

3 Zadatak 1.

Zadan je uzlazno uređeni niz mjerenja izlaznog napona (iskazanoga u voltima) jednog laboratorijskog izvora napajanja:

$$4.2,\ 4.5,\ U,\ 5.0,\ 5.2,\ 5.4,\ 5.9,\ 6,\ 6.1 .$$

Za koje je sve vrijednosti U intenzitet varijabiliteta elemenata zadanoga niza oko njihova medijana relativno nizak?

Napomena 9. (vidjeti [1] ili [5]) Intenzitet varijabiliteta elemenata niza oko njihova medijana je relativno nizak ako pripadni koeficijent kvartilne devijacije pripada intervalu $[0.1, 0.2\rangle$.

3.1 Rješenje zadatka 1.

Najprije primijetimo da zbog pretpostavke o uzlaznoj sortiranosti niza mora vrijediti $U \in [4.5, 5.0]$. Također, uočimo da zadani niz ima ukupno 9 elemenata, a taj broj nije djeljiv s 4. Koristeći definicijske formule (8), (9) i (10) dobivamo:

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{x_{\left\lceil \frac{3}{4}\cdot 9\right\rceil} - x_{\left\lceil \frac{9}{4}\right\rceil}}{x_{\left\lceil \frac{3}{4}\cdot 9\right\rceil} + x_{\left\lceil \frac{9}{4}\right\rceil}} = \frac{x_7 - x_3}{x_7 + x_3} = \frac{5.9 - U}{5.9 + U} \tag{11}$$

Prema zahtjevu zadatka, dobiveni koeficijent mora pripadati intervalu $[0.1, 0.2\rangle$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$0.1 \leq \frac{5.9 - U}{5.9 + U} < 0.2 \,. \tag{12}$$

Zbog $U \in [4.5, 5.0]$ nazivnik gornjega razlomka je strogo pozitivan realan broj. Dakle, gornju nejednadžbu smijemo pomnožiti s $5.9 + U$, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 5.9 - U \geq 0.1 \cdot (5.9 + U)\,, \\ 5.9 - U < 0.2 \cdot (5.9 + U)\ . \end{cases} \tag{13}$$

Njegovim rješavanjem dobivamo:

$$U \in \left\langle \frac{59}{15}, \frac{531}{110} \right] \ .$$

Ponovno zbog zahtjeva $U \in [4.5, 5.0]$ rješenje zadatka je:

$$U \in \left\langle \frac{59}{15}, \frac{531}{110} \right] \cap [4.5, 5.0] = \left[\frac{9}{2}, \frac{531}{110} \right] \ .$$

Ovom skupu pripadaju npr. vrijednosti 4.6, 4.7 i 4.8.

3.2 Komentar rješenja zadatka 1.

Osnovna pogreška koju studenti čine pri rješavanju ovoga tipa zadatka je potpuni previd pretpostavke da je polazni niz podataka uzlazno uređen. Konkretno, znatan dio studenata kao rješenje zadatka dobiva $U \in \left\langle \frac{59}{15}, \frac{531}{110} \right]$. Ovakva pogreška ukazuje i na nerazumijevanje teorijskih postavki bitnih za rješavanje ove vrste zadataka, tj. da se formule za određivanje donjega i gornjega kvartila ne mogu primijeniti ako polazni niz nije uzlazno uređen. U takvim slučajevima u potpunosti izostaje vrlo bitan zahtjev $U \in [4.5, 5.0]$.

Dio studenata ne zna ispravno riješiti nejednadžbu (12). Konkretno, oni ne znaju valjano obrazložiti zašto tu nejednadžbu smijemo pomnožiti izrazom $5.9 + U$. Iako bi valjani argument za provedbu množenja zapravo trebao biti zahtjev $U \in [4.5, 5.0]$, zbog fizikalne interpretacije izmjerenih vrijednosti (vrijednosti napona) u ovom je slučaju prihvatljivo i obrazloženje da je vrijednost napona uvijek nenegativna i da zbog toga vrijedi $5.9 + U > 0$.

Naposljetku se pojavljuje i problem rješavanja sustava (13), i to uglavnom jer se u objema nejednadžbama toga sustava – nakon sređivanja izraza – uz nepoznanicu U pojavljuju strogo negativni koeficijenti, pa je pri dijeljenju tim koeficijentima nužno promijeniti i znak nejednakosti. Riječ je o gradivu koje se obrađuje u 1. razredu srednje škole i čije se znanje provjerava na ispitu iz matematike na državnoj maturi, a kojega dio studenata nedovoljno dobro zna.

4 Zadatak 2.

Zadan je niz međusobno različitih vrijednosti jakosti struje (iskazanih u mA) izmjerenih u nekom strujnom krugu:

$$1.2,\ 1.5,\ 1,\ 1.8,\ 1.4,\ 1.7,\ 2.2,\ I\,.$$

Sve izmjerene vrijednosti su konačni decimalni brojevi. Ako je koeficijent varijacije toga niza jednak $\frac{\sqrt{57}}{32}$, odredite pripadni koeficijent kvartilne devijacije i objasnite njegovo značenje.

4.1 Rješenje zadatka 2.

Primjenom formule (7) dobivamo jednadžbu:

$$\frac{\sqrt{57}}{32} = \sqrt{\frac{8 \cdot \left(1.2^2 + 1.5^2 + 1^2 + 1.8^2 + 1.4^2 + 1.7^2 + 2.2^2 + I^2\right)}{(1.2 + 1.5 + 1 + 1.8 + 1.4 + 1.7 + 2.2 + I)^2} - 1}\,. \tag{14}$$

Toj jednadžbi je ekvivalentna jednadžba

$$8192 \cdot \left(I^2 + 17.62\right) = 1081 \cdot (I + 10.8)^2\,. \tag{15}$$

Njezina rješenja su $I_1 = \frac{45638}{35555}$ i $I_2 = 2$. Vrijednost I_1 odbacujemo jer je njezin decimalni prikaz beskonačan periodičan decimalan broj. Zbog toga je $I = I_2 = 2$.

Sada uzlazno sortiramo zadani 8-člani niz:

$$1,\ 1.2,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.7,\ 1.8,\ 2,\ 2.2,$$

pa lako izračunamo:

$$\begin{aligned}
V_Q &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x_6 + x_7) - \frac{1}{2} \cdot (x_2 + x_3)}{\frac{1}{2} \cdot (x_6 + x_7) + \frac{1}{2} \cdot (x_2 + x_3)} \\
&= \frac{x_6 + x_7 - x_2 - x_3}{x_6 + x_7 + x_2 + x_3} \\
&= \frac{1.8 + 2 - 1.2 - 1.4}{1.8 + 2 + 1.2 + 1.4} \\
&= \frac{3}{16} = 0.1875 = 18.75\%\,.
\end{aligned}$$

Koristeći Napomenu 9. zaključujemo da je intenzitet varijabiliteta članova zadanoga niza oko njihova medijana relativno nizak. (Zanimljivo je da je u ovom slučaju medijan promatranoga niza jednak aritmetičkoj sredini njegovih članova, tj. 1.6.)

4.2 Komentar rješenja zadatka 2.

Kao što se može i pretpostaviti, studenti imaju najviše poteškoća sa sređivanjem jednadžbe (14), odnosno dobivanjem ekvivalentne jednadžbe (15). Manji dio njih previđa podatak da su sve izmjerene vrijednosti konačni decimalni brojevi, pa pogrešno zaključuje da postoje dvije moguće vrijednosti veličine x, a time i dva koeficijenta kvartilne devijacije. Međutim, nakon što ispravno odredi vrijednost x, dio studenata ponovno previđa zahtjev da je za određivanje koeficijenta kvartilne devijacije nužno najprije uzlazno urediti polazni niz. On očito nije uzlazno uređen jer npr. vrijedi nejednakost $x_2 > x_3$. Naposljetku, manji dio studenata primjenjuje pogrešnu formulu za određivanje donjega i gornjega kvartila zanemarujući da je ukupan broj članova niza djeljiv s 4.

Ove pogreške iznova ukazuju na važnost znanja sređivanja algebarskoga izraza, ali i svih teorijskih zahtjeva koji moraju biti ispunjeni prilikom određivanja kvartila. Drugim riječima, nije dovoljno samo primijeniti " gotove" formule, nego treba znati i razumjeti odgovarajuće teorijske postavke.

5 Zadatak 3.

Tijekom jednoga radnoga mjeseca prikupljeni su podaci o prosječnoj dnevnoj potrošnji goriva (iskazanoj u litrama) različitih tipova građevinskih strojeva na jednom velikom gradilištu. Podaci su grupirani u prave razrede. Dobivena je donja tablica.

Tablica 1: Podaci o prosječnoj dnevnoj potrošnji goriva.

Prosječna potrošnja [l]	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
Broj strojeva	n	25	10	15

Odredite najmanju i najveću vrijednost za koju je intenzitet varijabiliteta elemenata zadanoga niza oko njihove aritmetičke sredine umjeren.

Napomena 10. (vidjeti [1] ili [5]) Intenzitet varijabiliteta elemenata niza oko njihove aritmetičke sredine je umjeren ako pripadni koeficijent varijacije pripada intervalu $[0.3, 0.5\rangle$.

5.1 Rješenje zadatka 3.

U ovom zadatku najprije moramo odrediti sredinu svakoga pojedinoga pravoga razreda. Ona je jednaka aritmetičkoj sredini donje i gornje granice toga razreda. Tako dobivamo tablicu 2.

Tablica 2: Sredine razreda i pripadajuće apsolutne frekvencije.

Prosječna potrošnja [l]	50	70	90	110
Broj strojeva	n	25	10	15

Koristeći formulu (7) odredimo izraz za koeficijent varijacije:

$$V = \sqrt{\frac{(n+25+10+15)\cdot\left(n\cdot 50^2+25\cdot 70^2+10\cdot 90^2+15\cdot 110^2\right)}{(n\cdot 50+25\cdot 70+10\cdot 90+15\cdot 110)^2}-1}$$
$$= \sqrt{\frac{32\cdot n+304}{n^2+172\cdot n+7396}}\,.$$

Prema zahtjevu zadatka, vrijednost toga koeficijenta mora pripadati intervalu $[0.3, 0.5\rangle$. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$0.3 \leq \sqrt{\frac{32\cdot n+304}{n^2+172\cdot n+7396}} < 0.5 \tag{16}$$

Polinom $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $p(x)=x^2$, je strogo rastući na intervalu $[0.3, 0.5\rangle$, pa se kvadriranjem nejednadžbe (16) dobiva

$$0.09 \leq \frac{32\cdot n+304}{n^2+172\cdot n+7396} < 0.25\;, \tag{17}$$

odnosno

$$\begin{cases} \dfrac{32 \cdot n + 304}{n^2 + 172 \cdot n + 7396} \geq 0.09, \\ \\ \dfrac{32 \cdot n + 304}{n^2 + 172 \cdot n + 7396} < 0.25\,. \end{cases} \tag{18}$$

Taj sustav kvadratnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom ekvivalentan je sustavu:

$$\begin{cases} 9 \cdot n^2 - 1652 \cdot n + 36164 \leq 0, \\ n^2 + 44 \cdot n + 6180 > 0\,. \end{cases} \tag{19}$$

Druga nejednakost je istinita za svaki $n \in \mathbb{R}$ jer je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe strogo negativna. Posebno, ta je nejednakost istinita i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Rješavanjem prve nejednadžbe dobivamo:

$$n \in \left[\frac{1}{9} \cdot (86 - 40 \cdot \sqrt{223})\,, \frac{1}{9} \cdot (86 + 40 \cdot \sqrt{223})\right]\,.$$

Međutim, prema prirodi zadatka, odnosno značenju veličine n (broj strojeva), vrijednost n mora biti prirodan broj, pa je

$$n \in \left[\frac{1}{9} \cdot (86 - 40 \cdot \sqrt{223})\,, \frac{1}{9} \cdot (86 + 40 \cdot \sqrt{223})\right] \cap \mathbb{N} = [26, 27, \ldots, 157, 158]\,.$$

Dakle, tražene vrijednosti su redom:

$$n_{min} = 26,\; n_{max} = 158\,.$$

5.2 Komentar rješenja zadatka 3.

Pri rješavanju ovoga zadatka studenti imaju slične poteškoće kao i pri rješavanju zadatka 2. Osim sređivanja algebarskoga izraza pomoću kojega se određuje koeficijent varijacije, dodatna poteškoća je rješavanje sustava dviju kvadratnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom. Dio studenata ne uočava da je druga nejednadžba u sustavu (19) istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$ i da je zapravo ne treba rješavati. Dio studenata previđa značenje nepoznate veličine n, pa je shvaća kao strogo pozitivan realan broj, te – kao rješenje zadatka – navodi donju, odnosno gornju granicu segmenta $n \in \left[\frac{1}{9} \cdot \left(86 - 40 \cdot \sqrt{223}\right), \frac{1}{9} \cdot \left(86 + 40 \cdot \sqrt{223}\right)\right]$.

I u ovom zadatku se, osim važnosti sređivanja algebarskih izraza, još jednom naglašava značaj *značenja* nepoznate veličine, odnosno uočavanja da njezina vrijednost nužno mora biti nenegativan cijeli broj.

6 Zadatak 4.

Niz od deset izmjerenih tlačnih čvrstoća (iskazanih u MPa) uzoraka morta sastoji se od devet međusobno jednakih podataka (C) i točno jednoga podatka $C_x \neq C$. Odredite najmanju vrijednost C_x (u zavisnosti od C) tako da intenzitet varijabiliteta svih izmjerenih čvrstoća oko njihove aritmetičke sredine bude visok.

Napomena 11. (vidjeti [1] ili [5]) Intenzitet varijabiliteta elemenata statističkoga niza oko njihove aritmetičke sredine je visok ako pripadni koeficijent varijacije nije manji od 70%.

Ovaj zadatak ćemo malo poopćiti.

7 Zadatak 5.

Niz od ukupno $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, podataka dobivenih nekim mjerenjem sastoji se od $N - 1$ međusobno jednakih strogo pozitivnih vrijednosti (x) i točno jedne strogo pozitivne vrijednosti $y \neq x$. Odredite najmanju vrijednost y (u zavisnosti od N i x) tako da intenzitet varijabiliteta svih podataka oko njihove aritmetičke sredine bude visok.

7.1 Rješenje zadatka 5.

Koeficijent varijacije zadanoga niza podataka jednak je:

$$V = \sqrt{\frac{N \cdot ((N-1) \cdot x^2 + y^2)}{((N-1) \cdot x + y)^2} - 1} = \sqrt{\frac{(N-1) \cdot (x-y)^2}{((N-1) \cdot x + y)^2}}$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost mora biti jednaka ili veća od 0.7, pa slijedi:

$$\frac{(N-1) \cdot (x-y)^2}{((N-1) \cdot x + y)^2} \geq 0.49,$$

$$(100N - 149)\, y^2 - 298\,(N-1)\, xy - \left(49N^2 - 198N + 149\right) x^2 \geq 0\,. \tag{20}$$

Nejednadžba (20) je kvadratna nejednadžba s nepoznanicom y.
Diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe jednaka je:

$$\begin{aligned} D &= (298 \cdot (N-1))^2 \cdot x^2 + 4 \cdot (100 \cdot N - 149) \cdot \left(49 \cdot N^2 - 198 \cdot N + 149\right) \cdot x^2 \\ &= 19600 \cdot N^2 \cdot (N-1) \cdot x^2\,, \end{aligned}$$

otkuda je

$$\sqrt{D} = 140 \cdot N \cdot \sqrt{N-1} \cdot x$$

Prema tome, skup svih rješenja nejednadžbe (20) je:

$$S = \left\langle 0, \frac{149 \cdot (N-1) - 70 \cdot N \cdot \sqrt{N-1}}{100 \cdot N - 149} \cdot x \right] \cup \left[\frac{149 \cdot (N-1) + 70 \cdot N \cdot \sqrt{N-1}}{100 \cdot N - 149} \cdot x, \infty \right\rangle\,. \tag{21}$$

Primijetimo da iz nejednakosti

$$149 \cdot (N-1) - 70 \cdot N \cdot \sqrt{N-1} < 0$$

i uvjeta $N \geq 2$ slijedi

$$\begin{aligned} 149 \cdot \sqrt{(N-1)} - 70 \cdot N &< 0 \\ 4900 \cdot N^2 - 22201 \cdot N + 22201 &> 0 \\ N &> \frac{149}{49}\,. \end{aligned}$$

(Detalje prepuštamo čitatelju kao korisnu vježbu.) Odatle zaključujemo da za $N \in \{2, 3\}$ zadatak nema rješenja jer skup $\left\langle 0, \frac{149 \cdot (N-1) - 70 \cdot N \cdot \sqrt{N-1}}{100 \cdot N - 149} \cdot x \right]$ u tim slučajevima nema najmanji element. Za $N \geq 4$ zadatak ima jedinstveno rješenje

$$y_{min} = \frac{149 \cdot (N-1) + 70 \cdot N \cdot \sqrt{N-1}}{100 \cdot N - 149} \cdot x \,. \qquad (22)$$

7.2 Rješenje zadatka 4.

U (22) uvrstimo $N = 10$, $x = C$, pa dobijemo:

$$C_x = \frac{149 \cdot (10-1) + 70 \cdot 10 \cdot \sqrt{10-1}}{100 \cdot 10 - 149} \cdot C = \frac{93}{23} \cdot C \,.$$

7.3 Komentar rješenja zadatka 5.

Ovaj tip zadatka je studentima najčešće vrlo težak jer se u njemu pojavljuju dvije (doduše, konstantne) veličine N i x pomoću kojih je potrebno izraziti koeficijent varijacije. I ovdje je praktički nužno dobro znati sređivanje algebarskih izraza. Nadalje, iako se u rješenju zadatka pojavljuje rješavanje kvadratne nejednadžbe s jednom nepoznanicom (y) koje se uči u 2. razredu srednjih škola i polaže na državnoj maturi iz matematike, studentima to rješavanje predstavlja problem uglavnom iz istoga razloga kao i sređivanje izraza za koeficijent varijacije, tj. zato što se u skupu (21) ne pojavljuju isključivo " konkretni" brojevi, nego i veličine N i x.

Formalno bi se moglo reći da je tražena najmanja vrijednost u ovom zadatku realna funkcija dviju realnih varijabli i da se takve vrste funkcija uče tek na specijalističkim studijima.

Međutim, uvjereni smo da opisani postupak rješenja zadatka 5. valjano opovrgava da je za rješenje toga zadatka nužno znati raditi s realnim funkcijama dviju realnih varijabli. Također treba napomenuti i sljedeće. Iako zadatak 5. ima smisla i ako se pretpostavi da su $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, ipak smo odlučili pretpostaviti da su te veličine strogo pozitivne jer su podaci dobiveni mjerenjima u elektrotehnici i graditeljstvu najčešće strogo pozitivni. Pritom postoje praktične iznimke (npr. mjerenje temperature zraka), ali takve su iznimke relativno rijetke i zbog toga ih nismo uzimali u obzir. Zadatke 4. i 5. smatramo i metodički vrlo korisnima jer studenti bez dovoljnoga iskustva u statističkoj obradi podataka često smatraju da ako statistički niz sadrži " jako puno" međusobno jednakih numeričkih podataka, onda točno jedan podatak koji će " prouzročiti" visok intenzitet varijabiliteta tih podataka oko njihove aritmetičke sredine mora biti " jako velik". Iz rješenja zadatka 4. vidi se da je za postizanje takvoga varijabiliteta dovoljno uzeti podatak koji je " malo više" od četiri puta veći od svakoga od preostalih devet podataka. Za $N = 100$ dobiva se $y_{min} = 8.6 \cdot x$, odnosno za postizanje visokoga varijabiliteta podataka oko aritmetičke sredine dovoljno je uzeti da je 100. podatak devet puta veći od svakoga od preostalih 99 međusobno jednakih podataka.

8 Zaključak

Zbog uvrštavanja gradiva iz osnova opisne statistike u gradivo koje se polaže na državnoj maturi iz matematike, nužno je redefinirati koncept ispitnih zadataka iz opisne statistike u okviru predmeta Vjerojatnost i statistika koji se predaje na stručnim studijima koji se izvode na našim veleučilištima. U članku je izloženo nekoliko trenutno nestandardnih ispitnih zadataka. Osim provjere znanja odgovarajućih ishoda učenja, oni imaju cilj i dodatno provjeriti stvarno znanje srednjoškolske matematike koje je student trebao steći tijekom svojega srednjoškolskoga obrazovanja (sre\dj ivanje algebarskih izraza, rješavanje sustava linearnih/kvadratnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom itd.).

Rješavanje zadataka iz opisne statistike studenti često provode prema načelu: " Odaberi odgovarajuću formulu, uvrsti potrebne podatke i izračunaj traženi pokazatelj.‟ Ovakvo načelo smatramo potpuno pogrešnim jer se temelji na prepoznavanju, a ne na razumijevanju što je u zadatku zadano, a što se traži. Kao, uostalom, i svo ispitno gradivo koje polažu tijekom studija, tako bi i gradivo vjerojatnosti i statistike studenti trebali naučiti i razumjeti radi stjecanja trajnijeg znanja koje će potom primijeniti u nastavi drugih (nematematičkih) predmeta, ali i u svakodnevnoj poslovnoj praksi.

Ovaj rad je podržan od strane Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta HRZZ-IP-2024-05-3882.

Bibliografija

[1] B. Kovačić, L. Marohnić, M. Orlić Bachler: Repetitorij vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike i graditeljstva, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2023.

[2] I. Šošić: Primijenjena statistika, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] A. Rozga: Statistika za ekonomiste, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, 2017.

[4] S. Suljagić: Vjerojatnost i statistika, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2003.

[5] M. Papić: Primijenjena statistika u MS Excelu za ekonomiste, znanstvenike i neznalice, Likarija d.o.o., Tounj, 2018.

ISSN 1334-6083