

**math.e**

*Hrvatski matematički elektronički časopis*

## Monster grupa

### **Matej Kresl**

Prirodoslovno-matematički fakultet,  
Sveučilište u Zagrebu, diplomirani  
student (mag. math.),  
e-mail:  
matej.kresl@student.math.hr

### **Veronika Pedić Tomić**

Prirodoslovno-  
matematički fakultet,  
Sveučilište u Zagreb,  
docentica,  
e-mail:  
vpedic@math.hr

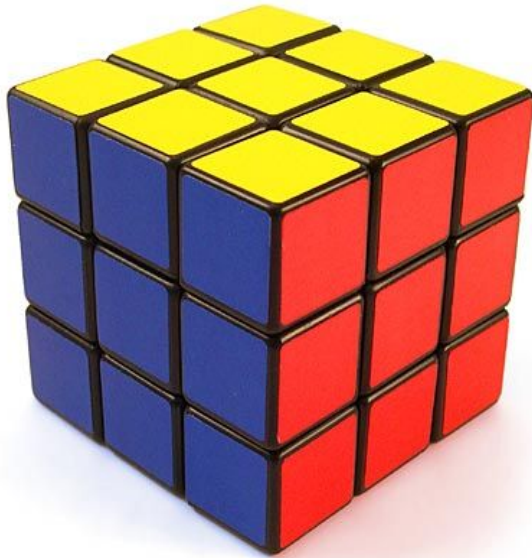
**Ključne riječi:** algebra verteks-operatora, j-funkcija, konacne grupe, monster grupa, proste grupe, Zvonimir Janko

## 1 Uvod

Klasifikacija konačnih prostih grupa jedan je od najvažnijih i najopsežnijih teorema u teoriji grupa. Prvi koraci u dokazu teorema započeti su krajem devetnaestog stoljeća, a dokaz je dovršen tek 2004. godine, uz doprinos mnogih istaknutih svjetskih matematičara, uključujući i hrvatskog matematičara Zvonimira Janka.

Budući da se mnogi problemi iz različitih grana matematike prirodno mogu prevesti na jezik grupa, ovaj teorem nalazi svoje primjene (između ostalog) u teoriji vjerojatnosti, kombinatorici, računalnoj znanosti, fizici, kao i u samoj algebri. Štoviše, pojam grupe dobro modelira i koncepte koje na prvi pogled ne bismo niti smatrali matematičkim objektima.

Jedan popularan primjer je mehanička igračka Rubikova kocka. Naime, svaki niz poteza koji igrač može napraviti pri slaganju Rubikove kocke zapravo je kompozicija osnovnih šest poteza: rotacija bilo koje stranice kocke u smjeru kazaljke na satu. Promotrimo primjerice standardnu Rubikovu kocku s devet polja na svakoj stranici (tj.  $3 \times 3 \times 3$  kocku).



Svaku rotaciju neke stranice kocke možemo shvatiti kao permutaciju malih polja u kocki. Budući da je na kocki ukupno  $6 \times 9 = 54$  polja, ali središnjih 6 elemenata se nikada ne mijenja, dobili smo zapravo podgrupu grupe permutacija  $S_{48}$ . Sada se slaganje Rubikove kocke može svesti na više jednostavnijih potproblema. Primjerice, Morwen Thistlewaite razvio je algoritam u kojem se ograničavanjem vrsta poteza koji se može odigrati dobije niz podgrupa grupe  $S_{48}$ . Na taj način se složeni problem slaganja cijele Rubikove kocke svodi na više jednostavnijih problema.

U nastavku donosimo formalnu matematičku definiciju grupe i opis klasifikacijskog teorema konačnih grupa prostog reda.

## 2 Teorija grupa

### 2.1 Osnove teorije grupa

Uređeni par  $(G, *)$ , gdje je  $G$  neprazan skup te je  $*: G \times G \rightarrow G$  binarna operacija, naziva se **grupa** ako vrijede sljedeća svojstva: [(i)]

- (1)  $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G$  (asocijativnost)
- (2)  $(\exists e \in G) : e * x = x * e = x \quad \forall x \in G$  (neutralni element)
- (3)  $(\forall x \in G)(\exists! x^{-1} \in G) : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$  (inverzni element)

Ako dodatno vrijedi svojstvo komutativnosti  $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ , za uređeni par  $(G, *)$  kažemo da je komutativna grupa ili abelova grupa.

Jedan od najjednostavnijih primjera grupe je skup cijelih brojeva  $\mathbb{Z}$  uz operaciju zbrajanja. Za početak, primijetimo da je operacija zbrajanja binarna operacija te je zatvorena na  $\mathbb{Z}$ , odnosno dva elementa iz skupa  $\mathbb{Z}$  preslikava opet u skup  $\mathbb{Z}$ . Nadalje, uočimo da su zadovoljeni ostali uvjeti definicije grupe. Prvo svojstvo vrijedi jer grupiranje elemenata pri zbrajanju cijelih brojeva ne utječe na rezultat, to jest skup  $\mathbb{Z}$  zadovoljava svojstvo asocijativnosti. Drugo svojstvo je zadovoljeno jer je neutralni element za operaciju zbrajanja 0 koja se nalazi u samom skupu  $\mathbb{Z}$ . Naposljetku, treće svojstvo je zadovoljeno jer je inverzni element za operaciju zbrajanja svakog elementa u skupu  $\mathbb{Z}$  njegov suprotan broj koji se opet nalazi u  $\mathbb{Z}$ . Dakle, uređeni par  $(\mathbb{Z}, +)$  je grupa. Štoviše, radi se o abelovoj grupi.

Nadalje, neka je  $(G, *)$  grupa te  $H$  podskup od  $G$ . Za  $H$  kažemo da

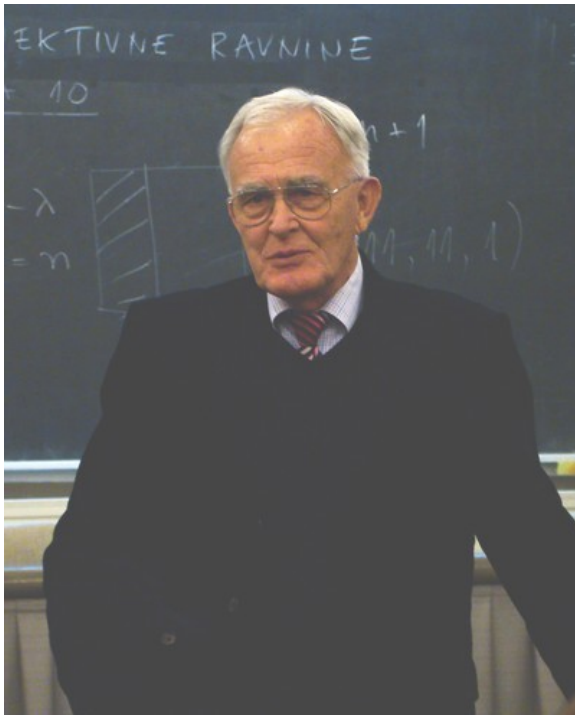
je **podgrupa** od  $G$  ako je  $H$  grupa s obzirom na binarnu operaciju uz koju je  $G$  grupa. Drugim riječima,  $H$  je podgrupa od  $G$  ako je i  $(H, *)$  grupa. Također, pišemo  $H \leq G$ . Za podgrupu  $H$  grupe  $G$  kažemo da je **normalna** ako se ne mijenja konjugacijom, to jest zadovoljava svojstvo  $gHg^{-1} = H$  za svaki  $g \in G$ . Tada pišemo  $H \trianglelefteq G$ . Normalne podgrupe imaju važnu ulogu u razumijevanju strukture grupa.

Posebnu klasu čine **proste grupe** koje ponekad nazivamo jednostavnima. Grupa  $G$  je prosta ako su joj jedine normalne podgrupe trivijalne:  $\{e\}$  te ona sama. Proste grupe možemo smatrati temeljem teorije grupa upravo zato što se ne rastavljaju na normalne podgrupe i često čine osnovu složenijih konstrukcija. Spomenimo još jedno važno svojstvo. Za grupu  $G$  kažemo da je **konačna** ukoliko je konačnog reda, odnosno ukoliko ima konačno mnogo elemenata.

## 2.2 Povijesni pregled i klasifikacija konačnih jednostavnih grupa

Proučavanje konačnih prostih grupa dugo vremena bilo je središnja tema algebre. Tijekom 19. i 20. stoljeća, matematičari su identificirali nekoliko beskonačnih familija prostih grupa: cikličke grupe, alternirajuće grupe  $A_n$  za  $n \geq 5$  te konačne grupe Liejevog tipa. Osim ovih beskonačnih familija, 1860-ih otkrivene su sporadične grupe. Nazvane su tako jer se ne uklapaju ni u jednu od gore tri navedene beskonačne familije grupa. Među najzaslužnijima za njihovo otkrivanje je francuski matematičar Emile Mathieu, po kome su neke od njih dobile ime. Mathieuove grupe  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{23}$  te  $M_{24}$  bile su prvo otkriće u povijesti sporadičnih grupa i iznenadile su tadašnje istraživače svojom složenom strukturom. Upravo je to bio razlog dugogodišnjeg vjerovanja da je lista poznatih sporadičnih grupa potpuna te da, uz beskonačne familije konačnih prostih grupa, čine cjelokupnu klasifikaciju prostih konačnih grupa.

Ova percepcija trajala je gotovo cijelo stoljeće, sve do 1965. godine kada je hrvatski matematičar Zvonimir Janko otkrio novu sporadičnu grupu  $J_1$ . Ovo otkriće izazvalo je veliko iznenađenje i označilo je početak moderne teorije sporadičnih grupa. Tijekom sljedećih deset godina mnogi matematičari usmjerili su pažnju u istraživanje ovih iznimnih grupa. To je rezultiralo otkrićem dodatnih dvadeset sporadičnih grupa. Posebnost njihova otkrića leži u tome da su one otkrivene kroz različite pristupe kao što su kombinatorne konstrukcije, analize geometrijskih objekata, permutacijske reprezentacije. U kasnijim fazama, neke su otkrivene uz pomoć računala.



Slika 1: Profesor Zvonimir Janko na Sveučilištu u Zagrebu 2007. godine

Važno je napomenuti da je Janko, osim prve, otkrio još tri nove sporadične grupe  $J_2, J_3, J_4$ . Sve četiri grupe koje je otkrio, nazvane su njemu u čast. Grupa  $J_4$  je posljednje otkrivena sporadična grupa. Na taj način Janko je ujedno otvorio i zatvorio potragu za ovim posebnim strukturama. Konačno, do 1981. godine potvrđeno je da postoji točno 26 sporadičnih grupa čime je potraga za njima uistinu zaključena.

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$	Mathieuve grupe
$J_1, J_2, J_3, J_4$	Jankove grupe
.1, .2, .3	Conwayjeve grupe
$M(22), M(23), M(24)'$	Fischerove grupe
HS	Higman-Simsova grupa
Mc	McLaughlinova grupa
Suz	Suzukijeva (sporadična) grupa
Ru	Rudvalisova grupa
He	Heldova grupa
Ly	Lyonova grupa
ON	O'Nanova grupa
$F_5$	Haradova grupa
$F_3$	Thompsonova grupa
$F_2$	Fischerova "baby monster" grupa
$F_1$	Fischer-Griessova "monster" grupa

Slika 2: Sporadične grupe

Najveći i zasigurno jedan od najzanimljivijih članova familije sporadičnih grupa je Monster grupa, u oznaci  $F_1$  ili često  $\mathbb{M}$ . Postojanje ovako velike proste sporadične grupe konceptualno je predviđeno krajem 1960-ih i početkom 1970-ih. Bernd Fischer, proučavajući tzv. 3- tranzitivne grupne strukture i relacije involucija, predložio je postojanje grupe izuzetno velikog reda koja bi sadržavala sve dotad poznate sporadične grupe kao svoje podgrupe ili kompozicijske faktore. Njegova predviđanja bila su temeljena na kombinatornim svojstvima involucija i 3- tranzitivnih permutacijskih klasa. Iako su Fischer i njegovi suradnici mogli empirijski istraživati

svojsva takve grupe, njezina egzistencija u tom trenutku nije bila formalno dokazana. Dobiveni rezultati temeljili su se na eksperimentalnim proračunima, a provjerama određenih kombinacija relacija involucija i orbita nisu nailazili na kontradikcije. No, to nije bio formalni dokaz da grupa zaista postoji. Prvi formalni dokaz egzistencije ove grupe objavio je Robert Griess 1980. godine. On je konstruirao Monster grupu kao grupu automorfizama posebne algebre dimenzije 196 884 koju danas nazivamo Griessova algebra. Njegov konstruktivni pristup omogućio je realizaciju formalnog dokaza egzistencije Monster grupe, a istovremeno je pružio način za njezino istraživanje kroz algebarske i reprezentacijske metode. Griessova konstrukcija bila je revolucionarna ne samo zbog samog dokaza egzistencije, već i zbog korištene metode koja uključuje uporabu velike algebarske strukture kao okvira za izgradnju grupe. Do tada je većina sporadičnih grupa bila otkrivena permutacijskim ili kombinatornim metodama. Međutim, Monster grupa je reda otprilike  $8 \times 10^{53}$  čime je nadmašila ostale sporadične grupe po veličini, ali i po složenosti što je zahtjevalo razvoj novog pristupa.

### 3 Čudovišna mjesečina (Monstrous Moonshine)

Jedan od najzanimljivijih i najljepših fenomena u matematici je otkriće dubokih veza između naizgled nepovezanih teorija. U središtu takvog jednog otkrića nalazi se upravo Monster grupa.

Naime, u 70-im godinama prošlog stoljeća britansko-kanadski matematičar John McKay uočio je zanimljivu *slučajnost*:

$$\begin{aligned} 196\,884 &= 196\,883 + 1, \\ 21\,493\,760 &= 21\,296\,876 + 196\,883 + 1, \\ 864\,299\,970 &= 842\,609\,326 + 21\,296\,876 + 2 \cdot 196\,883 + 2 \cdot 1, \end{aligned}$$

gdje su brojevi s desne strane jednakosti dimenzije najmanjih ireducibilnih reprezentacija Fischer-Griessove Monster grupe  $M$ , a brojevi s lijeve strane jednakosti prvih nekoliko koeficijenata takozvane  $j$ -funkcije.

Modularna  $j$ -funkcija (odnosno  $j$ -invarijanta) vrlo je važna funkcija u teoriji brojeva. Naime, dvije eliptičke krivulje nad algebarski zatvorenim poljem su izomorfne ako i samo ako imaju istu  $j$ -invarijantu. Kada  $j$ -funkciju razvijemo u Fourierov red ( $q$ -razvoj), prvih nekoliko koeficijenata su upravo brojevi navedeni na lijevim stranama gornjih jednakosti.

McKay je svoje otkriće poslao Johnu Thompsonu koji je u početku bio skeptičan, no usporedivši idućih nekoliko koeficijenata, počeo je i sam vjerovati u postojanje duboke veze koja je poslije postala poznata pod nazivom *Monstrous Moonshine*, tj. *Čudovišna mjesečina* (Conway-Nortonova slutnja).

Prvi značajan korak u dokazu ove veze napravili su Igor Frenkel, James Lepowsky i Arne Meurman. Naime, sredinom 80-ih godina prošlog stoljeća konstruirali su takozvani *Moonshine Module*, strukturu koju će kasnije Richard Borcherds interpretirati kao algebru verteks-operatora (VOA). Algebra verteks-operatora je vrlo složena matematička struktura, no može se shvatiti kao beskonačno-dimenzionalan vektorski prostor s beskonačno mnogo *množenja*, od kojih je svako posebno definirano.

Konačan dokaz ove slutnje dovršio je Borcherds te mu je radi ovog uspjeha, između ostaloga, dodijeljena Fieldsova medalja 1998. godine.

## Bibliografija

- [1] Michael Aschbacher, Richard Lyons, Stephen D. Smith & Ronald Solomon, *Applying the Classification of Finite Simple Groups: A User's Guide*. Vol. 230. Surveys and Monographs of the American Mathematical Society, 2011.
- [2] Jörg Borschbach, *Evolutionary Applications*. Proceedings paper, 2010.
- [3] Andrej Dujella, *Algoritmi za eliptičke krivulje*, poslijediplomski kolegij, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2008./2009. Dostupno na:  
<https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/elipticke/algelip.pdf>.
- [4] Igor Frenkel, James Lepowsky & Arne Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*. Vol. 134. Academic Press, Inc., 1988.
- [5] Terry Gannon, *Moonshine Beyond the Monster*. Cambridge University Press, 2024.
- [6] Daniel Gorenstein, *Classifying the Finite Simple Groups*. American Mathematical Society, 1986.
- [7] Hrvatski povijesni portal, *Zvonimir Janko*. Dostupno na:  
<https://www.croatianhistory.net/etf/janko/> .
- [8] Matej Kresl, *Monster grupa*. Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2025.
- [9] Morwen Thistlethwaite, *The 52-Move Strategy for Solving the Rubik's Cube*, neobjavljeni tehnički rukopis, 1981.

