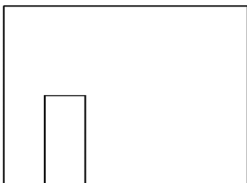


Tko ne voli tortu? Ako i niste ljubitelj slatkoga (ili možda ne smijete jesti slatko), trenutak kad se na proslavi pojavi torta, trenutak je kad svi razgovori prestaju i sva se pažnja usmjerava na slavljenika i nju. Upravo u tom trenutku nastaju najljepše fotografije i uspomene za cijeli život. Dokaz da slastice često okupiraju misli matematičara svakako je taj da su brojevima odlučili dati imena po njima. Kakvi su to brojevi te imaju li oni ikakve veze sa slasticama, doznat ćete u ovome članku.

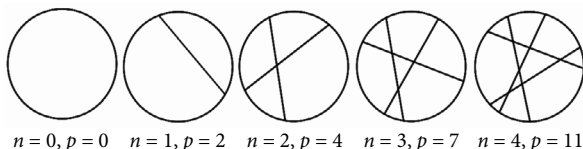
Nakon fotografiranja s tortom i divljenja njenoj vanjštini, želimo je i okusiti. Kako bismo je mogli pojesti, najprije je trebamo narezati. Kako ne bi bilo svađe i kako bismo svi ostali u dobrim odnosima, želimo da svatko dobije jednaki komad torte. Možemo li tortu uvijek razrezati na dijelove jednake veličine? Teoretski bismo mogli, no kod rezanja torte nemamo uvijek sa sobom kutomjer, šestar, kalkulator i ostala matematička pomagala koja bi nam pomogla u tome, nego to uglavnom radimo „otprilike”. Točnije, procjenjujemo kako bi nam najlakše bilo razrezati tortu da komadi budu približno jednake veličine. Pokušajte riješiti jedan problem rezanja torte na jednake dijelove.

**Zadatak 1.** Za proslavu rođendana mama je ispekla tortu u obliku pravokutnika i ostavila je u hladnjaku. Tati se jako jela torta pa je odrezao komad torte kao na slici (Slika 1.). Je li moguće ovu tortu samo jednim rezom noža podijeliti na dva dijela jednakih veličina? Objasnite zašto. ([4])



Slika 1. Torta

Zamislimo sada da netko od gostiju želi veći komad torte, a netko manji. Dakle, komadi na koje režemo tortu ne moraju biti jednake veličine. Želimo dobiti što je više moguće komada torte, pri čemu želimo učiniti što manje poteza nožem. Rezovi koje činimo nožem uvijek su okomiti na podlogu na kojoj se torta nalazi. Kako ćemo to učiniti? Jednim rezom tortu možemo podijeliti na najviše 2 dijela. S dva reza najviše na 4 dijela. Koliko maksimalno dijelova možemo dobiti ako napravimo i treći rez? Uočimo da je u tom slučaju maksimalan broj komada torte 7. Četvrtim rezom možemo dobiti ukupno 11 komada torte. Prikaze opisanih rezova možemo vidjeti na Slici 2.

Slika 2. Vizualni prikaz palačinkinog broja za  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 

<sup>1</sup>Članak je napisan kao studentski rad u kolegiju Metodika nastave matematike 3 na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, mentorice prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija i Sanja Stilinović, prof.



Maksimalan broj dijelova kruga (odnosno komada torte koju zamišljamo kao krug) koje dobivamo rezanjem u matematici se naziva **palačinkin broj** (oznaka:  $P_n$ ). Taj broj predstavlja maksimalan broj dijelova na koje se krug može podijeliti pomoću  $n$  ravnih rezova. ([2]) Općenito vrijedi da je palačinkin broj jednak sljedećem izrazu:

$$P_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}_0$$

Dokažimo da to uistinu vrijedi za bilo koji  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Dokaz:** Da bi se dobio maksimalan broj dijelova na koje se krug može podijeliti pomoću  $n$  ravnih rezova,  $n$ -ti rez treba prelaziti preko svih prethodnih rezova unutar kruga, ali ne smije prelaziti niti jednim sjecištem prethodnih linija rezanja. Dakle,  $n$ -ti rez je prethodnim rezovima podijeljen na točno  $n$  segmenata. Ne može imati više od  $n$  segmenata jer svaku prethodnu liniju može prijeći najviše jednom. Svaki tako dobiveni segment dijeli jedan komad  $(n - 1)$ -isječene palačinke na 2 dijela. Dakle,  $n$ -tim rezom do sada se poznatom maksimalnom broju dijelova  $(n - 1)$ -isječene palačinke dodaje točno  $n$  dijelova. Stoga možemo zapisati:

$$P_n = P_{n-1} + n$$

Uočimo sada da  $P_{n-1}$  možemo promatrati kao zbroj maksimalnog broja dijelova kruga u  $(n - 2)$ -isječevoj palačinki i broja dijelova koji su nastali u  $(n - 1)$ -vom rezu. Dakle,

$$P_{n-1} = P_{n-2} + n - 1.$$

Sada  $P_n$  možemo zapisati kao:

$$P_n = P_{n-2} + (n - 1) + n.$$

Nastavimo li na analogan način dalje, dobit ćemo da je izraz  $P_n$  jednak:

$$P_n = P_0 + 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n.$$

Zbog  $P_0 = 1$  (ako palačinku ne režemo ostaje u jednom dijelu) dobivamo:

$$P_n = 1 + 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n.$$

Uočimo da je  $1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$  zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva. Iz Gaussove dosjetke znamo da je

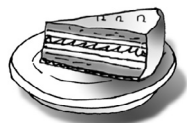
$$1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ tj. } P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Svođenjem na najmanji zajednički nazivnik dobivamo:

$$P_n = \frac{n(n+1)+2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Dakle, općeniti izraz za palačinkin broj vrijedi za bilo koji  $n \in \mathbb{N}_0$ , što smo i trebali dokazati ([3]).

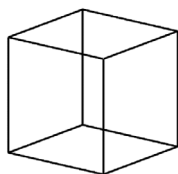




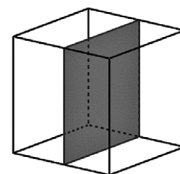
Formalni naziv ovog broja centralni je poligonalni broj, a još ga zovemo „lazy caterer’s sequence”. A zašto ga zovemo palačkinim brojem? Odgovor je vrlo jednostavan. Ime je dobio prema tome što palačinku možemo vrlo lako zamisliti kao krug, a puno nam je zabavnije rezati palačinke nego obične krugove. Pokušajte sada riješiti sljedeći zadatak.

**Zadatak 2.** Na proslavi rođendana bilo je 27 gostiju. Prije rezanja torte otišla su 4 gosta, a 1 od preostalih gostiju ne smije jesti slatko. Koliko je najmanje rezova nožem potrebno učiniti kako bi svaki gost dobio svoj komad torte, pri čemu komadi ne moraju biti jednake veličine? Torta je napravljena u obliku kocke. Skicirajte kako biste razrezali tu tortu.

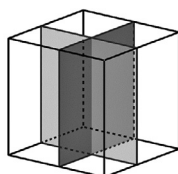
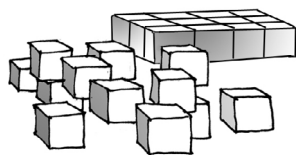
Kad bismo uzeli u obzir da tortu možemo rezati i „sa strane”, odnosno ako nam nije važno da svaki komad torte sadrži svaki od slojeva (rezovi ne moraju biti okomiti prema podlozi torte), kako bismo onda razrezali tu tortu? Uzmimo sada tortu u obliku kocke. Napravimo li jedan rez, tortu ćemo vrlo lako podijeliti na dijela. Drugim rezom torta će biti podijeljena na 4 komada, a trećim rezom možemo je podijeliti na maksimalno 8 komada.



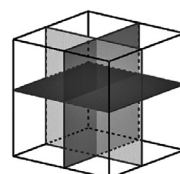
Slika 3. Vizualni prikaz tortinog broja za  $n = 0$



Slika 4. Vizualni prikaz tortinog broja za  $n = 1$



Slika 5. Vizualni prikaz tortinog broja za  $n = 2$



Slika 6. Vizualni prikaz tortinog broja za  $n = 3$

Maksimalan broj komada torte koji možemo dobiti na ovaj način u matematici se naziva **tortin broj** (oznaka:  $C_n$ ). Taj broj predstavlja maksimalan broj područja na koja se prostor može podijeliti u  $n$  ravninskih rezova. ([5]) Općenito vrijedi da je tortin broj jednak sljedećem izrazu:

$$C_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}, n \in \mathbb{N}_0$$

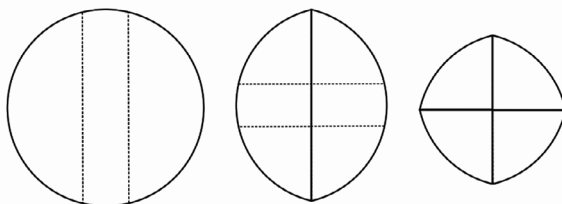
Prostor koji promatramo možemo zamisliti kao kocku ili valjak. Dijelove prostora koji promatramo, podijeljenog ravninama, lako možemo zamisliti kao komade torte odrezane nožem pa je broj prema tome dobio ime.



**Zadatak 3.** Razmislite sada kako bismo morali rezati tortu kada bismo željeli dobiti minimalan broj komada torte u  $n$  rezova nožem. Pomozite si crtanjem.

Problem koji se često javlja je kako sačuvati tortu, a da ne izgubi svoju sočnost. Kako spasiti njezine „ostatke” od sušenja? Zamislimo da smo za rođendan dobili tortu u obliku valjka. Rođendan ćemo slaviti u dva dana jer, na žalost, svi gosti ne mogu doći prvi dan. Ako tortu budemo rezali na uobičajen način, rub torte uz koji smo odrezali prvi i zadnji komad mogao bi se osušiti pa torta više neće biti sočna, izgubit će svježinu. Možemo li nešto učiniti kako bismo to spriječili i spasili tortu?

Rezat ćemo tortu na znanstveni način! Ovaj način rezanja torte osmislio je i 1906. godine u znanstvenom časopisu *Nature* objavio engleski prirodoslovac i matematičar Francis Galton. Što to znači rezati tortu na znanstveni način? Najprije ćemo odrezati unutarnji dio torte, izvaditi ga van i pojesti (kao na slici lijevo). Potom ćemo preostale dijelove torte spojiti i dobit ćemo tortu nalik ragbi lopti (slika u sredini). Ako smo još gladni, možemo nastaviti postupak i iz torte ponovno izrezati unutarnji dio, a preostale dijelove spojiti. ([1]) Postupak možemo ponavljati sve dok nam ne ostane prazna podloga na kojoj je nekad bila ukusna, sočna torta. Vizualni prikaz opisanog postupka možemo vidjeti na Slici 7.



Slika 7.  
Znanstveni  
način rezanja  
torte

Moramo priznati da nam je Francis Galton otkrio jedan vrlo zanimljiv i koristan način rezanja torte. Podijelite ovaj savjet za rezanje torte s mamama i pokušajte ga primijeniti idućom prilikom kada budete rezali tortu.

**Zadatak 4.** Razmislite kako bismo od sušenja mogli spasiti tortu koja je napravljena u obliku pravilnog peterokuta? Skicirajte nekoliko koraka.

I na samome kraju, što nam još preostaje? Isprobavanje svih ovih načina rezanja torte. Zamolite mame (ili tate) da vam naprave ili kupe tortu pa isprobajte različite načine rezanja torte. Tko zna, možda jednoga dana baš komadić torte ili palačinka s čokoladnim punjenjem budu zaslužni za dokazivanje nekog teorema ili otkrivanje nečega novog u matematici ili nekoj drugoj znanosti. Čekajući svoj komad torte, pokušajte riješiti sljedeći zadatak.

**Zadatak 5.** Grgur i Ljupka organiziraju svoje vjenčanje. Pozvali su 258 gostiju i sa slastičarnicom dogovorili da naprave tortu na 3 kata tako da za svakog gosta (i njih dvoje) bude barem po jedan komad torte. I Grgur i Ljupka



jako vole matematiku pa su odlučili da će se torta rezati samo ravnim rezovima nožem okomitim na podlogu na kojoj se torta nalazi. Također žele da se sa što manje rezova nožem dobije što više komada torte, pri čemu se svaki kat reže posebno, a razlika u broju rezova između svakog od katova smije biti najviše 3 (npr. ne može na prvom katu biti ukupno osam rezova, a na trećem katu samo jedan rez). Komadi torte ne moraju biti jednake veličine jer neki gosti žele više, a neki manje torte pa će moći birati koji će komad uzeti. Izračunajte koliko bi minimalno rezova nožem trebalo napraviti kad bi svi pozvani gosti došli na vjenčanje.

3  
2  
1

**Zadatak 6.** Grgur i Ljupka u međuvremenu su doznali da su 22 gosta spriječena doći na vjenčanje. Slastičarnica je već napravila nacrt torte koji ne mogu mijenjati, no mogu promijeniti plan rezanja torte za svaki od katova. Pomozite slastičarnici napraviti novi plan rezanja torte tako da svaki od gostiju dobije barem jedan komad torte. Izračunajte koliko bi minimalno rezova nožem trebalo napraviti u tom slučaju.

**Zadatak 7.** Dan prije vjenčanja još jedna je peteročlana obitelj zbog bolesti otkazala svoj dolazak, a na svadbi tortu nije jelo 29 gostiju. Izračunajte koliko je komada torte ostalo mladencima za ponijeti kući ako je torta rezana kako je zadano u prethodnome zadatku.

### Literatura:

1. Galton, F. (1906.). Cutting a Round Cake on Scientific Principles. *Nature* 75, 173, <https://doi.org/10.1038/075173c0> (25. 10. 2022.)
2. Numbers Aplency. (2013.). pancake number, [https://www.numbersaplenty.com/set/pancake\\_number/](https://www.numbersaplenty.com/set/pancake_number/) (24. 10. 2022.)
3. LiquiSearch. (2022.). Lazy Caterer's Sequence – Proof. [https://www.liquisearch.com/lazy\\_caterers\\_sequence/proof](https://www.liquisearch.com/lazy_caterers_sequence/proof) (28. 10. 2022.)
4. The Guardian. (2016.). Did you solve it? Do you cut cake correctly?, <https://www.theguardian.com/science/2016/nov/21/did-you-solve-it-can-you-cut-cake-correctly> (24. 10. 2022.)
5. Wolfram MathWorld. (2022.). Cake Number, <https://mathworld.wolfram.com/CakeNumber.html> (24. 10. 2022.)

