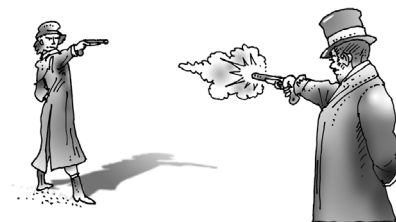


TEORIJA DVOBOJA

Isabel Villalobos, XV. gimnazija, Zagreb

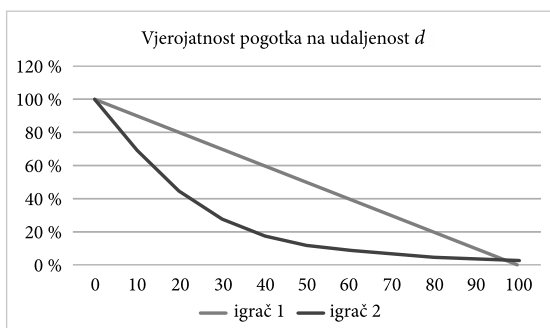
Pitanje časti oduvijek je bilo iznimno važno. Tijekom 17. i 18. stoljeća smatralo se da je najlakši način za doći do odgovora tko ima veću čast izazivanje na dvoboj. U jednom dijelu Europe pojavio se specifičan stil dvoboja zvan dvoboj *à volonté* („na zadovoljstvo”). U ovom dvoboju borci nisu stajali na točno određenoj udaljenosti s koje su morali pucati, već su se između njih nalazile dvije granice. Borci su smjeli slobodno hodati prema granici tako da smanje razmak među sobom, ali i pucati kada su htjeli. U slučaju da je jedan borac puknuo ali promašio, morao je dopustiti drugom borcu da dođe do granice i puca u njega, a da se on ne pomiče.



Ono što bi sigurno koristilo bilo kome tko se nađe u poziciji jednog od boraca u dvoboju dobro je poznavanje područja matematike koje se zove *Teorija igara*. Teorija igara proučava donošenje odluka u situacijama gdje su ishodi tih odluka međusobno povezani i ovise o interakciji više sudionika odnosno „igrača”. Drugim riječima, analizira strategije koje racionalni igrači donose kako bi ostvarili svoje ciljeve, uzimajući u obzir druge igrače i njihove interese te moguće poteze.

Zamislimo da postoje dva borca izazvana na dvoboj. Nalaze se na udaljenosti d jedan od drugoga i izmjenjuju se na potezu. Kada jedan borac dođe na red, ima opciju ili pomaknuti se naprijed ili gađati protivnika. U slučaju da borac odluči pucati i promaši, mora se nastaviti kretati naprijed dok se borci međusobno ne nađu na minimalnoj udaljenosti (d_0) i drugi borac ima siguran pogodak. Ono što svaki borac pokušava zaključiti je do koje udaljenosti treba ići naprijed, a na kojoj treba stati i gađati protivnika. Kako bismo lakše došli do odgovora, zanemarit ćemo granice koje bi bile postavljene kada bi se odvijao pravi dvoboj u 18. stoljeću.

Za početak trebamo definirati nekoliko pojmova i pravila. U dvoboju, koji ćemo zvat *„igra”*, sudjeluju točno dva borca koja ćemo zvat *„igrač 1”* i *„igrač 2”*. Prvo će pravilo biti da svaki igrač u svakom trenutku igre ima pristup svim informacijama o stanju igre i potezima drugih igrača, kao i o svojim, te sposobnostima drugog igrača (Slika 1.). Sljedeći uvjet bit će da na udaljenosti d_0 (0 metara)



Slika 1.



oba igrača imaju siguran pogodak drugog igrača te da je pomak oba igrača naprijed 10 metara (ovo služi samo lakšem računanju).

Kako igrači nemaju jednaku vjerojatnost (nisu jednako precizni) pogoditi drugog igrača, dolazimo do pitanja: „Tko bi trebao prvi pucati – precizniji igrač ili manje precizan igrač?” Na prvu će se možda odgovor činiti očit, no kada bolje promislimo, rješenje nije toliko jednostavno. Postoje dva načina na koja možemo gledati na ovo pitanje:

1. Neki će smatrati da bi precizniji igrač trebao prvi pucati jer mu je vjerojatnost pogotka veća te ima veću šansu pogoditi drugog igrača na velikoj udaljenosti.
2. S druge strane, neki će smatrati da manje precizan igrač treba prvi pucati kako bi preduhitrio svog protivnika koji, kako smo već ustanovili, ima veću vjerojatnost pogotka.

No, što ako igrači dođu do istog zaključka kao i mi? Znajući da jedan drugoga žele preduhitriti, udaljenost na kojoj bi trebali pucati samo će se povećavati. Ovo nam donosi i drugo pitanje: „Na kojoj bi udaljenosti igrač trebao pucati?” Na našu sreću, odgovori na ova pitanja mogu se matematički izračunati pomoću Teorije igara.

Za lakše razumijevanje, matematički ćemo zapisati ono što možemo vidjeti na grafu.

$P_1(d_1)$ = vjerojatnost da će igrač 1 pogoditi protivnika na udaljenosti d_1

$P_2(d_1)$ = vjerojatnost da će igrač 2 pogoditi protivnika na udaljenosti d_1

Svaki put kada je igrač na redu, postavlja si pitanje treba li pucati ili se pomaknuti naprijed.

Kada bi igrač znao da na sljedećem potezu protivnik neće pucati već će se pomaknuti naprijed, ispravno razmišljanje svakog igrača bilo bi pomaknuti se naprijed. Drugim riječima, znajući da drugi igrač neće pucati idući put kada je na redu, igrač koji je trenutno na potezu ima veću vjerojatnost pogotka ako pričekava da opet dođe na red, na manjoj međusobnoj udaljenosti.

Međutim, što bi igrač trebao napraviti kada bi znao da će protivnik pucati sljedeći put kada je na redu? Recimo da se nalazimo u poziciji igrača 1 i da znamo da će igrač 2 pucati ako se mi za ovaj potez odlučimo pomaknuti naprijed. Kada bi igrač 1 pucao i promašio, vjerojatnost da će igrač 2 pobijediti bit će sigurna jer će čekati minimalnu udaljenost (d_0) za pucanje. Naime, ovo isto vrijedi za igrača 1 u slučaju da se odluči pomaknuti naprijed i da igrač 2 na svom potezu promaši.

Ono što bi zapravo trebali razmatrati jest jesu li veće šanse za pobjedu ako igrač puca sada, odnosno vjerojatnost da igrač pogodi na trenutnoj udaljeno-

IZAZIVAM VAS
NA DVOBOJI

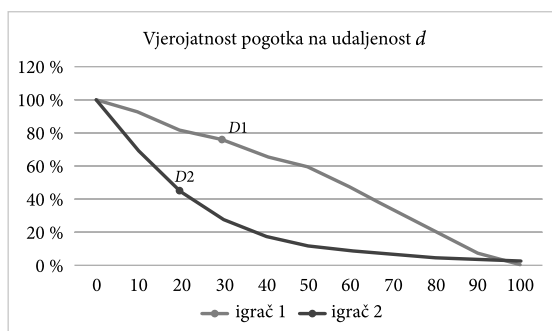


sti, ili vjerojatnost da će protivnik na idućem potezu promašiti. To bismo mogli zapisati ovako (gledajući iz perspektive igrača 1):

Ako vrijedi $P_1(d_i) \geq 1 - P_2(d_{i-10})$, onda bi igrač 1 trebao pucati. Isto vrijedi za igrača 2.

Iz ovoga potom možemo zaključiti da bi igrač 1 trebao pucati ako vrijedi: $P_1(d_i) + P_2(d_{i-10}) \geq 1$.

Možemo primijetiti da će doći prijelazni trenutak na grafu kada će ova jednadžba postati istinita (Slika 2.). Udaljenost na kojoj se događa ovaj prijelaz označit ćemo s D .

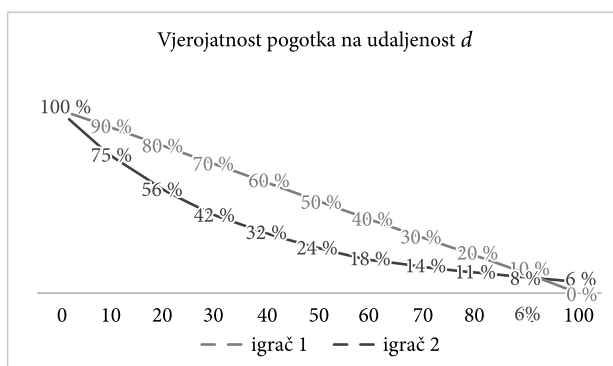


Slika 2.

Udaljenost D bit će drugačija za oba igrača u nekim slučajevima, no kako je pobjednik određen kada je prvi put ispaljen pištolj, u obzir ćemo uzimati samo udaljenost D od igrača za kojeg su prvo ispunjeni uvjeti. Ovo će nam ujedno odgovoriti na pitanje koji bi igrač prvi trebao pucati.

Primjer

Imamo dva igrača koji se nalaze na udaljenosti od 100 metara. Na grafu su priloženi podaci o vjerojatnosti pogotka svakog igrača na pojedinim udaljenostima. Odredimo na kojoj bi udaljenosti i koji igrač prvi trebao pucati ako je igrač 1 prvi na potezu.



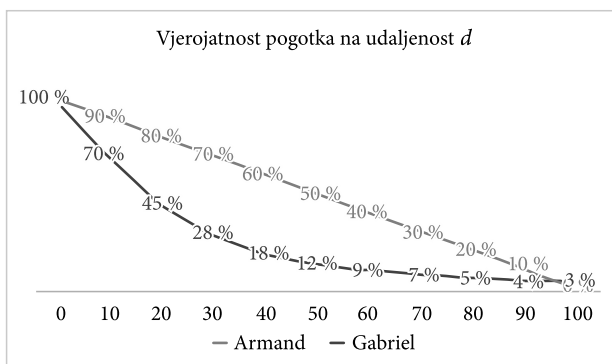
Uzimajući u obzir dva razmišljanja za koja smo zaključili da su racionalno najbolja za svakog igrača u slučaju da znaju kako sljedeći igrač planira odigrati svoj potez, možemo doći do još nekih zaključaka. Čak i da ne znamo kako će igrač odigrati svoj sljedeći potez, već samo pretpostavljamo, možemo vidjeti da je prije udaljenosti D uvijek najbolji potez pomaknuti se naprijed, što znači da pitanje tko bi prvi trebao pucati uopće ne ovisi o tome tko je precizniji, već o tome koji će se igrač prvi naći na udaljenosti D .

Služeći se jednačinom $P_1(d_i) + P_2(d_{i-10}) \geq 1$ možemo izračunati da će udaljenost na kojoj bi igrači trebali pucati (udaljenost D) biti na 40 metara te da bi igrač 1 trebao prvi pucati jer će se prvi naći na udaljenosti od 40 metara i imati priliku biranja poteza.

Možemo primijetiti da će se, iako su igrači vrlo različite vještine, idealna udaljenost na kojoj bi pojedini igrač trebao pucati u ovom slučaju pojaviti na istoj udaljenosti. Kada bi se igrač 2 prvi našao na udaljenosti D , bez obzira na to što mu je vjerojatnost mala, najbolje šanse za pobjedu imat će pucajući iz te udaljenosti. Vjerojatnost njegovog pogotka možda neće biti najveća na toj udaljenosti, no ključan dio ovog zadatka je uzimati u obzir svog protivnika i njegove sposobnosti i interese.

Zadatci

1. Dvojica igrača, Armand i Gabriel, koja sudjeluju u dvoboju nalaze se na udaljenosti od 100 metara. Na grafu su priloženi podatci o vjerojatnosti pogotka svakog igrača na pojedinim udaljenostima. Odredite na kojoj bi udaljenosti i koji igrač prvi trebao pucati ako je Armand prvi na potezu.

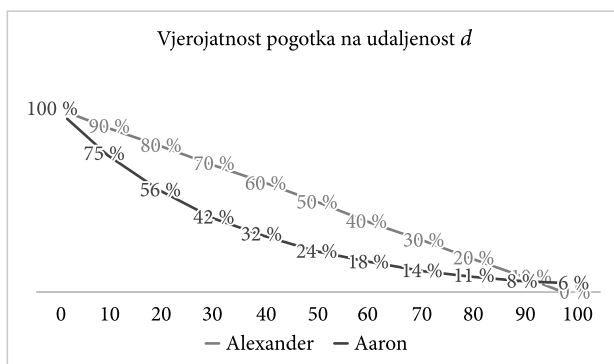


Rješenje: Gabriel bi trebao pucati prvi na udaljenosti od 30 metara.



2. Dvojica igrača, Alexander i Aaron, koja sudjeluju u dvoboju nalaze se na udaljenosti od 100 metara. Na grafu su priloženi podatci o vjerojatnosti pogotka svakog igrača na pojedinim udaljenostima. Znaš da ni jedan igrač neće pucati prije udaljenosti D te da ako igrač koji prvi gađa promaši, protivnik ima sigurnu pobjedu. Kolika je vjerojatnost pojedinog igrača da pobijedi ako znaš da će igrač koji se prvi nađe na udaljenosti D sigurno pucati.

Rješenje: Vjerojatnost da Alexander pobijedi je 60 %, a da Aaron pobijedi 40 %.



3. Dvojica igrača, Andrew i Charles, koja sudjeluju u dvoboju nalaze se na udaljenosti od 100 metara. Na grafu su priloženi podatci o vjerojatnosti pogotka svakog igrača na pojedinim udaljenostima. Odredi na kojoj bi udaljenosti i koji igrač prvi trebao pucati ako je igrač 1 prvi na potezu.

Rješenje: Charles bi trebao pucati prvi na udaljenosti od 30 metara.

