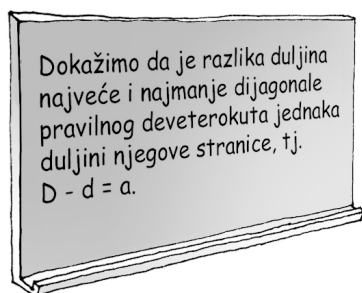


PET DOKAZA TVRDNJE O PRAVILNOM DEVETEROKUTU

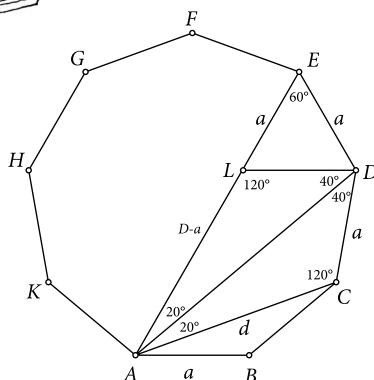
Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Matkačima je poznato da pravilni mnogokuti imaju sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine. Veličina središnjeg kuta pravilnog deveterokuta je $360^\circ : 9 = 40^\circ$, a tolika je i veličina vanjskoga kuta (40°). Veličina obodnog kuta nad stranicom pravilnog deveterokuta je $40^\circ : 2 = 20^\circ$, a veličina unutarnjih kutova iznosi $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

U ovom tekstu pozabavit ćemo se sljedećim zadatkom:



Dokaz 1. Neka je zadan pravilni deveterokut $ABCDEFGHK$ (Slika 1.). Na njegovoj dijagonali \overline{AE} odredimo točku L tako da je $|EL| = |DE| = a$, pa je $|AL| = D - a$.

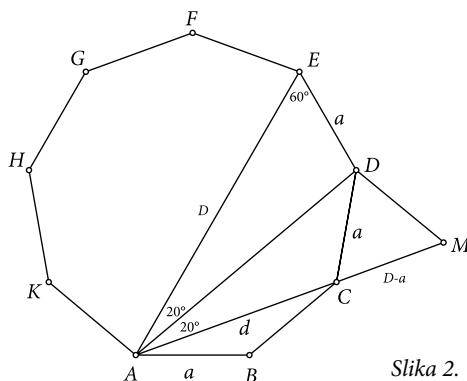


Slika 1.

Zbog $|\angle DEL| = 60^\circ$ (obodni kut nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog deveterokuta) i $|EL| = |DE| = a$, trokut $\triangle DEL$ je jednakostraničan, pa je $|DE| = a$. Nadalje je $|\angle LAD| = |\angle EAD| = |\angle DAC| = 20^\circ$ (obodni kut nad stranicom pravilnog deveterokuta), $|\angle ADC| = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ (obodni kut nad dvije devetine kružnice opisane oko pravilnog deveterokuta $ABCDEFGHK$) te $|\angle ADL| = |\angle CDE| - (|\angle LDE| + |\angle ADC|) = 140^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 40^\circ = |\angle ADC|$. To znači da su trokuti ACD i ADL sukladni (po KSK) pa je $|AC| = |AL|$, ili $d = D - a$, tj. $D - d = a$.

Dokaz 2. Odredimo točku M na pravcu AC tako da je $|AM| = |AE| = D$, pa je $|CM| = |AM| - |AC| = D - d$ (Slika 2.).

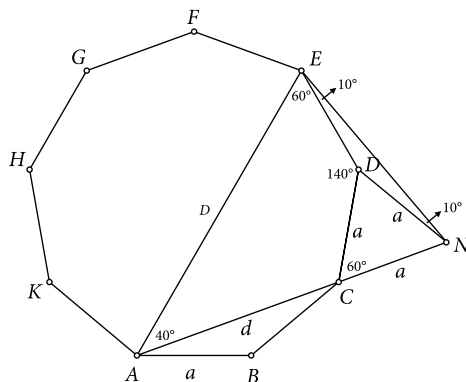




Slika 2.

Budući da je $|AE| = |AM| = D$, $|AD| = |AD|$ i $|\angle DAM| = |\angle EAD| = 20^\circ$ (obodni kut nad stranicom pravilnog deveterokuta), trokuti $\triangle AMD$ i $\triangle ADE$ su sukladni (po SKS). Zbog toga je $|MD| = |DE| = a$, pa je $\triangle AMD$ jednakokraničan. To pak znači da je $|CD| = |DM| = |CM|$, ili $a = a = D - d$, tj. $D - d = a$.

Dokaz 3. Produljimo najkraću dijagonalu \overline{AC} (čija je duljina d) do točke N tako da je $|CN| = |AB| = |CD| = a$ (Slika 3.).

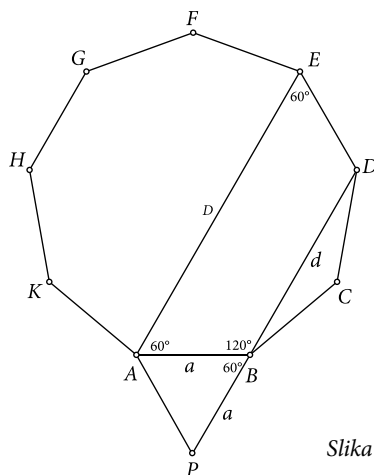


Slika 3.

Kako je $|\angle DCN| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ i $|CN| = |CD|$, zaključujemo da je $\triangle CND$ jednakokraničan. Zbog toga je i $|DN| = |CN| = |CD| = a$. S obzirom na to da je $|DN| = |DE|$, trokut $\triangle DNE$ je jednakokraničan. Tada je u njemu $|\angle NDE| = 360^\circ - 60^\circ - 140^\circ = 160^\circ$ i $|\angle DNE| = |\angle DEN| = (180^\circ - |\angle NDE|) : 2 = (180^\circ - 160^\circ) : 2 = 10^\circ$. Sada je $|\angle CNE| = |\angle CND| + |\angle DNE| = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$ i $|\angle AEN| = |\angle AED| + |\angle DEN| = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$, što znači da je i $\triangle ANE$ jednakokraničan (jer je $|\angle CNE| = |\angle AEN|$), tj. $|AE| = |AN| = |AC| + |CD|$, ili $D = d + a$, odnosno $D - d = a$.

Dokaz 4. Produljimo najkraću dijagonalu \overline{DB} do točke P (točka B je između točaka D i P) tako da bude $|BP| = |AB| = a$ (Slika 4.).

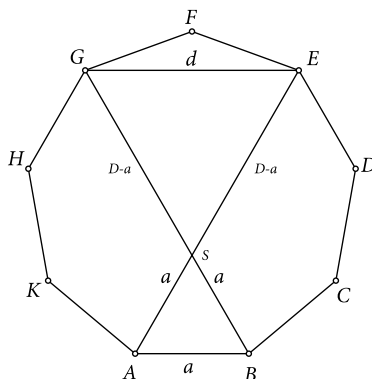




Slika 4.

Kako je $|\angle ABD| = 6 \cdot 20^\circ = 120^\circ$ (obodni kut nad dvije trećine kružnice opisane oko pravilnog deveterokuta), imamo $|\angle ABP| = 180^\circ - |\angle ABD| = 60^\circ$. S obzirom na to da je $|BP| = |AB|$ i $|\angle ABP| = 60^\circ$, zaključujemo da je trokut $\triangle APB$ jednakostraničan. Zbog toga je $|AP| = |BP| = |AB| = a = |DE|$. Kod četverokuta $PDEA$ nasuprotni su kutovi jednaki i susjedni suplementarni, a i $|AP| = |DE|$, što znači da je taj četverokut paralelogram. To nam pak kazuje da je $|AE| = |PD|$, tj. $D = a + d$, ili $D - d = a$.

Dokaz 5. Neka se dijagonale \overline{AE} i \overline{BG} sijeku u točki S (Slika 5.).



Slika 5.

Veličine kutova $\angle SAB$, $\angle SBA$, $\angle SEG$ i $\angle SGE$ jednake su 60° (obodni kutovi nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog deveterokuta). Zbog toga su trokuti ABS i EGS jednakostranični, pa je $|AS| = |BS| = |AB| = a$ i $|ES| = |GS| = |EG|$. Kako je $|AE| - |ES| = D - a$, $|EG| = d$ i $|ES| = |EG|$, zaključujemo da je $D - a = d$, tj. $D - d = a$.

