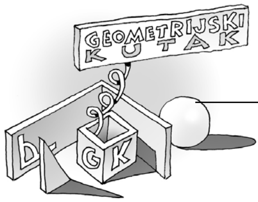
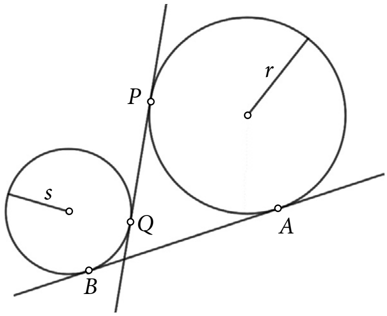


TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

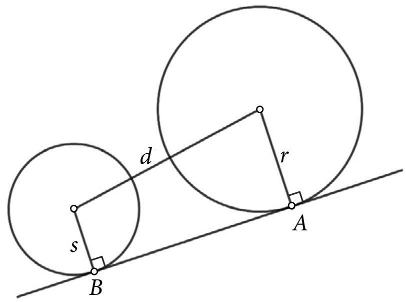
Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Zadane su dvije kružnice radijusa *r*, odnosno *s*, te njihove dvije zajedničke tangente. Ako su udaljenosti dirališta $|AB| = 16$ i $|PQ| = 14$, koliko je $r \cdot s$?

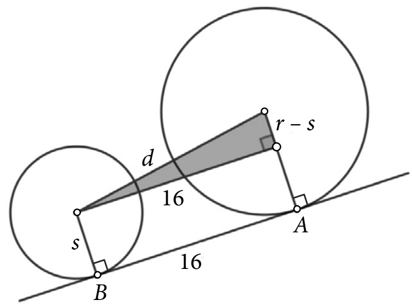


Rješenje: Označimo udaljenost između središta zadanih kružnica s *d*.

Promotrimo najprije tangentu *AB*. Središta kružnica spojimo s diralištem *A*, odnosno *B*.



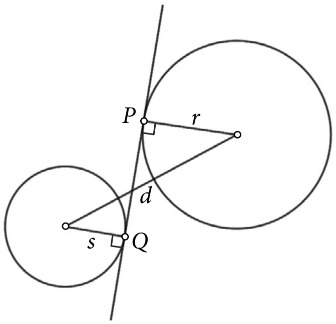
Oba istaknuta polumjera okomita su na zajedničku tangentu *AB* pa su oni međusobno paralelni. Dakle, dobiveni četverokut je trapez unutar kojega se može istaknuti pravokutni trokut, kako je prikazano na donjoj slici. Katete toga trokuta imaju duljine 16, odnosno $r - s$, a hipotenuza ima duljinu *d*.

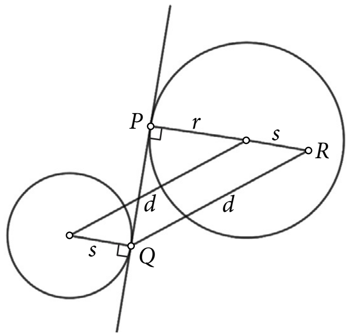


Primijenimo li na ovaj trokut Pitagorin poučak, dobiva se

$$d^2 = 16^2 + (r - s)^2 . \qquad (1)$$

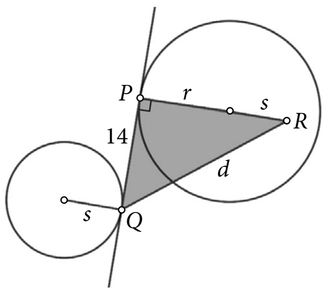
Promotrimo sada i drugu zajedničku tangentu PQ zadanih kružnica. Središta kružnica spojimo s diralištem P, odnosno Q. (dolje lijevo)





I u ovom slučaju polumjeri r i s međusobno su paralelni. Produljimo polumjer r preko središta kružnice za duljinu s. Krajnju točku R toga produžetka spojimo s Q (gore desno).

Dužina $\overline{QR}$ ima jednaku duljinu d kao i spojnica središta kružnica. Na slici se sada može istaknuti pravokutni trokut PQR čije katete imaju duljine 14, odnosno $r + s$, a hipotenuza ima duljinu d.



Primijenimo li na ovaj trokut Pitagorin poučak, dobiva se

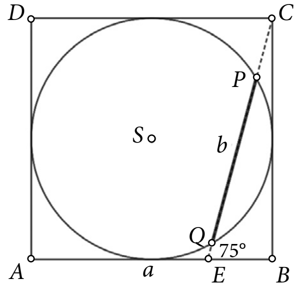
$$d^2 = 14^2 + (r + s)^2 . \qquad (2)$$

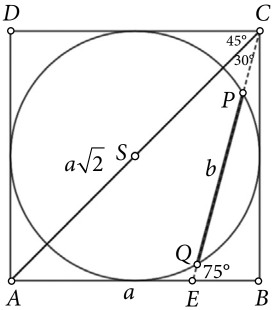
Iz jednakosti (1) i (2) slijedi da je $14^2 + (r + s)^2 = d^2 = 16^2 + (r - s)^2$.

Nakon kvadriranja dobiva se $196 + r^2 + 2rs + s^2 = 256 + r^2 - 2rs + s^2$.

Na obje strane jednakosti mogu se poništiti članovi r^2 i s^2 pa se nakon sređivanja dobiva $4rs = 256 - 196$, tj. $rs = 15$, što se i tražilo u zadatku.

Primjer 2. Zadan je kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine a i njemu upisana kružnica. Iz vrha C kvadrata nacrtana je dužina $\overline{CE}$ (točka E pripada stranici $\overline{AB}$) koja sa stranicom $\overline{AB}$ zatvara kut od 75°. Dužina $\overline{CE}$ na kružnici odsijeca tetivu $\overline{PQ}$ duljine b. Koliko je $\frac{a}{b}$?

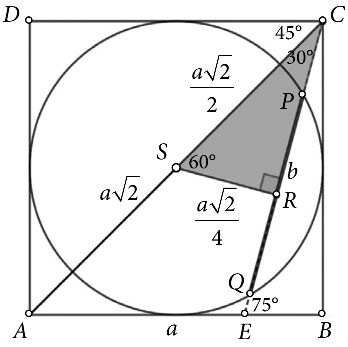


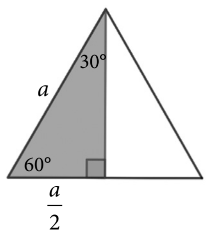


Rješenje: Dijagonala $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ ima duljinu $a\sqrt{2}$, a sa stranicom $\overline{CD}$ zatvara kut od 45°.

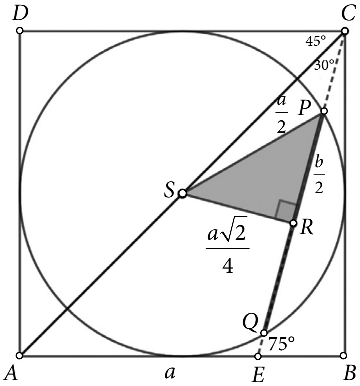
Iz $|\angle DCE| = |\angle BEC| = 75°$ slijedi da je $|\angle ACE| = 75° - 45° = 30°$. Crtež na rubu.

Okomica iz središta kružnice na tetivu $\overline{PQ}$ siječe tetivu u točki R. Točka R ujedno je polovište tetive $\overline{PQ}$. Istaknemo li trokut SRC, možemo primijetiti da je to pravokutni trokut s jednim kutom od 30°. To znači da drugi šiljasti kut ima mjeru 60°, tj. trokut SRC polovina je jednakostraničnog trokuta. Kako je hipotenuza $\overline{SC}$ toga trokuta ujedno polovina dijagonale kvadrata, njezina je duljina $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Kraća kateta, tj. dužina $\overline{SR}$, onda je upola kraća (vidi sliku desno) pa je njezina duljina $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.





Istaknimo sada na slici trokut SRP. To je također pravokutni trokut. Hipotenuza $\overline{SP}$ ujedno mu je polumjer kružnice pa ima duljinu $\frac{a}{2}$. Jedna kateta je $\overline{SR}$, što je upravo dobiveno $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, a druga kateta $\overline{RP}$ je polovina tetive $\overline{PQ}$ jer je R polovište. Njezina je duljina $\frac{b}{2}$.



Primjenom Pitagorina poučka na trokut SRP dobiva se redom:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

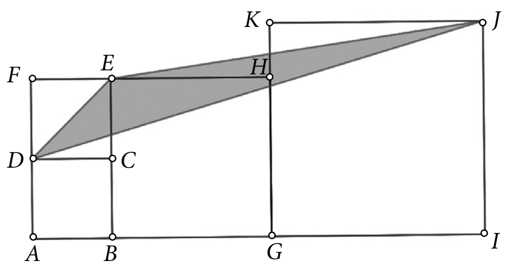
$$\frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{16} + \frac{b^2}{4} \quad / \cdot 8$$

$$2a^2 = a^2 + 2b^2$$

$$a^2 = 2b^2 \ / : b^2$$

Dakle, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, tj. vrijedi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Zadatak 1. Zadana su četiri kvadrata. Kvadrat $ABCD$ ima površinu 5, kvadrat $GIJK$ ima površinu 36. Kolika je površina trokuta DJE?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos